J-P. Serre

Fonctions automorphes : quelques majorations dans le cas où X/G est compact

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 2, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A2_0>

FONCTIONS AUTOMORPHES: QUELQUES MAJORATIONS DANS LE CAS OÙ X/G EST COMPACT

(Exposé de J-P. Serre, 30-11-53)

§1. Préliminaires

LEMME 1. (Schwarz) Soit U le polydisque de $\mathbf{C}^n$ défini par $|z_i| \leq R_i$, et soit $V = \lambda \cdot U$ un polydisque homothétique, avec $0 < \lambda < 1$. Si f est une fonction holomorphe sur U qui s'annule à l'origine ainsi que ses dérivées partielles d'ordre $< p$, on a:

$$\sup_{z \in V} |f(z)| \leq \lambda^p \cdot \sup_{z \in U} |f(z)|$$

En coupant par une droite complexe issue de l'origine on est ramené au cas d'une seule variable; on peut alors écrire $f(z) = z^p \cdot g(z)$, où $g(z)$ est holomorphe sur U, et l'inégalité ci-dessus en résulte en appliquant le principe du maximum à $g(z)$.

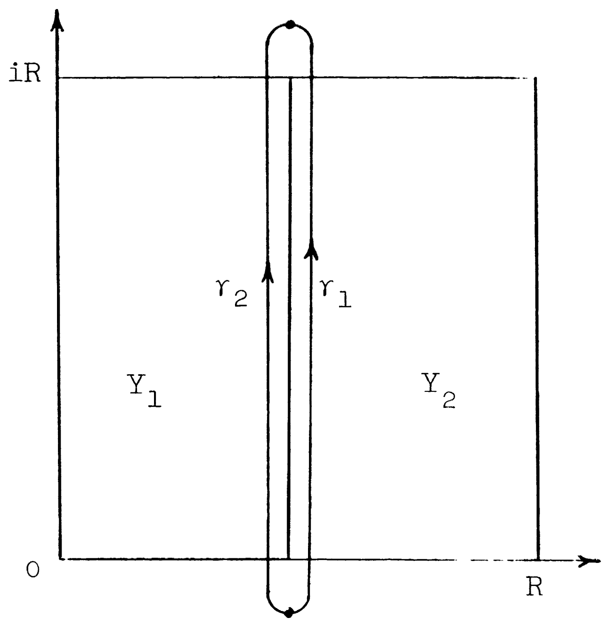
La démonstration précédente montre évidemment que le Lemme 1 est valable pour tout domaine cerclé U.

LEMME 2. (Cousin) Soient U un polydisque de $\mathbf{C}^n$ et D un diviseur sur U. Il existe alors une fonction f, méromorphe sur U, telle que $D = (f)$.

Dire que D est un diviseur sur U signifie que D est un diviseur d'un voisinage ouvert (non précisé) du compact U. Or U possède un système fondamental de voisinages isomorphes à des cubes (il suffit de le voir pour une variable, auquel cas on utilise la représentation conforme). Il suffit donc de démontrer le Lemme 2 en remplaçant le polydisque U par un cube X.

Par définition, D peut s'écrire localement comme diviseur d'une fonction méromorphe; on peut donc partager X en cubes assez petits pour que D soit, sur chacun d'eux, le diviseur d'une fonction méromorphe, et tout revient à "regrouper" ces cubes, ce qui se fait au moyen du Lemme suivant:

LEMME 3. *Soit* X *un cube de* $\mathbb{C}^n$, *produit direct du carré* $Y : 0 \le \Re z_1 \le R$, $0 \le \Im z_1 \le R$, *par un cube* Z *de* $\mathbb{C}^{n-1}$. *Soit* Y_1 (*resp.* Y_2) *la partie de* Y *formée des points* z_1 *tels que* $\Re z_1 \le R'$ (*resp.* $\Re z_1 \ge R'$). *Soit* D *un diviseur sur* X, *et soient* f_1 *et* f_2 *deux fonctions méromorphes sur* $Y_1 \times Z$ *et* $Y_2 \times Z$ *respectivement, telles que* $D = (f_1)$ *sur* $Y_1 \times Z$ *et que* $D = (f_2)$ *sur* $Y_2 \times Z$. *Il existe alors une fonction* f *méromorphe sur* X *telle que* $D = (f)$ *sur* X.



Démonstration du Lemme 2: La fonction f_1/f_2 est méromorphe sur $W = (Y_1 \cap Y_2) \times Z$, et $(f_1/f_2) = D - D = 0$, donc f_1/f_2 est holomorphe inversible, et, puisque W est simplement connexe, on peut écrire $f_1/f_2 = e^g$, où g est holomorphe sur W. Soit alors γ un contour entourant le segment $Y_1 \cap Y_2$, et assez voisin de ce segment pour que g soit holomorphe à l'intérieur de $\gamma \times Z$. Coupons γ en deux morceaux γ_1 et γ_2 de telle sorte que γ_1 (*resp.* γ_2) ne rencontre pas Y_1 (*resp.* Y_2), cf. figure. Posons:

$$g_1(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{g(t, z_2, \ldots, z_n)}{t - z_1}\, dt, \quad g_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{g(t, \ldots, z_n)}{t - z_1}\, dt .$$

Les fonctions g_1 et g_2 sont holomorphes dans $Y_1 \times Z$ et $Y_2 \times Z$ respectivement, et l'on a $g_1 - g_2 = g$, d'après la formule de Cauchy. On en tire $f_1/e^{g_1} = f_2/e^{g_2}$ sur W, ce qui permet de définir une fonction f sur X en posant $f = f_1/e^{g_1}$ sur $Y_1 \times Z$ et $f = f_2/e^{g_2}$ sur $Y_2 \times Z$; comme $(f) = (f_1)$ sur $Y_1 \times Z$ et $(f) = (f_2)$ sur $Y_2 \times Z$, on a bien $(f) = D$ sur X tout entier.

C.Q.F.D.

On trouvera des généralisations du Lemme 2 dans le Séminaire 51-52, Exposé 17, et Exposé 20, §4.

§2. Le théorème principal

Soit X une variété analytique complexe de dimension complexe n, et soit G un groupe d'automorphismes de X. Dans toute la suite de cet exposé nous ferons l'hypothèse suivante:

Il existe un compact K dans X qui rencontre toute classe mod G. (Autrement dit, les translatés $g \cdot K$ de K forment un recouvrement de X lorsque g parcourt G.)

Si l'espace quotient X/G est séparé, cette hypothèse équivaut à dire que X/G est compact, comme on le voit immédiatement en tenant compte du fait que la relation d'équivalence définie par G est ouverte (cf. BOURBAKI, Top. Gén., Chap I, 2ème éd., §10, Exer. 17).

Puisque K est compact, K est contenu dans la réunion d'un nombre fini de cartes locales de la variété X. Il existe donc un nombre fini de polydisques U_i (compacts) dont les intérieurs recouvrent K; si λ est un nombre réel < 1, et assez voisin de 1, les polydisques homothétiques $V_i = \lambda \cdot U_i$ sont tels que leurs intérieurs recouvrent encore K; nous noterons m le nombre des U_i, et nous désignerons par P_i le centre commun de V_i et de U_i (bien entendu, les notions de "polydisque homothétique," de "centre d'un polydisque," etc., sont relatives aux cartes locales choisies précédemment; elles n'ont pas de caractère intrinsèque). Soit $M = \bigcup_i U_i$; M est compact, et, puisque les intérieurs des V_i recouvrent K, un nombre fini de translatés des V_i recouvre M; il existe donc une partie finie H de G telle que $M \subset \bigcup_{i, g \in H} g \cdot V_i$. Dans toute la suite de l'exposé, K, les U_i, les V_i, les P_i, λ, m, H, seront fixés une fois pour toutes.

Soit maintenant D un diviseur de X, invariant par G, c'est-à-dire tel que $g \cdot D = D$ pour tout $g \in G$. D'après le Lemme 2 il existe des fonctions f_i, méromorphes sur U_i, telles que $D = (f_i)$ sur U_i. Pour tout couple d'indices i, j, et tout $g \in H$, considérons la fonction $k^g_{i,j}(x) = f_i(g\cdot x)/f_j(x)$, définie sur $U_j \cap g^{-1}\cdot U_i$. On a:

$$(k^g_{i,j}(x)) = (f_i(g\cdot x)) - (f_j(x)) = g^{-1}\cdot D - D = 0 \quad \text{sur} \quad U_j \cap g^{-1}\cdot U_i \ ,$$

ce qui signifie que $k^g_{i,j}$ est holomorphe inversible.

Posons:

$$b(f_i;\, D) = \sup_{i,j,g \in H} \ \sup_{x \in V_j \cap g^{-1}\cdot U_i} |k^g_{i,j}(x)| \ ,$$

où le premier sup ne porte que sur les triplets i, j, $g \in H$ tels que $V_j \cap g^{-1}\cdot U_i \neq \emptyset$.

Le nombre $b(f_i;\, D)$ dépend des f_i choisis. En conséquence, nous poserons:

$$b(D) = \inf_{f_i} b(f_i;\, D) \ ,$$

pour tous les systèmes f_i tels que $D = (f_i)$ sur U_i.

THEOREME 1. _Soit_ D _un diviseur invariant de_ X, _et soit_ $L(D)$ _l'espace vectoriel complexe des fonctions méromorphes_ h _sur_ X, _telles que_ $h(g\cdot x) = h(x)$ _pour tout_ $g \in G$ _et que_ $(h) \geq -D$. _Si_ $\ell(D)$ _désigne la dimension complexe de_ $L(D)$, _on a l'inégalité:_

$$\text{(I)} \qquad \ell(D) \leq A(\log\cdot b(D) + B)^n, \qquad n = \dim X,$$

_où_ A _et_ B _ne dépendent que de_ X _et_ G, _mais pas de_ D.

De façon précise, on peut prendre:

$$A = \frac{m}{(-\log\,\lambda)^n\cdot n!} \quad \text{et} \quad B = -\,n\cdot\log\,\lambda, \quad (0 < \lambda < 1)\ .$$

Démonstration. Choisissons des fonctions f_i telles que $D = (f_i)$ sur U_i. Il suffit évidemment de démontrer l'inégalité (I) avec $b(f_i;\, D)$ à la place de $b(D)$.

Soit $h \in L(D)$. Sur chaque U_i, on peut écrire $h = h_i/f_i$, et l'on a: $(h_i) = (h) + (f_i) = (h) + D \geq 0$, ce qui signifie que h_i est _holomorphe_ sur U_i.

Posons alors:

$$s_h = \sup_i \sup_{x \in V_i} |h_i(x)| \quad \text{et} \quad S_h = \sup_i \sup_{x \in U_i} |h_i(x)| \quad .$$

Nous allons maintenant démontrer que l'inégalité:

(II) $\ell(D) > m(p + n-1)^n/n!$,

où p est un entier, entraîne l'inégalité suivante:

(III) $p \leq \log \cdot b(f_i;\, D)/(-\log \lambda)$.

L'inégalité (I) résultera immédiatement de là, puisqu' on aura $\ell(D) \leq m\cdot(p + n-1)^n/n!$ avec $p = [\log\cdot b(f_i;\, D)/(-\log \lambda)] + 1$, d'où a fortiori:

$$\ell(D) \leq m\cdot(\log\cdot b(f_i;\, D)/(-\log \lambda) + n)^n/n! \quad ,$$

ce qui est bien équivalent à (I), avec les valeurs des constantes A et B indiquées dans le théorème 1.

Il nous reste donc à montrer que (II) entraîne (III). Si (II) est vérifiée, on a, a fortiori,

(IV) $\ell(D) > m\cdot\binom{p+n-1}{n}$.

Je dis qu'il existe alors une fonction $h \in L(D)$ telle que les fonctions h_i soient nulles aux points P_i, centres des polydisques V_i et U_i, ainsi que toutes leurs dérivées partielles d'ordre $< p$, et telle que h ne soit pas identiquement nulle. En effet, si l'on fait correspondre à $h \in L(D)$ la valeur en un point P_i d'une des dérivées partielles de h_i, on obtient ainsi une forme linéaire sur $L(D)$. Le nombre de ces formes linéaires étant égal à $m\cdot\binom{p+n-1}{n} < \ell(D)$, il existe un élément $h \neq 0$ dans $L(D)$ sur lequel toutes ces formes linéaires sont nulles.

En appliquant aux fonctions h_i associées à cette fonction h le Lemme 1, on obtient: $s_h \leq \lambda^p\cdot S_h$.

D'autre part, soit i un indice, et $x \in U_i$ tels que $|h_i(x)| = S_h$. Puisque $x \in M$, il existe $g \in H$ et $y \in V_j$ avec $g,\, y = x$. D'où:

$$h_i(x) = h(x)\cdot f_i(x) = h(g\cdot y)\cdot f_i(g\cdot y) = h(y)\cdot f_i(g\cdot y)$$
$$= h_j(y)\cdot f_j(y)^{-1}\cdot f_i(g\cdot y) = h_j(y)\cdot k^g_{i,j}(y) \qquad \text{avec} \quad y \in V_j \cap g^{-1}\cdot U_i .$$

D'où:

$$S_h = |h_i(x)| = |h_j(y)\cdot k^g_{i,j}(y)| \leq s_h\cdot b(f_i;\ D) ,$$

d'où, en comparant avec $s_h \leq \lambda^p\cdot S_h$ et en tenant compte de $s_h \neq 0$, l'inégalité $1 \leq \lambda^p\cdot b(f_i;\ D)$, visiblement équivalente à (III); la démonstration est donc achevée, compte tenu de ce qui a été dit plus haut.

§3. Application aux fonctions automorphes.

Nous aurons besoin du Lemme suivant:

LEMME 4. Soient D_1 et D_2 deux diviseurs invariants de X. On a l'inégalité: $b(D_1 + D_2) \leq b(D_1)\cdot b(D_2)$.

Soient f^1_i des fonctions méromorphes sur U_i telles que $D_1 = (f^1_i)$ sur U_i; soient f^2_i des fonctions analogues pour D_2; les fonctions $f_i = f^1_i\cdot f^2_i$ sont alors telles que $D_1 + D_2 = (f_i)$ sur U_i, et l'on vérifie tout de suite que l'on a:

$$b(f_i;\ D_1 + D_2) \leq b(f^1_i;\ D_1)\cdot b(f^2_i;\ D_2) .$$

Le lemme 4 résulte immédiatement de là.

THEOREME 2. Etant données n fonctions automorphes $h_1, \ldots, h_n$ sur X ($n = \dim X$), il existe un entier d jouissant de la propriété suivante:

Toute fonction automorphe h sur X vérifie une relation polynomiale non triviale $P(h, h_1, \ldots, h_n) = 0$ dont le degré en h est $\leq d$.

Soit Δ un diviseur positif de X, invariant par G, et tel que $(h_i) \geq -\Delta$ pour $1 \leq i \leq n$; un tel diviseur existe; il suffit de prendre la somme des diviseurs des pôles des h_i, diviseurs qui sont invariants puisque les h_i sont automorphes. Nous prendrons pour d un entier vérifiant:

$$d \geq A\cdot(n\cdot\log\cdot b(\Delta))^n . \tag{V}$$

Soit maintenant h une fonction automorphe arbitraire, et soit D un diviseur invariant tel que $(h) \geq - D$, $D \geqslant 0$. Considérons les monômes:

$$h^{\alpha}\cdot h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}, \quad \text{où} \quad \alpha \leq d, \quad \alpha_i \leq N,$$

où N est un entier ≥ 0.

Ces monômes sont en nombre égal à $(d+1)(N+1)^n$, et chacun d'eux a un diviseur $\geq - (d\cdot D + nN\cdot\Delta)$. D'après le Théorème 1 et le Lemme 4, on a:

$$\ell(d\cdot D + nN\cdot\Delta) \leq A\cdot(d\cdot\log\cdot b(D) + nN\cdot\log\cdot b(\Delta) + B)^n ,$$

quantité qui est $< (d+1)(N+1)^n$ pour N grand, vu l'inégalité (V). Les monômes $h^{\alpha}\cdot h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}$, $\alpha \leq d$, $\alpha_i \leq N$, ne sont donc pas linéairement indépendants, ce qui démontre le Théorème 2.

COROLLAIRE 1. <u>Le degré de transcendance du corps</u> E <u>des fonctions automorphes sur</u> X <u>est au plus égal à la dimension</u> n <u>de</u> X.

COROLLAIRE 2. <u>Si le degré de transcendance de</u> E <u>est égal à</u> n, E <u>est un corps de fonctions algébriques à</u> n <u>variables</u>.

En effet, soient $h_1, \ldots, h_n$ des éléments algébriquement indépendants de E; ils engendrent un sous-corps F de E qui est un corps de fractions rationnelles à n indéterminées. Le Théorème 2 montre que tout élément $h \in E$ est algébrique sur F, et de degré au plus d; choisissons un élément $h_0 \in E$ dont le degré sur F soit maximum, soit d_0. Je dis que $E = F(h_0)$, ce qui démontrera le Corollaire. Or, soit $h \in E$, et considérons l'extension $F(h, h_0)/F$; d'après le théorème de l'élément primitif (applicable parce que E est de caractéristique nulle), il existe $h' \in E$ tel que $F(h') = F(h, h_0)$; comme le degré de h' est $\leq d_0$, il s'ensuit que $F(h')$ est de degré 1 sur $F(h_0)$, d'où $F(h, h_0) = F(h') = F(h_0)$, ce qui signifie bien que $h \in F(h_0)$.

C.Q.F.D.

<u>Remarques</u>. 1. Par contre, si le degré de transcendance de E est $< n$, le Théorème 2 ne permet pas d'affirmer que E est un corps de fonctions algébriques, i.e. que E est engendré par un nombre fini de fonctions.

2. Le Théorème 2 et ses corollaires s'appliquent en particulier au cas où X est une variété analytique compacte et où G est réduit à l'identité. Dans ce cas le corps E n'est autre que le corps des fonctions méromorphes sur X.

3. Le Théorème 2 était connu lorsque X est un domaine d'holomorphie, cf. [2] et [4]. Dans le cas général, il a été annoncé sans démonstration par Chow.

§4. Application aux formes automorphes.

Soit maintenant $J_g(x)$ un facteur d'automorphie sur X, et posons:

$$c(J) = \sup_{g \in H} \sup_{x \in M} |J_g(x)| .$$

Soit D_m l'espace vectoriel des formes automorphes de poids m relativement à (J_g), et soit d_m la dimension de D_m. On a alors:

THEOREME 3. $d_m \leq A \cdot (m \cdot \log \cdot c(J) + B)^n$.

Il suffit de faire la démonstration lorsque $m = 1$, car $c(J^m) = c(J)^m$. Dans ce cas, ou bien $d_1 = 0$, et le Théorème 3 est démontré, ou bien il existe une forme automorphe ψ non identiquement nulle. Soit D le diviseur de ψ; on voit immédiatement que l'application $h \to h/\psi$ est un isomorphisme de D_1 sur $L(D)$, donc que $d_1 = \ell(D)$. Tout revient donc à montrer que $b(D) \leq c(J)$, à cause du Théorème 1. Or, soit $f_i = \psi$ sur tout U_i; on a bien $(f_i) = D$, et, si l'on calcule les fonctions $k^g_{i,j}$ correspondantes, on trouve:

$$k^g_{i,j}(x) = f_i(g \cdot x)/f_j(x) = J_g(x) ,$$

d'où évidemment $b(f_i;\, D) \leq c(J)$, et a fortiori $b(D) \leq c(J)$.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE. $d_m = O(m^n)$ lorsque $m \to +\infty$

(Ce Corollaire est dû à Hervé [3] dans le cas particulier où X est un domaine borné et où $J_g(x)$ est le jacobien de $x \to g \cdot x$).

§5. Complément

La démonstration du th. 1 s'applique à des cas sensiblement plus généraux (cf. [1]). En voici un:

Supposons G réduit à l'identité, donc X compacte, et soit Y un espace fibré analytique, à fibres vectorielles de dimension r. Soit $L(Y)$ l'espace vectoriel des sections holomorphes de Y, et soit $\ell(Y)$ la dimension de $L(Y)$.

D'après un théorème de H. Cartan (cf. Sém. 51-52, Exp. 17) le fibré Y est trivial au-dessus de chaque U_i et peut donc être défini par des matrices M_{ij}, holomorphes inversibles, sur $U_i \cap U_j$. Si M est une matrice carrée d'ordre r, nous noterons M le produit par r de la borne supérieure des valeurs absolues de ses coefficients. On peut donc définir un nombre $b(M_{ij}; Y) = \sup\limits_{i,j} \sup\limits_{V_j \cap U_i} |M_{ij}(x)|$. Soit $b(Y)$ la borne inférieure des $b(M_{ij}; Y)$ pour tous les systèmes de M_{ij} définissant Y. On a alors:

THEOREME 4. $\ell(Y) \leq r \cdot A \cdot (\log \cdot b(Y) + B)^n$.

Nous n'expliciterons pas la démonstration de ce théorème: elle est tout à fait semblable à celle du théorème 1. On remarque que, si $\ell(Y)$ était "trop grand," il existerait une section holomorphe non nulle de Y, nulle en chaque point P_i ainsi que ses dérivées partielles d'ordre "très élevé"; le lemme de Schwarz donne alors une contradiction si l'on a majoré les changements de cartes M_{ij}.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. BOCHNER, Algebraic and linear dependence of automorphic functions in several variables, J. Ind. Math. Soc., 16, 1952, p. 1-6.

[2] A. BOREL, Les fonctions automorphes de plusieurs variables complexes, Bull. Soc. Math. Fr., 80, 1952, p. 167-182.

[3] M. HERVÉ. Sur les fonctions automorphes de n variables complexes, C-R, 226, 1948, p. 462-464.

[4] C-L. SIEGEL. Analytic Functions of Several Complex Variables, Princeton, 1948-1949. Notes polycopiées.