A. Blanchard
H. Cartan

Généralités sur les fonctions automorphes ; cas d'un domaine borné

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 1, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A1_0>

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS AUTOMORPHES; CAS D'UN DOMAINE BORNÉ

(Exposés de A. Blanchard et H. Cartan,
16 et 23 novembre 1953,
révisés ultérieurement)

1. Fonctions multiplicativement automorphes; facteurs d'automorphie.

X désignera une variété analytique complexe de dimension n quelconque; on supposera X connexe. Soit G un groupe d'automorphismes (analytiques complexes) de X. Une fonction $\varphi(x)$ holomorphe (resp. méromorphe) dans X est dite multiplicativement automorphe pour le groupe G, s'il existe, pour chaque $g \in G$, une fonction holomorphe $J_g(x)$, partout $\neq 0$, telle que

$$\varphi(g\cdot x) = J_g(x)\varphi(x) \text{ pour tout } x \in X. \tag{1}$$

Si φ n'est pas identiquement nulle, la fonction $J_g(x)$ est unique. Dire que φ est multiplicativement automorphe revient alors à dire que le diviseur défini par φ est invariant par G. (Sur la notion de "diviseur," Voir l'Appendice.)

En calculant de deux manières $\varphi(gg'\cdot x)$ grâce à (1), on trouve

$$J_{gg'}(x) = J_g(g'\cdot x)J_{g'}(x) \ . \tag{2}$$

Cette relation exprime que l'application $g \to J_g$ de G dans le groupe multiplicatif Γ des fonctions holomorphes dans X et partout $\neq 0$, est un "homomorphisme croisé" (lorsqu'on fait opérer G dans Γ de la manière évidente). Une fonction $J_g(x)$ des variables $g \in G$ et $x \in X$ (holomorphe en x, et partout $\neq 0$) s'appelle un facteur d'automorphie.

Plus généralement, soit F un espace vectoriel complexe de dimension finie; on appelle facteur d'automorphie une fonction $\rho_g(x)$ qui, pour chaque $g \in G$, est une fonction holomorphe de $x \in X$ à valeurs dans le groupe

GL(F) des automorphismes (linéaires complexes) de F, et satisfait à

$$(3) \qquad \rho_{gg'}(x) = \rho_g(g'\cdot x)\circ\rho_{g'}(x).$$

Une fonction Φ holomorphe (resp. méromorphe) dans X, à valeurs dans F, est une <u>forme automorphe</u> (relativement au groupe G et au facteur d'automorphie ρ) si l'on a

$$(4) \qquad \Phi(g\cdot x) = \rho_g(x)\cdot\Phi(x) \quad \text{pour} \quad x \in X \quad \text{et} \quad g \in G .$$

Il est clair que, pour tout entier m, $(J_g(x))^{-m}$ et $(J_g(x))^{-m}\rho_g(x)$ sont des facteurs d'automorphie. Si $\varphi(x)$ est une fonction holomorphe (non identiquement nulle), multiplicativement automorphe pour $(J_g(x))^{-m}$, et si $\Phi(x)$ est une forme automorphe (holomorphe) pour $(J_g(x))^{-m}\rho_g(x)$, le quotient $\Phi(x)/\varphi(x)$ est évidemment une forme automorphe (méromorphe) pour le facteur d'automorphie $\rho_g(x)$.

<u>Définition</u>: Soit f une fonction holomorphe dans X, à valeurs dans F; on appelle <u>série de Poincaré</u> relative à f et au facteur d'automorphie ρ_g, la série

$$L(f;\ \rho) = \sum_{g\in G} \rho_g(x)^{-1}f(g\cdot x) ,$$

lorsque cette série <u>converge normalement sur tout compact</u> de X. S'il en est ainsi, la somme de cette série est une fonction $\Phi(x)$ holomorphe dans X, qui satisfait à (4) (autrement dit, c'est une forme automorphe).

<u>Proposition</u> 1. <u>Soit</u> $\Phi = L(f;\ \rho)$ <u>une série de Poincaré pour le facteur d'automorphie</u> ρ_g; <u>si</u> φ <u>est une fonction multiplicativement automorphe pour</u> $(J_g(x))^{-m}$, <u>le produit</u> $\varphi(x)\Phi(x)$ <u>est une série de Poincaré pour le facteur d'automorphie</u> $(J_g(x))^{-m}\rho_g(x)$.

<u>Démonstration</u>: $\varphi(x)\Phi(x)$ est la somme de la série (qui converge normalement sur tout compact de X)

$$\sum_{g\in G} \varphi(x)\rho_g(x)^{-1}f(g\cdot x),$$

dont le terme général est aussi égal à $(J_g(x))^m\rho_g(x)^{-1}\varphi(g\cdot x)f(g\cdot x)$.

Donc $\varphi(x)\Phi(x)$ est la somme de la série de Poincaré relative à la fonction $\varphi(x)f(x)$ et au facteur d'automorphie $(J_g(x))^{-m}\rho_g(x)$.

Un cas simple où l'on peut affirmer que la série $L(f;\rho)$ converge normalement sur tout compact est le suivant: la série $\Sigma_{g\in G}\ \rho_g(x)^{-1}$ converge normalement sur tout compact, et la fonction $f(x)$ est <u>bornée</u> dans X tout entier.

2. <u>Groupes discrets d'automorphismes d'un domaine borné</u>.

On suppose désormais que X est un ouvert connexe, borné, de l'espace numérique complexe $\mathbf{C}^n$. Soit E le groupe de tous les automorphismes analytiques de X. Si on munit X de la structure uniforme induite par la métrique de $\mathbf{C}^n$, l'ensemble E est "uniformément équicontinu" sur chaque compact $A \subset X$ (cf. BOURBAKI, Top. Génér., Chap. X).

Munissons E de la topologie de la convergence compacte (<u>ibid</u>.); à cause de l'équicontinuité, elle coïncide avec la topologie de la convergence simple.

<u>Proposition</u> 2. Soient K et K' deux compacts contenus dans X. L'ensemble $E_{K,K'}$ des automorphismes analytiques f de X tels que $f(K)$ rencontre K' est <u>compact</u>. En particulier, le <u>groupe d'isotropie</u> de a (sous-groupe des $f \in E$ tels que $f(a) = a$) est <u>compact</u>.

<u>Démonstration</u>: soit Φ un ultrafiltre sur $E_{K,K'}$. On a

$$\lim_{\Phi} f = f_0, \qquad \lim_{\Phi} f^{-1} = f'_0 \quad ,$$

où f_0 et f'_0 désignent des applications analytiques de X dans $\mathbf{C}^n$, et il existe en outre $a \in K$ et $a' \in K'$ tels que $f_0(a) = a'$, $f'_0(a') = a$. Ainsi l'application composée $f'_0 \circ f_0$ est définie au voisinage de a et se réduit à l'identité dans ce voisinage; de même, $f_0 \circ f'_0$ est définie dans un voisinage de a' où elle se réduit à l'identité.

Si on prouve que f_0 et f'_0 appliquent X dans X (et non seulement dans $\mathbf{C}^n$), il s'ensuivra que les applications $f_0 \circ f'_0$ et $f'_0 \circ f_0$ sont définies dans tout X et égales à la transformation identique (puisque X

est connexe). Donc f_0 et f'_0 seront des automorphismes analytiques de X, réciproques l'un de l'autre; et l'ultrafiltre Φ converge vers $f_0 \in E_{K,K'}$. On aura donc prouvé la compacité de $E_{K,K'}$.

Il reste ainsi à montrer que, pour tout point $b \in X$, on a $f_0(b) \in X$ et $f'_0(b) \in X$. Faisons par exemple la démonstration pour f_0. Notons (h, f) un couple d'éléments de E; suivant le filtre produit $\Phi \times \Phi$ sur $E \times E$, $h^{-1}f$ a une adhérence non vide dans l'ensemble des applications analytiques de X dans $\mathbf{C}^n$; or au voisinage de a, $\Phi \times \Phi$ converge vers l'identité, donc $h^{-1}f$ converge vers l'identité dans tout X. Soient alors $b \in X$, et B un voisinage compact de b dans X. Puisque $\lim h^{-1}f$ est l'identité, on peut choisir h (fixe) de manière que $h^{-1}f(b) \in B$ pour tout f d'un certain ensemble $F \in \Phi$. Alors

$$f(b) = h(h^{-1}f(b)) \in h(B) ,$$

donc $f(b)$ reste dans un compact fixe contenu dans X, et par suite

$$f_0(b) = \lim_{\Phi} f(b) \in h(B) \subset X.$$

Ceci achève la démonstration.

<u>Corollaire de la Prop. 2</u>. E est <u>localement</u> <u>compact</u> pour la topologie de la convergence compacte.

<u>Proposition</u> 3. Soit G un groupe <u>discret</u> d'automorphismes analytiques d'un domaine borné $X \subset \mathbf{C}^n$. Quels que soient les compacts K et K' contenus dans X, le nombre $\ell(K, K'; G)$ des $g \in G$ tels que $g(K)$ rencontre K' est <u>fini</u>. Réciproquement s'il existe un point $a \in X$ tel que, pour tout compact $A \subset X$, le nombre $\ell(a, A; G)$ soit fini, G est discret.

<u>Démonstration</u>: l'ensemble des $g \in G$ tels que $g(K)$ rencontre K' est compact (Prop. 2), et discret si G est discret; il est donc fini. Réciproquement, soit $a \in X$ tel que la famille des $g(a)$ (ou g parcourt un groupe d'automorphismes analytiques G) n'ait pas de point d'accumulation dans X; alors G est évidemment discret pour la topologie de la convergence simple.

<u>Corollaire de la Proposition 3</u>. Soit G un groupe discret d'automorphismes analytiques d'un domaine borné X. Pour tout compact $K \subset X$, et pour tout point $a \in X$, il existe au plus $\ell(K, K; G)$ éléments $g_i \in G$ tels que $a \in g_i(K)$.

3. <u>Séries de Poincaré pour un groupe discret d'automorphismes d'un domaine borné</u>.

Soit X un domaine borné, et soit G un groupe discret d'automorphismes analytiques de X. On fixe désormais son attention sur le facteur d'automorphie suivant: $J_g(x)$ est le jacobien (au sens complexe) de la transformation $x \to g \cdot x$, ce jacobien étant pris au point x; bien entendu, le jacobien est calculé avec les coordonnées complexes de l'espace ambiant C^n. Il est immédiat que la condition (2) est satisfaite.

On appelle <u>forme automorphe de poids</u> m (m entier) toute forme automorphe relativement au facteur d'automorphie $J_g(x)^{-m}$, $J_g(x)$ désignant toujours le jacobien défini ci-dessus.

Soit $f(x)$ une fonction méromorphe (resp. holomorphe) dans X. Pour que la forme différentielle $f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ soit <u>invariante</u> par le groupe G, il faut et il suffit que f soit une <u>forme de poids un</u>.

<u>Proposition 4. Si l'entier</u> m <u>est</u> ≥ 2, <u>la série</u>

$$\sum_{g \in G} |J_g(x)|^m$$

<u>converge normalement sur tout compact de</u> X.

<u>Démonstration</u>: il suffit évidemment de prouver la proposition pour $m = 2$. Soit K un compact de X, et soit $M_g = \sup_{x \in K} |J_g(x)|^2$. On veut montrer que $\Sigma_{g \in G} M_g < +\infty$. Introduisons, dans C^n, la <u>distance</u> que voici: la distance des points $x = (x_i)$ et $x' = (x'_i)$ est $\sup_i |x_i - x'_i|$. Soit alors $2r > 0$ la distance de K à la frontière de X, et soit K' le sous-ensemble (compact) des points de X dont la distance à K est $\leq r$. Soit V_g le volume euclidien du transformé $g(K')$, pour $g \in G$. Soit ℓ l'entier $\ell(K', K'; G)$ (cf. corol. de la Prop. 3). La somme $\Sigma_g V_g$ est

finie, puisqu'elle est au plus égale à ℓ fois le volume de X. Soit $a \in K$; intégrons $J_g(x)\overline{J_g(x)}$ par rapport à l'élément de volume

$$(-2i)^{-n} dx_1 \wedge d\overline{x_1} \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge d\overline{x_n}$$

dans le polydisque $B_r(a)$ défini par $|x_i - a_i| \leq r$. On obtient le volume du transformé $g(B_r(a))$, qui est au plus égal à V_g; mais l'intégrale peut aussi être calculée en utilisant le développement de Taylor de $J_g(x)$, ce qui donne un nombre au moins égal à $|J_g(a)|^2$ fois le volume de $B_r(a)$. Ainsi on a

$$(\pi r^2)^n |J_g(a)|^2 \leq V_g$$

pour tout $a \in K$, d'où $M_g \leq V_g(\pi r^2)^{-n}$. En sommant par rapport à $g \in G$, on voit que $\Sigma_g M_g$ est fini, ce qui prouve le lemme.

Soit, pour chaque entier $m \geq 2$, $P(m)$ l'espace vectoriel (complexe) des séries de Poincaré

$$L(h;\, m) = \sum_{g \in G} (J_g(x))^m \, h(g\cdot x) \ ,$$

où h parcourt l'espace vectoriel des polynômes. Les éléments de $P(m)$ sont des formes automorphes (holomorphes) de poids m. On se propose de chercher s'il existe dans l'espace vectoriel $P(m)$ une fonction admettant, en certains points donnés en nombre fini, des développements limités donnés à l'avance. On donnera plus loin (théorème 5) une réponse précise à cette question, comme conséquence de l'étude que l'on va développer maintenant.

4. Théorèmes d'existence

Dans ce numéro, on suppose que X est un domaine borné de l'espace $\mathbf{C}^n$, que G est un groupe discret d'automorphismes analytiques de X, et que $J_g(x)$ et $\rho_g(x)$ sont des facteurs d'automorphie comme au n°1 (J_g est à valeurs scalaires, ρ_g est à valeurs dans $GL(F)$, F désignant un espace vectoriel de dimension finie). On suppose qu'il existe un entier $m_0 > 0$ tel que les deux séries

$$\sum_{g \in G} (J_g(x))^{m_0} \quad \text{et} \quad \sum_{g \in G} (J_g(x))^{m_0} \rho_g(x)^{-1}$$

convergent normalement sur tout compact de X.

Pour chaque point $a \in X$, notons A_a l'anneau des germes de fonctions holomorphes (scalaires) au point a, et $A_a(F)$ l'espace vectoriel des germes de fonctions holomorphes à valeurs dans F. Pour tout entier $p \geq 0$, soit I_a^p l'idéal de A_a (resp. $I_a^p(F)$ le sous-espace vectoriel de $A_a(F)$) formé des germes de fonctions qui s'annulent au point a ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq p$. Soit D_a^p l'anneau-quotient A_a/I_a^p, et soit $D_a^p(F)$ l'espace vectoriel quotient $A_a(F)/I_a^p(F)$, qui est un module sur l'anneau D_a^p. Pour chaque h holomorphe au voisinage de a et à valeurs scalaires, on notera $\delta_a^p(h)$ l'image canonique de h dans D_a^p; de même, si f est holomorphe à valeurs dans F, on notera $\delta_a^p(f)$ l'image canonique de f dans $D_a^p(F)$. L'élément $\delta_a^p(f)$ s'appelle le <u>développement limité d'ordre</u> p de la fonction f au point a; il s'identifie à un polynôme de degré p en $x - a$.

Soit $G(a)$ le groupe d'isotropie du point a; il est fini puisque G est discret. Soit $k(a)$ le plus petit entier $k \geq 1$ tel que l'on ait

$$(J_g(a))^k = 1 \text{ pour tout } g \in G(a);$$

c'est un diviseur de l'ordre du groupe $G(a)$.

Introduisons encore les notations suivantes. Les facteurs d'automorphie $\rho_g(x)$ et $J_g(x)$ étant supposés donnés une fois pour toutes, on notera Δ_a^p le sous-espace de $D_a^p(F)$ formé des germes de fonctions Φ qui satisfont à la relation (4) <u>modulo</u> $I_a^p(F)$, quel que soit $g \in G(a)$. De même, pour chaque entier m, on notera $\Delta_a^p(m)$ le sous-espace de $D_a^p(F)$ formé des germes de fonctions Φ qui, pour tout $g \in G(a)$, satisfont à

$$\Phi(g\cdot x) = (J_g(x))^{-m} \rho_g(x)\cdot \Phi(x) \quad \underline{\text{modulo}} \quad I_a^p(F). \tag{5}$$

It est clair que si Φ est une forme automorphe relativement au facteur d'automorphie ρ_g, et si de plus Φ est holomorphe au point a, alors $\delta_a^p(\Phi)$ appartient à Δ_a^p; de même, si Φ est une forme automorphe relativement au facteur d'automorphie $(J_g(x))^{-m}\rho_g(x)$, et si Φ est holomorphe en a, alors $\delta_a^p(\Phi)$ appartient à $\Delta_a^p(m)$.

Dans tout ce qui suit, on se donne un ensemble fini de points $a_i \in X$, tel que, pour $i \neq j$, a_i et a_j ne soient pas congrus suivant G. On se donne aussi un entier $p \geq 0$ une fois pour toutes. Et on note k le p.p.c.m. des entiers $k(a_i)$.

Lemme 1. Soit h une fonction holomorphe (scalaire) bornée dans X, telle que:

$$\begin{cases} h(a_i) = 1 \text{ pour tout } a_i; \\ h(c) = 0 \text{ pour tout point } c, \text{ distinct des } a_i, \\ \qquad \text{tel qu'il existe un } g \in G \text{ et un } a_i \\ \qquad \text{satisfaisant à } g(a_i) = c, \ |J_g(a_i)| \geq 1. \end{cases}$$

(Comme ces points c sont en nombre fini, il existe une telle h; on peut d'ailleurs astreindre h à être un polynôme.) Alors, pour tout entier $m > 0$ assez grand, et multiple de k, la fonction holomorphe $L(h; m)$, somme de la série de Poincaré

$$\sum_{g \in G} (J_g(x))^m \, h(g \cdot x) \ ,$$

est différente de 0 en chacun des points a_i.

Démonstration: soit Ψ_m cette fonction $L(h; m)$. On a

$$\Psi_m(a_i) = \sum_{g \in G(a_i)} (J_g(a_i))^m h(g \cdot a_i) + \sum (J_g(a_i))^m h(g \cdot a_i) \ ,$$

la seconde somme étant étendue aux $g \in G$ tels que $|J_g(a_i)| < 1$. La première somme est égale à l'ordre du groupe $G(a_i)$, donc est $\neq 0$, tandis que la seconde somme tend vers zéro lorsque m (multiple de k) augmente indéfiniment.

C.Q.F.D.

Lemme 2. Pour tout nombre u tel que $0 < u < 1$, il existe une partie finie $H \subset G$ et, pour chaque point a_i, un voisinage V_i de a_i, jouissant de la propriété suivante: pour $x \in V_i$ et $g \notin H$, on a $|J_g(x)| \leq u$.

Cela résulte aussitôt du fait que la série $\Sigma_{g \in G} (J_g(x))^{m_0}$ converge normalement au voisinage de chacun des points a_i.

Théorème 1. Soit h une fonction holomorphe (scalaire) bornée dans X, telle que:

$$\delta_{a_i}^{p}(h) = 1 \text{ pour tout point } a_i ;$$

$$\delta_{c}^{p}(h) = 0 \text{ pour tout point } c \text{ distinct des } a_i \text{ et de la}$$

forme $g \cdot a_i$ avec un $g \in H$. Soient donnés d'autre part, pour chaque a_i, un élément $\alpha_i \in \Delta_{a_i}^{p}$, et soit f une fonction holomorphe et bornée dans X (à valeurs dans F), telle que

$$\delta_{a_i}^{p}(f) = \alpha_i , \qquad \delta_{c}^{p}(f) = 0$$

pour les points c définis ci-dessus. Alors, pour chaque point a_i, on a

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ m \equiv 0(k)}} \delta_{a_i}^{p} \left(\frac{L(f;\, \rho,\, m)}{L(h;\, m)} \right) = \alpha_i , \tag{6}$$

où $L(f;\, \rho,\, m)$ désigne la somme de la série de Poincaré

$$L(f;\, \rho,\, m) = \sum_{g \in G} (J_g(x))^m \, \rho_g(x)^{-1} \cdot f(g \cdot x)$$

(qui est normalement convergente sur tout compact, pourvu que l'entier m soit $\geq m_0$).

Démonstration: observons d'abord qu'il existe toujours des polynômes h et f satisfaisant aux conditions de l'énoncé. D'autre part le premier membre de (6) a un sens, puisque $L(h;\, m)$ est $\neq 0$ aux points a_i d'après le lemme 1. Considérons maintenant un point a_i bien déterminé, et posons

$$L'(f;\, \rho,\, m) = \sum_{g \in G(a_i)} (J_g(x))^m \, \rho_g(x)^{-1} \cdot f(g \cdot x) ,$$

$$L'(h;\, m) = \sum_{g \in G(a_i)} (J_g(x))^m \, h(g \cdot x) ,$$

$$L''(f;\, \rho,\, m) = \sum_{g \notin H} (J_g(x))^m \, \rho_g(x)^{-1} \cdot f(g \cdot x) ,$$

$$L''(h;\, m) \;=\; \sum_{g \notin H} (J_g(x))^m\, h(g\cdot x) \quad .$$

Puisque $\delta_c^{\,p}(f) = 0$ et $\delta_c^{\,p}(h) = 0$ pour les points c définis dans l'énoncé, on a

$$\delta_{a_i}^{\,p}\, L(f;\, \rho,\, m) = \delta_{a_i}^{\,p}\, L'(f;\, \rho,\, m) + \delta_{a_i}^{\,p}\, L''(f;\, \rho,\, m)$$

$$\delta_{a_i}^{\,p}\, L(h;\, m) \;=\; \delta_{a_i}^{\,p}\, L'(h;\, m) + \delta_{a_i}^{\,p}\, L''(h;\, m) \quad .$$

De plus

$$\delta_{a_i}^{\,p}\, L'(f;\, \rho,\, m) \;=\; \sum_{g\,\in\, G(a_i)} (\delta_{a_i}^{\,p}\, J_g(x))^m \alpha_i = (\delta_{a_i}^{\,p}\, L'(h;\, m))\alpha_i \;,$$

puisque, par hypothèse, α_i appartient à $\Delta_{a_i}^{\,p}$. D'autre part on a

$$\delta_{a_i}^{\,p}\, J_g(x) \;=\; \varepsilon_g + P_g(x - a_i) \quad \text{pour} \quad g \in G(a_i) \;,$$

où ε_g est une constante, racine $k(a_i)$-ième de l'unité, et P_g est un polynôme de degré p sans terme constant. Puisque m est un multiple de $k(a_i)$, on a

$$(\delta_{a_i}^{\,p}\, J_g(x))^m = (1 + Q_g(x - a_i))^m \quad \text{pour} \quad g \in G(a_i),$$

où Q_g désigne un polynôme de degré p sans terme constant.

On a donc

$$(7) \quad \delta_{a_i}^{\,p}\, \frac{L(f;\, \rho,\, m)}{L(h;\, m)} - \alpha_i = \delta_{a_i}^{\,p}\Big(\frac{1}{L(h;\, m)}\Big)\cdot\Big[\delta_{a_i}^{\,p}\, L''(f;\, \rho,\, m) - (\delta_{a_i}^{\,p} L''(h;\, m))\alpha_i\Big]$$

et pour prouver (6) il suffit de montrer que le second membre de (7) tend vers 0 quand $m \to +\infty$ (en restant multiple de k).

Quand x est dans le voisinage V_i de a_i, on a $|J_g(x)| \leq u$ pour $g \notin H$, donc la fonction holomorphe $L''(f;\, \rho,\, m)$ est, dans V_i, majorée par

$$u^{m-m_0} \sum_{g \notin H} |(J_g(x))^{m_0}\, \rho_g(x)^{-1}\cdot f(g\cdot x)| \leq M\cdot u^m \;,$$

où la constante M ne dépend pas de m. Résultat analogue pour la fonction

$L''(h;\, m)$. En appliquant les inégalités de Cauchy aux développements limités de ces fonctions, on voit que $\delta_{a_i}^{p} L''(f;\, \rho,\, m)$ et $\delta_{a_i}^{p} L''(h;\, m)\alpha_i$, considérés comme polynômes-fonctions en $x - a_i$, sont, dans un voisinage fixe de a_i, majorés par $N\cdot u^m$, où N est indépendant de m.

Dans le second membre de (7), il reste à majorer $\delta_{a_i}^{p}\left(\frac{1}{L(h;\, m)}\right)$, qui est un polynôme en $x - a_i$. On a d'abord

$$\delta_{a_i}^{p} L(h;\, m) = \sum_{g\,\in G(a_i)} (1 + Q_g)^m + \delta_{a_i}^{p} L''(h;\, m) = R_0 + R_1 + \cdots + R_p,$$

où chaque R_j est un polynôme homogène de degré j en $x - a_i$, qui dépend de m. Quand m tend vers $+\infty$, R_0 tend vers l'ordre du groupe $G(a_i)$, et on a, pour $1 \leq j \leq p$:

$$|R_j| \leq K\cdot m^j \text{ au voisinage de } a_i \text{ (où } K \text{ désigne un nombre fixe).}$$

En calculant l'inverse de $\delta_{a_i}^{p} L(h;\, m)$ dans l'anneau $D_{a_i}^{p}$, on trouve

$$\delta_{a_i}^{p}\left(\frac{1}{L(h;\, m)}\right) = \frac{1}{R_0}(1 + S_1 + \cdots + S_p) ,$$

où chaque S_j (pour $1 \leq j \leq p$) est un polynôme homogène de degré j, majoré dans un voisinage fixe de a_i par $K_1\cdot m^j$ (où la constante K_1 est indépendante de m). Finalement le second membre de (7) est majoré par

$$N_1\cdot m^p\, u^m ,$$

où la constante N_1 est indépendante de m. Ceci établit la relation (6), et le théorème 1 est enfin démontré.

<u>Conséquence du théorème 1</u>: prenons des systèmes (α_i) en nombre fini, formant une base de l'espace vectoriel $\Pi_i\, \Delta_{a_i}^{p}$. Pour chaque élément (α_i^{t}) de cette base, choisissons un polynôme f^t comme il est dit dans le théorème 1. Alors, pour chaque i et chaque t, on a

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ m \equiv 0(k)}} \delta_{a_i}^{p} \frac{L(f^t;\, \rho,\, m)}{L(h;\, m)} = \alpha_i^{t} .$$

Donc, pour tout multiple m assez grand de k, l'application

$$f \to \left(\delta_{a_i}^p \frac{L(f;\ \rho,\ m)}{L(h;\ m)}\right)$$

applique les f^t sur une base de l'espace vectoriel $\Pi_i \Delta_{a_i}^p$. Ainsi:

<u>Théorème 2</u>. <u>Les points a_i et l'entier p étant donnés comme ci-dessus, soit h une fonction holomorphe comme dans le théorème 1. Il existe un entier $m(p, a_i)$ jouissant de la propriété suivante: pour tout entier m multiple de k et $\geq m(p, a_i)$, et pour tout système d'éléments $\alpha_i \in \Delta_{a_i}^p$, il existe un polynôme f tel que</u>

$$\delta_{a_i}^p \frac{L(f;\ \rho,\ m)}{L(h;\ m)} = \alpha_i \quad \text{pour tout } i. \tag{8}$$

En particulier, il existe une forme automorphe (méromorphe) relativement au facteur d'automorphie ρ, qui soit <u>holomorphe en chacun des points</u> a_i et qui admette en chacun d'eux un développement limité d'ordre p, arbitrairement choisi dans $\Delta_{a_i}^p$.

<u>Théorème 3</u>. <u>Les points a_i et l'entier p étant donnés comme ci-dessus, soit m un multiple des entiers $k(a_i)$ qui soit $\geq m(p, a_i)$. Alors, pour tout système d'éléments $\beta_i \in \Delta_{a_i}^p(m)$, il existe un polynôme f tel que</u>

$$\delta_{a_i}^p L(f;\ \rho,\ m) = \beta_i \quad \text{pour tout } i. \tag{9}$$

En effet, posons $\alpha_i = \beta_i/\delta_i$, avec $\delta_i = \delta_{a_i}^p L(h;\ m)$. On a $\alpha_i \in \Delta_{a_i}^p$. D'après le théorème 2, il existe un polynôme f satisfaisant à (8); il satisfait évidemment à (9).

5. <u>Application au cas étudié au n° 3</u>.

Nous supposons ici que $J_g(x)$ est le jacobien de la transformation analytique-complexe $x \to g\cdot x$. Appliquons le théorème 2, en prenant pour $\rho_g(x)$ le facteur d'automorphie $(J_g(x))^{-q}$, q étant un entier quelconque (non nécessairement positif). On obtient:

Théorème 4. Soient donnés des points $a_i \in X$ en nombre fini, tels que, pour $i \neq j$, a_i et a_j ne soient pas congrus suivant G. Soit p un entier ≥ 0, et soit q un entier quelconque. Notons $\Delta_{a_i}^p(q)$ le sous-espace de $D_{a_i}^p$ formé des germes de fonctions Φ qui satisfont à

$$\Phi(g \cdot x) = (J_g(x))^{-q}\, \Phi(x) \quad \text{modulo } I_{a_i}^p \text{, pour tout } g \in G(a_i) \ . \tag{10}$$

Alors, pour tout système d'éléments $\alpha_i \in \Delta_{a_i}^p(q)$, il existe deux séries de Poincaré, formées avec des polynômes, telles que leur quotient soit une forme automorphe φ de poids q, holomorphe en chacun des points a_i, et admettant en chaque a_i un développement limité $\delta_{a_i}^p(\varphi)$ égal à α_i.

Appliquons maintenant le théorème 3, en prenant pour $\rho_g(x)$ la constante 1. On obtient:

Théorème 5. Soient donnés des points $a_i \in X$ en nombre fini, tels que, pour $i \neq j$, a_i et a_j ne soient pas congrus suivant G; et soit p un entier ≥ 0. Il existe alors un entier $m(p, a_i)$ jouissant de la propriete suivante: pour tout entier $m \geq m(p, a_i)$ et multiple des entiers $k(a_i)$, et pour tout système d'éléments $a_i \in \Delta_{a_i}^p(m)$ (où $\Delta_{a_i}^p(m)$ désigne le sous-anneau de $D_{a_i}^p$ formé des germes de fonctions Φ satisfaisant à

$$\Phi(g \cdot x) = (J_g(x))^{-m}\, \Phi(x) \quad \text{modulo } I_{a_i}^p \text{, pour tout } g \in G(a_i)) \ ,$$

il existe un polynôme f tel que la somme φ de la série de Poincaré $L(f; m)$ *admette en chacun des points a_i un développement limité $\delta_{a_i}^p(\varphi)$ égal à α_i.*

BIBLIOGRAPHIE

A. BOREL, Bull. Soc. Math. de France, 80 (1952) p. 167-182: c'est un exposé d'ensemble de la question des fonctions automorphes.

M. HERVÉ, Annales Ecole Norm. Sup., 69 (1952) p. 277-302.

C. L. SIEGEL, Analytic functions of several complex variables (Cours miméographié rédigé par P. T. Bateman, Princeton, 1948-49).

La version revisée de cet Exposé 1 a d'autre part tenu compte de: H. CARTAN, Journal d'Analyse Math., vol. VI (1958) p. 169-175.

APPENDICE: Sur la notion de diviseur

Soit X une variété analytique complexe (de dimension n). En chaque point $x \in X$, soit $\mathfrak{M}_x$ le groupe multiplicatif des germes de fonctions méromorphes (non identiquement nulles) au point x, et soit $\mathfrak{F}_x$ le sous-groupe des germes de fonctions holomorphes $\neq 0$. Le groupe-quotient $\mathfrak{M}_x / \mathfrak{F}_x = \mathfrak{D}_x$ est le groupe (abélien) des germes de diviseurs au point x. On peut interpréter $\mathfrak{D}_x$ comme suit: soit $\mathcal{O}_x$ l'anneau d'intégrité, formé des germes de fonctions holomorphes au point x; $\mathfrak{M}_x$ est le corps des fractions de cet anneau, et $\mathfrak{D}_x$ s'identifie au groupe multiplicatif des idéaux principaux (entiers ou fractionnaires, mais $\neq (0)$) de $\mathfrak{M}_x$.

On sait que l'anneau $\mathcal{O}_x$ est factoriel (cf. Sém. 1951-52, 11, th. 1). Donc tout élément de $\mathfrak{D}_x$, s'il est distinct de l'élément neutre, s'écrit d'une seule manière comme un produit $d_1^{\lambda_1} \cdots d_k^{\lambda_k}$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont des entiers > 0 ou < 0, et où $d_1, \ldots, d_k$ sont les diviseurs définis par des idéaux premiers principaux de l'anneau $\mathcal{O}_x$. D'autre part, tout idéal principal et premier est caractérisé par le germe d'ensemble où s'annule un germe de fonction holomorphe f tel que l'idéal principal (f) soit l'idéal premier considéré.

Un diviseur (au sens global) sur X consiste dans la donnée, en chaque point $x \in X$, d'un germe de diviseur $D_x \in \mathfrak{D}_x$, pourvu que cette collection de germes satisfasse à la condition de cohérence suivante: tout point de X appartient à un ouvert U dans lequel existe une fonction méromorphe f telle que, pour tout $x \in U$, D_x soit le germe de diviseur défini par f. La variété du diviseur est l'ensemble V (qui en général n'est pas une vraie variété) des points x où D_x est $\neq$ de l'élément neutre du groupe $\mathfrak{D}_x$; V est évidemment fermé. Si $x \in V$, D_x est défini par un germe g_1/g_2, où g_1 et g_2 sont holomorphes et premières entre elles au point x, —donc aussi aux points voisins. Par suite, les points de V voisins de x sont ceux où $g_1 g_2 = 0$. Ainsi V est une "sous-variété analytique principale." On sait (Sém. 1951-52, Exp. 12) que V est, d'une seule manière, réunion d'une famille "localement finie" de sous-variétés principales V_i irréductibles dans X ("localement finie" signifie que tout compact de X ne rencontre qu'un nombre fini de V_i). En un point $x \in V_i$, le germe défini par V_i n'est pas nécessairement celui d'un idéal premier, mais les divers facteurs premiers de l'idéal ont le même exposant λ, et cet exposant est le même en tous les points de V_i. On l'appelle l'ordre de multiplicité (> 0 ou < 0) de V_i dans le diviseur D.

Ainsi un diviseur D peut être défini par la donnée d'une famille localement finie (éventuellement vide) de sous-variétés principales V_i, irréductibles dans X, et dont chacune est affectée d'un coefficient entier, ≥ 0 ou < 0. Si X est compact, le groupe $\mathfrak{D}$ de tous les diviseurs sur X est le groupe abélien libre ayant pour base l'ensemble des sous-variétés principales irréductibles dans X. Aussi emploie-t-on souvent la notation additive pour le groupe $\mathfrak{D}$; un diviseur s'écrit alors $\Sigma_i \lambda_i V_i$, les coefficients λ_i étant entiers. L'élément neutre s'appelle alors le diviseur nul; un diviseur $\Sigma_i \lambda_i V_i$ est dit positif si les λ_i sont ≥ 0.