H. Cartan

Un théorème de finitude

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. nº 17, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A17_0>

UN THÉORÈME DE FINITUDE

(Exposé de H. Cartan, 3-5-1954)

Théorème (cf. [1]). *Soit X une variété analytique complexe, compacte. Soit F un faisceau analytique cohérent sur X. Alors les espaces de cohomologie* $H^n(X, F)$ (n entier ≥ 0) *sont de dimension finie (comme espaces vectoriels sur le corps complexe* $\mathbf{C}$).

Rappelons qu'un faisceau analytique F est cohérent si, sur tout ouvert U assez petit, F est isomorphe (comme faisceau analytique) au conoyau d'un homomorphisme analytique de faisceaux: $\mathcal{O}^r \to \mathcal{O}^p$ (on note $\mathcal{O}^p$ le faisceau des systèmes de p germes de fonctions holomorphes). En particulier, tout faisceau qui est localement isomorphe à $\mathcal{O}^p$ est cohérent. On notera que si F est localement isomorphe à $\mathcal{O}^p$, F définit un espace fibré analytique, de base X, de fibre un espace vectoriel de dimension p, tel que F s'identifie au faisceau des germes de sections analytiques de cet espace.

Dans le cas p = 1 (faisceau localement isomorphe à $\mathcal{O}$), il existe du théorème ci-dessus une démonstration de K. KODAIRA [2]: utilisant un théorème de Dolbeault, Kodaira se ramène à une généralisation de la théorie des formes harmoniques sur une variété compacte.

§1. Cohomologie d'un espace topologique à coefficients dans un faisceau

(cf. par exemple Sém. 1950-51, Exposé 16 ; et H. CARTAN, Colloque de Bruxelles 1953).

Voici un bref rappel des notions qu'on va utiliser. Soit X un espace topologique, paracompact; à chaque faisceau F de groupes abéliens sont attachés des groupes de cohomologie $H^n(X, F)$, nuls pour $n < 0$; ce sont des foncteurs covariants de F (i.e.: pour tout homomorphisme de faisceaux $F' \to F$, on a des homomorphismes $H^n(X, F') \to H^n(X, F)$: si $F'' \to F$

est composé de $F'' \to F'$ et de $F' \to F$, l'homomorphisme associé $H^n(X, F'') \to H^n(X, F)$ est composé des homomorphismes associés; enfin, si $F \to F$ est l'application identique, alors $H^n(X, F) \to H^n(X, F)$ est l'application identique). De plus, à toute suite exacte de faisceaux $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ sont associés des homomorphismes $H^n(X, F'') \to H^{n+1}(X, F')$, qui sont "naturels" par rapport aux homomorphismes d'une suite exacte dans une autre.

Ces données satisfont aux conditions suivantes (qui caractérisent les groupes de cohomologie à un isomorphisme près);

(a) $H^0(X, F)$ est le groupe $\Gamma(X, F)$ des sections de F au-dessus de X.

(b) pour toute suite exacte $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$, la suite

$$0 \to H^0(X, F') \to H^0(X, F) \to H^0(X, F'') \to H^1(X, F') \to H^1(X, F) \to \cdots$$
$$\to H^n(X, F'') \to H^{n+1}(X, F') \to H^{n+1}(X, F) \to \cdots$$

est exacte.

(c) si F est un faisceau fin, on a $H^q(X, F) = 0$ pour $q \geq 1$.

Rappelons la définition d'un faisceau fin; c'est un F tel que, pour tout recouvrement ouvert (U_i) de X, localement fini, il existe une famille d'endomorphismes f_i de F, avec $f_i = 0$ hors d'un fermé contenu dans U_i, et $\Sigma_i f_i$ = identité (la somme $\Sigma_i f_i$ a un sens, étant localement finie). On se servira plusieurs fois de la:

Proposition 1. Soit une "résolution" du faisceau F, c'est-à-dire une suite exacte de faisceaux $0 \to F \to A^0 \to A^1 \to \cdots \to A^n \to \cdots$, telle que $H^q(X, A^n) = 0$ pour $q \geq 1$, $n \geq 0$ (par exemple, il en est ainsi quand les A^n sont fins; on dit alors qu'on a une résolution fine de F). Soit $\Gamma(X, A)$ le complexe

$$\Gamma(X, A^0) \xrightarrow{d^0} \Gamma(X, A^1) \xrightarrow{d^1} \cdots \to \Gamma(X, A^n) \xrightarrow{d^n} \cdots$$

On a des isomorphismes naturels $H^n(\Gamma(X, A)) \approx H^n(X, F)$ $(n \geq 0)$.

Exemple: prenons pour X une variété différentiable, et pour F le faisceau constant $\mathbf{R}$ (nombres réels); le faisceau A des germes de formes différentielles sur X, est une résolution fine de $\mathbf{R}$, et $\Gamma(X, A)$ est le complexe des formes différentielles sur X. La Proposition 1 donne un isomorphisme entre la cohomologie de ce complexe, et la cohomologie de l'espace X à coefficients réels (Th. de De Rham).

Un autre exemple sera donné dans l'exposé 18.

Démonstration de la Proposition 1: soit F^n le noyau de $A^n \to A^{n+1}$ (donc $F^0 = F$). La suite exacte $0 \to \Gamma(X, F^n) \to \Gamma(X, A^n) \to \Gamma(X, A^{n+1})$ définit un isomorphisme

(1) $\Gamma(X, F^n) \approx Z^n(\Gamma(X, A))$ (cocycles de degré n du complexe $\Gamma(X, A)$). En particulier, pour $n = 0$:

(2) $H^0(X, F) \approx H^0(\Gamma(X, A))$.

Pour $n \geq 1$, la suite exacte $0 \to F^{n-1} \to A^{n-1} \to F^n \to 0$ définit une suite exacte $\Gamma(X, A^{n-1}) \to \Gamma(X, F^n) \to H^1(X, F^{n-1}) \to 0$, qui, compte tenu de (1), donne un isomorphisme

(3) $H^n(\Gamma(X, A)) \approx H^1(X, F^{n-1})$ $(n \geq 1)$.

En le composant avec les isomorphismes $H^1(X, F^{n-1}) \approx H^2(X, F^{n-2}) \approx \cdots \approx H^n(X, F)$, on obtient l'isomorphisme cherché: $H^n(\Gamma(X, A)) \approx H^n(X, F)$.

Remarques: 1) La Proposition 1 et sa démonstration se généralisent à la Φ-cohomologie (cf. Sém. 1950-51); on a $H^n(\Gamma_\Phi(X, A)) \approx H^n_\Phi(X, F)$.

2) La Proposition 1 est un cas particulier d'un théorème qui utilise la "suite spectrale" (cf. Sém. 1950-51, 19, Th. 5).

§2. Cohomologie d'un recouvrement ouvert.

Soit $\mathfrak{U} = (U_i)$ un recouvrement ouvert de l'espace X, qu'on supposera localement fini (pour simplifier). Pour tout faisceau F sur X, on va définir des groupes de cohomologie $H^n(\mathfrak{U}, F)$. On définit d'abord des groupes de cochaînes $C^n(\mathfrak{U}, F)$ et des homomorphismes d^n: $C^n(\mathfrak{U}, F) \to C^{n+1}(\mathfrak{U}, F)$ tels que $d^{n+1}d^n = 0$. En voici la définition précise:

Pour toute suite I de $n+1$ indices $i_0, \ldots, i_n$ (pris dans l'ensemble d'indices du recouvrement), soit U_I l'intersection $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n}$. A chaque suite I associons le groupe de sections $\Gamma(U_I, F)$. Dans le groupe produit $\prod_I \Gamma(U_I, F)$ relatif à toutes les suites I de $n+1$ indices, considérons le sous-groupe $C^n(\mathfrak{U}, F)$ formé des applications $I \to s_I$ (avec $s_I \in \Gamma(U_I, F)$; on convient que $\Gamma(U_I, F)$ est réduit à 0 si U_I est vide) qui sont fonction alternée des indices de I. (En particulier, $s_I = 0$ si les indices de I ne sont pas tous distincts.) Etant donné un élément $(I \to s_I)$ du groupe $C^n(\mathfrak{U}, F)$, on définit le d^n de cet élément comme l'application $J \to \Sigma_{0 \leq k \leq n+1} (-1)^k s_{J_k}$, où J désigne une suite de $n+2$ indices, et J_k désigne la suite J débarrassée de son k-ième terme; en réalité, la formule précédente n'est pas tout à fait correcte: il faut y remplacer s_{J_k} (section au-dessus de U_{J_k}) par la section qu'elle induit au-dessus de U_J.

On a ainsi défini le complexe $C(\mathfrak{U}, F) = \Sigma_{n \geq 0} C^n(\mathfrak{U}, F)$ des "cochaînes du recouvrement $\mathfrak{U}$, relatif au faisceau F." On notera $Z^n(\mathfrak{U}, F)$ le groupe des cocycles de degré n de ce complexe (i.e.: le noyau de d^n), et $H^n(\mathfrak{U}, F)$ sera le quotient de $Z^n(\mathfrak{U}, F)$ par l'image de d^{n-1}.

Soit $\mathfrak{U}'$ un autre recouvrement ayant <u>même ensemble d'indices</u>, et tel que $U_i \subset U'_i$ pour tout i; d'où $U_I \subset U'_I$. Toute section au-dessus de U'_I induit une section au-dessus de U_I, d'où des homomorphismes $C^n(\mathfrak{U}', F) \to C^n(\mathfrak{U}, F)$ qui commutent avec les opérateurs "cobord" des complexes $C(\mathfrak{U}', F)$ et $C(\mathfrak{U}, F)$, donc définissent $H^n(\mathfrak{U}', F) \to H^n(\mathfrak{U}, F)$.

<u>Lemme 1</u>: si F est <u>fin</u>, on a $H^q(\mathfrak{U}, F) = 0$ pour $q \geq 1$.

En effet, soit (f_i) un système d'endomorphismes de F, relatif au recouvrement $\mathfrak{U} = (U_i)$ (cf. ci-dessus, p. 2, la définition d'un faisceau fin). Définissons des homomorphismes g^q: $C^q(\mathfrak{U}, F) \to C^{q-1}(\mathfrak{U}, F)$, pour $q \geq 1$, comme suit. Soit $I \to s_I$ un élément de $C^q(\mathfrak{U}, F)$; pour toute suite J de q éléments $i_0, \dots, i_{q-1}$, et pour tout indice i, soit $t_{(i,J)}$ la section de F au-dessus de U_J, égale à $f_i s_{(i,J)}$ au-dessus de $U_{(i,J)}$ et à zéro ailleurs. Alors l'application $J \to \Sigma_i t_{(i,J)}$ est un élément de $C^{q-1}(\mathfrak{U}, F)$, qui est, par définition, le transformé de $(I \to s_I)$

par g^q. On vérifie sans peine que $g^{q+1}d^q + d^{q-1}g^q$ est l'application identique de $C^q(\mathfrak{U}, F)$ pour $q \geq 1$; d'où le lemme.

Cette démonstration est due essentiellement à A. Weil [3].

Etant donné un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)$ de l'espace X, on va interpréter $H^n(X, F)$ comme la cohomologie d'un <u>complexe double</u>.

Rappelons qu'un complexe double est un groupe abélien $L = \Sigma_{p,q} L^{p,q}$ muni d'une bigraduation positive, et de deux opérateurs différentiels d_1 et d_2 tels que $d_1 d_1 = 0$, $d_2 d_2 = 0$, $d_1 d_2 + d_2 d_1 = 0$; l'opérateur d_1 envoie $L^{p,q}$ dans $L^{p+1,q}$, d_2 envoie $L^{p,q}$ dans $L^{p,q+1}$. On définit alors une graduation sur L (les éléments de degré n sont ceux de $\Sigma_{p+q=n} L^{p,q}$), et un opérateur différentiel $d = d_1 + d_2$ qui augmente le degré de un. On a donc des groupes de cohomologie $H^n(L)$; mais on a aussi, relativement à l'opérateur d_1, des groupes de cohomologie qu'on notera $H^p_I(L)$ (p désigne le premier degré partiel), qui sont gradués par q, et où d_2 opère. On peut donc considérer les groupes de cohomologie $H^q_{II}(H^p_I(L))$. On définit de même $H^p_I(H^q_{II}(L))$. Considérons l'homomorphisme d'injection $H^0_I(L) \to L$, qui est compatible avec les opérateurs d_2, resp. d; il définit des homomorphismes $H^n_{II}H^0_I(L) \to H^n(L)$. On utilisera le résultat suivant: <u>si L est d_1-acyclique</u> (i.e.: si $H^p_I(L) = 0$ pour $p \geq 1$), <u>alors</u> $H^n_{II}H^0_I(L) \to H^n(L)$ <u>est un isomorphisme</u>.

Voici comment on le prouve. Considérons la suite exacte de complexes doubles $0 \to H^0_I(L) \to L \to M \to 0$. L'hypothèse implique que $H^n_I(M) = 0$ pour tout n; on va montrer que ceci entraîne $H^n(M) = 0$ pour tout n, d'où résultera la conclusion cherchée. Or M est bigradué; posons

$$M^n_p = \sum_{r \geq p} M^{r,n-r}, \quad \text{donc} \quad M^n_p = 0 \text{ pour } p > n.$$

Alors $M_p = \Sigma_n M^n_p$ est un complexe gradué (par n), et le complexe M_p/M_{p+1} est isomorphe à $\Sigma_n M^{p,n-p}$ muni de d_1, donc $H(M_p/M_{p+1}) = 0$; la suite exacte de cohomologie montre que $H^n(M_{p+1}) \approx H^n(M_p)$ pour tout n et tout p, d'où, par récurrence descendante sur p, $H^n(M_p) = 0$. Pour $p = 0$, on obtient le résultat cherché: $H^n(M) = 0$.

Soit, comme ci-dessus, $A = \Sigma_{n \geq 0} A^n$ une <u>résolution</u> <u>fine</u> de F. Considérons le complexe double $C(\mathfrak{U}, A) = \Sigma_{q,p} C^q(\mathfrak{U}, A^p)$, où d_1 est l'opérateur cobord dans les cochaînes de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans A^p (p fixé), et où d_2 est $(-1)^q$ fois l'homomorphisme $C^q(\mathfrak{U}, A^p) \rightarrow C^q(\mathfrak{U}, A^{p+1})$ défini par $A^p \rightarrow A^{p+1}$. On notera $H^n(\mathfrak{U}, A)$, $H^q_I(\mathfrak{U}, A)$, $H^p_{II}(\mathfrak{U}, A)$ les cohomologies (totale ou partielles) de ce complexe double. Puisque les A^p sont <u>fins</u>, le lemme 1 prouve que $H^q_I(\mathfrak{U}, A) = 0$ pour $q \geq 1$; d'où un isomorphisme $H^n_{II}H^0_I(\mathfrak{U}, A) \approx H^n(\mathfrak{U}, A)$. D'ailleurs $H^0_I(\mathfrak{U}, A) = \Gamma(X, A)$, et $H^n(\Gamma(X, A))$ est, d'après la Prop. 1, isomorphe canoniquement à $H^n(X, F)$. On a ainsi un <u>isomorphisme</u> <u>canonique</u> $H^n(\mathfrak{U}, A) \approx H^n(X, F)$.

Considérons maintenant l'homomorphisme $H^n_I H^0_{II}(\mathfrak{U}, A) \rightarrow H^n(\mathfrak{U}, A)$. Compte tenu de l'isomorphisme précédent, il se traduit en un homomorphisme $\theta^n(\mathfrak{U})$: $H^n(\mathfrak{U}, F) \rightarrow H^n(X, F)$.

Soit $\mathfrak{U}' = (U'_i)$ un recouvrement ayant même ensemble d'indices, et tel que $U_i \subset U'_i$. Alors le composé

$$H^n(\mathfrak{U}', F) \rightarrow H^n(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{\theta^n(\mathfrak{U})} H^n(X, F)$$

n'est autre que $\theta^n(\mathfrak{U}')$.

<u>Proposition</u> 2 (cf. LERAY [4]). Si le recouvrement $\mathfrak{U}$ et le faisceau F sont tels que

(4) $\qquad H^p(U_J, F) = 0$ pour $p \geq 1$ et toute suite d'indices J,

alors <u>l'homomorphisme</u> $\theta^n(\mathfrak{U})$ <u>est un isomorphisme</u> (pour tout $n \geq 0$).

<u>Démonstration</u>: d'après la théorie des complexes doubles, il suffit de montrer que $H^p_{II}(\mathfrak{U}, A) = 0$ pour $p \geq 1$. Or, d'après la Proposition 1, on a $H^p(U_J, F) \approx H^p_{II}(\Gamma(U_J, A))$, qui est donc nul si (4) a lieu. Il en résulte que $H^p_{II}(C(\mathfrak{U}, A)) = 0$ pour $p \geq 1$, comme désiré.

<u>Remarque</u>: la Proposition 2 vaut aussi pour la cohomologie à supports compacts (même démonstration), mais pas pour n'importe quelle famille Φ.

§3. Démonstration du théorème.

Après tous ces préliminaires, nous abordons la démonstration du théorème énoncé page 1.

On sait que, pour toute variété de Stein U, et pour tout faisceau analytique cohérent F sur U, on a $H^q(U, F) = 0$ pour $q \geq 1$ (Sém. 1951-52, 18, Théorème B). En fait, dans ce qui suit, on n'aura besoin de ce résultat que dans le cas où U, ouvert de l'espace numérique $\mathbf{C}^n$, est un domaine d'holomorphie (on dira: "ouvert d'holomorphis"). Rappelons que, parmi les ouverts $U \subset \mathbf{C}^n$, les ouverts d'holomorphie sont caractérisés par la propriété suivante: pour tout compact $K \subset U$, l'enveloppe U-holomorphe de K est compacte (cette enveloppe est définie comme l'ensemble des $x \in U$ tels que $|f(x)| \leq \sup_K |f|$ pour tout f holomorphe dans U). L'intersection de deux ouverts d'holomorphie est un ouvert d'holomorphie, car l'enveloppe $(U_1 \cap U_2)$-holomorphe d'un compact $K \subset U_1 \cap U_2$ est contenue dans l'intersection de son enveloppe U_1-holomorphe et de son enveloppe U_2-holomorphe.

Le fait suivant est évident: si X est une variété analytique complexe, réunion dénombrable de compacts, X possède des recouvrements localement finis, arbitrairement fins, par des ouverts d'holomorphie. Un tel recouvrement (U_i) s'appellera un recouvrement de Stein; les U_I sont des ouverts d'holomorphie, d'où $H^q(U_I, F) = 0$ pour $q \geq 1$, et F cohérent.

On se propose de définir une topologie sur l'espace vectoriel $\Gamma(U, F)$, F étant un faisceau cohérent sur X, et U un ouvert d'holomorphie assez petit. F étant donné, on a, au-dessus de tout ouvert U assez petit, une suite exacte de faisceaux

$$(5) \qquad 0 \to N \to \mathcal{O}^p \to F \to 0,$$

où N est un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}^p$ (cela résulte de la définition d'un faisceau cohérent, et du fait que le noyau d'un homomorphisme analytique de faisceaux cohérents est cohérent; en fait, on a une suite exacte de la forme (5) au-dessus de tout ouvert de Stein U relativement compact).

Si de plus U est un ouvert d'holomorphie, la relation $H^1(U, F) = 0$ entraîne l'exactitude de la suite

$$0 \to \Gamma(U, N) \to \Gamma(U, \mathcal{O}^p) \to \Gamma(U, F) \to 0,$$

ce qui exprime l'espace vectoriel $\Gamma(U, F)$ comme quotient de l'espace vectoriel $\Gamma(U, \mathcal{O}^p)$ (espace des systèmes de p fonctions holomorphes dans U); le noyau $\Gamma(U, N)$ se compose des systèmes de p fonctions holomorphes dans U qui, en chaque point $x \in U$, appartiennent au sous-module N_x de $\mathcal{O}_x^p$. Munissons $\Gamma(U, \mathcal{O}^p)$ de la topologie de la convergence compacte (i.e: de la convergence uniforme sur les compacts de U), qui en fait un espace Fréchet (i.e: localement convexe, métrisable et complet). Le sous-espace $\Gamma(U, N)$ est fermé, d'après une propriété des sous-modules de $\mathcal{O}_x^p$ (Sém. 1951-52, 11, Coroll. 1 du Th. 4). Donc l'espace quotient $\Gamma(U, F)$ est séparé: c'est un espace de Fréchet.

La topologie ainsi obtenue sur $\Gamma(U, F)$ est indépendante du choix de la suite exacte (5). En effet, pour obtenir une telle suite exacte, on choisit un système de p sections s_i de F au-dessus de U, de manière qu'il engendre F_x en tout point $x \in U$, et par suite engendre $\Gamma(U, F)$ comme module sur l'anneau $\Gamma(U, \mathcal{O})$ des fonctions holomorphes dans U. On définit alors l'application $s: \Gamma(U, \mathcal{O}^p) \to \Gamma(U, F)$ qui, au système de p fonctions $f_i \in \Gamma(U, \mathcal{O})$, associe la section $\Sigma_i f_i s_i \in \Gamma(U, F)$. Considérons un autre système de q générateurs s'_j, et soit $s': \Gamma(U, \mathcal{O}^q) \to \Gamma(U, F)$ l'application qu'il définit. On a $s_i = \Sigma_j c_{ij} s'_j$, les c_{ij} étant holomorphes dans U. Soit c l'application $\Gamma(U, \mathcal{O}^p) \to \Gamma(U, \mathcal{O}^q)$ qui transforme le système (f_i) dans le système (g_j) tel que $g_j = \Sigma_i c_{ij} f_i$. Alors l'homomorphisme s est égal au composé $s'c$, donc l'application identique de $\Gamma(U, F)$ est continue quand on munit $\Gamma(U, F)$ respectivement de la topologie définie par les s_i et de celle définie par les s'_j. Comme on peut échanger les rôles de ces deux topologies, elles sont identiques.

<u>Lemme 2</u>: soit F un faisceau cohérent sur X. Soient U et U' des ouverts d'holomorphie <u>assez petits</u>, avec $U \subset U'$; alors l'application de restriction $\Gamma(U', F) \to \Gamma(U, F)$ est <u>continue</u>. Si de plus l'adhérence $\overline{U}$ est compacte et contenue dans U', l'application $\Gamma(U', F) \to \Gamma(U, F)$ est <u>complètement continue</u>.

<u>Démonstration</u>: prenons un système de p sections $s'_i \in \Gamma(U', F)$ qui engendre $\Gamma(U', F)$; alors leurs restrictions $s_i \in \Gamma(U, F)$ engendrent $\Gamma(U, F)$. Il suffit de montrer que l'application de restriction $\Gamma(U', \mathcal{O}^p) \to \Gamma(U, \mathcal{O}^p)$ est continue (resp. complètement continue). La première assertion est évidente. Pour la seconde: soit V l'ensemble des éléments de $\Gamma(U', \mathcal{O}^p)$ formé des systèmes (f_i) tels que $|f_i| \leq 1$ sur le compact $\overline{U}$; V est un voisinage de zéro dans $\Gamma(U', \mathcal{O}^p)$, et son image dans $\Gamma(U, \mathcal{O}^p)$ est relativement compacte, puisqu'elle est formée de systèmes de p fonctions uniformément bornées dans U.

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration du théorème initial. Soit $\mathfrak{U} = (U_i)$ un recouvrement de Stein par des ensembles assez petits; l'ensemble des U_i est <u>dénombrable</u>. L'ensemble des U_I aussi. Sur le produit dénombrable $\prod_I \Gamma(U_I, F)$, mettons la topologie produit des topologies des $\Gamma(U_I, F)$; ce produit devient un espace de Fréchet. Le sous-espace $C^n(\mathfrak{U}, F)$ est fermé, donc c'est un espace de Fréchet. L'opérateur différentiel d^n: $C^n(\mathfrak{U}, F) \to C^{n+1}(\mathfrak{U}, F)$ est continu, d'après le Lemme 2; donc son noyau $Z^n(\mathfrak{U}, F)$ est un espace de Fréchet. Prenons alors deux recouvrements de Stein, ayant même ensemble d'indices, et formés d'ensembles suffisamment petits, tels que $\overline{U_i}$ soit compact et contenu dans U'_i; alors $\overline{U_I}$ est compact et contenu dans U'_I. L'application $H^n(\mathfrak{U}', F) \to H^n(\mathfrak{U}, F)$ est un <u>isomorphisme</u>, en vertu de la Proposition 2. Donc $Z^n(\mathfrak{U}, F)$ est somme des images de φ^n: $Z^n(\mathfrak{U}', F) \to Z^n(\mathfrak{U}, F)$, et de d^{n-1}: $C^{n-1}(\mathfrak{U}, F) \to Z^n(\mathfrak{U}, F)$. Ceci conduit à introduire l'espace vectoriel E, produit de $Z^n(\mathfrak{U}', F)$ et $C^{n-1}(\mathfrak{U}, F)$; c'est un espace de Fréchet. Considérons les deux applications linéaires v et w de E dans $Z^n(\mathfrak{U}, F)$ que voici: v est nulle sur le second facteur et égale à φ^n sur le premier; w est nulle sur le premier facteur et égale à d^{n-1} sur le second. La somme $u = v+w$ applique E sur $Z^n(\mathfrak{U}, F)$. D'après le Lemme 2, v et w sont continues, donc u est continue.

Supposons enfin que la variété analytique X soit compacte. Alors le recouvrement $\mathfrak{U}'$ est fini. Montrons que v est complètement continue. Il suffit de montrer que l'application $C^n(\mathfrak{U}', F) \to C^n(\mathfrak{U}, F)$ est complètement continue; or ceci résulte du Lemme 2, parce que $C^n(\mathfrak{U}', F)$ est un sous-espace d'un produit fini d'espaces de la forme $\Gamma(U_I, F)$. Appliquons un théorème de Schwartz (Exposé 16, p. 4, Corollaire): il affirme que $w = u - v$ applique E sur un sous-espace (fermé) de $Z^n(\mathfrak{U}, F)$, de codimension finie; autrement dit, l'espace quotient $H^n(\mathfrak{U}, F)$ est de dimension finie. D'ailleurs, d'après la Prop. 2, $H^n(\mathfrak{U}, F)$ est isomorphe à $H^n(X, F)$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. Tous les résultats de cet Exposé s'étendent aux espaces analytiques normaux. En effet, tout revient à établir le Lemme 2 dans ce cas; or la question est locale, donc on peut réaliser l'espace analytique comme sous-ensemble analytique d'un ouvert d'un espace numérique C^N, et on est donc ramené à étudier des faisceaux cohérents sur un ouvert de C^N.

En fait, si l'on envisage les espaces analytiques non nécessairement normaux (qui n'ont pas été définis dans ce Séminaire; voir J. P. SERRE, Exposé 20 ci-dessous, §2), les résultats de cet Exposé restent vrais, parce que l'espace des fonctions holomorphes dans un ouvert est encore un espace de Fréchet. En effet, toute fonction, limite uniforme sur tout compact de fonctions holomorphes, est encore holomorphe, même si l'espace analytique envisagé n'est pas normal (voir GRAUERT-REMMERT, Komplexe Räume, Math. Ann. 136, 1958, p. 245-318).

RÉFÉRENCES

[1] H. CARTAN et J. P. SERRE, "Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes," Comptes Rendus, 237 (1953), p. 128-130.

[2] K. KODAIRA, "On cohomology groups of compact analytic varieties, etc.," Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 39 (1953), p. 865-868.

[3] A. WEIL, "Sur les théorèmes de De Rham," Comm. Math. Helv. 26 (1952), p. 119-145.

[4] J. LERAY, Journal de Math., 29 (1950), p. 1-139; voir vers la page 88.