J-P. SERRE

Deux théorèmes sur les applications complètement continues

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 16, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A16_0>

DEUX THÉORÈMES SUR LES APPLICATIONS COMPLÈTEMENT CONTINUES

(Exposé de J-P. Serre, 26-4-54)

Les théorèmes 1 et 2, démontrés ci-dessous, sont dûs à L.SCHWARTZ (C-R, 236, 1953, p. 2472-2473). Ils seront utilisés dans l'exposé suivant pour démontrer que $H^q(X, \mathfrak{F})$ est de dimension finie, si X est une variété analytique compacte, et $\mathfrak{F}$ un faisceau analytique cohérent. Ce résultat servira lui-même de base à l'étude des faisceaux analytiques cohérents sur l'espace projectif, qui sera exposée ultérieurement.

\- - - - - - -

Dans tout ce qui suit, E et F désignent des espaces vectoriels topologiques, localement convexes, et séparés. Pour tout ce qui concerne les espaces vectoriels topologiques, nous renvoyons à N. BOURBAKI, Livre V, cité EVT dans la suite.

Définition. *Une application linéaire v de E dans F est dite complètement continue s'il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $v(V)$ soit relativement compact dans F.*

(Cette définition est due à Leray, cf. Acta Sci. Math. Szeged, 12 (1950), p. 177-186.)

Une telle application est continue; en effet, si W est un voisinage de 0 dans F, il existe un scalaire λ tel que $v(V) \subset \lambda W$ (du fait que $v(V)$ est relativement compacte, donc précompacte), d'où $v(\lambda^{-1} \cdot V) \subset W$.

Théorème 1. *Soient u et v deux applications linéaires continues de E dans F. Supposons:*

a) *que u soit un isomorphisme de E sur $u(E)$, et que $u(E)$ soit fermé dans F,*

b) *que v soit complètement continue.*

Alors $w = u + v$ est un homomorphisme[1], son noyau N est de dimension finie, et son image $w(E)$ est fermée.

L'hypothèse b) signifie qu'il existe V, voisinage de 0 dans E, tel que $v(V)$ soit relativement compact; puisque E est localement convexe, on peut supposer que V est l'ensemble des $x \in E$ tels que $p(x) \leq 1$, p etant une semi-norme continue sur E (cf. EVT, Chap. II, §5). Posons $W = V \cap N$; on a $u + v = 0$ sur W, donc $u(W) = - v(W)$ est relativement compact dans F, donc précompact; puisque u est un isomorphisme, W est précompact, et comme c'est un voisinage de 0 dans N, N est de dimension finie[2].

Soit E' un supplémentaire topologique de N dans E (qui existe d'après le théorème de Hahn-Banach, cf. EVT, Chap. II, §3), et soient u', v', w' les restrictions à E' de u, v, w. On vérifie tout de suite que les conditions a) et b) sont satisfaites pour u' et v'; supposons le théorème démontré pour u' et v'; on voit alors facilement qu'il l'est pour u et v (par exemple, $w(E)$ est égal à $w'(E')$, donc fermé, etc.). Il suffit donc de démontrer le théorème pour u' et v', ce qui revient simplement à supposer que $N = 0$, autrement dit que w est biunivoque.

Soit donc $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur E, tel que $w(\mathfrak{U})$ converge dans F;

---

(1) Autrement dit, w transforme tout voisinage de 0 dans E en un voisinage de 0 dans $w(E)$. Cf. N. Bourbaki, Top. Gén., Chap. III, §2.

(2) Cf. EVT, Chap. I, §2, No. 4. Rappelons brièvement la démonstration: puisque E est précompact et que $W/2$ est un voisinage de 0 dans N, il existe un nombre fini de points a_i tels que W soit contenu dans la réunion des $a_i + W/2$; soit M le sous-espace vectoriel de N engendré par les a_i; puisque M est de dimension finie, M est fermé dans N (EVT, Chap. I, §2, No. 3), donc N/M est séparé. Soit W' l'image de W dans N/M; comme $W \subset M + W/2$, on a $W' \subset W'/2$, d'où $W' \supset 2W'$, $W' \supset 2^n W'$ pour tout n, donc $W' = N/M$ est précompact, donc nul (car sinon il contiendrait une droite, qui n'est visiblement pas précompacte). Donc $N = M$, et N est bien de dimension finie.

tout revient à montrer que $\mathfrak{U}$ converge dans E [3].

Soit a la limite (finie ou infinie) de $p(x)$ suivant $\mathfrak{U}$. Montrons d'abord que a est *finie*. Soit H la partie de E formée des x tels que $p(x) \neq 0$. Si l'on avait $a = +\infty$, H appartiendrait à $\mathfrak{U}$, et $\mathfrak{U}$ induirait sur H un ultrafiltre $\mathfrak{U}_H$; puisque $w(x)$ a une limite suivant $\mathfrak{U}$, $w(x/p(x))_{x \in H}$ aurait pour limite 0, suivant $\mathfrak{U}_H$; d'autre part, $v(x/p(x)) \in v(V)$ a une limite suivant $\mathfrak{U}_H$, puisque $v(V)$ est relativement compact. Donc $u(x/p(x))$ aurait une limite, donc aussi $x/p(x)$, d'après l'hypothèse a). Si x_0 désigne cette limite, on aurait $p(x_0) = \lim \cdot p(x)/p(x) = 1$, et d'autre part $w(x_0) = \lim \cdot w(x/p(x)) = 0$, ce qui est contraire à la biunivocité de w.

Ainsi a est fini; si l'on pose $V' = (a+1)\cdot V$, V' est l'ensemble des $x \in E$ tels que $p(x) \leq a + 1$, donc $V' \in \mathfrak{U}$; puisque $v(V') = (a+1)\cdot v(V)$ est relativement compact dans F, on en conclut que $v(x)$ converge dans F suivant $\mathfrak{U}$, donc aussi $u(x) = w(x) - v(x)$, et l'hypothèse a) entraîne que $\mathfrak{U}$ converge dans E, cqfd.

Théorème 2. *Soient* u *et* v *deux applications linéaires continues de* E *dans* F. *Supposons:*

---

(3) Montrons que cette propriété entraîne que $w(E)$ est fermé dans F et que w est un isomorphisme de E sur $w(E)$.

Soit A une partie fermée de E, et soit $y \in \overline{u(A)}$, adhérence de $u(A)$. Il existe un filtre $\mathfrak{F}$ sur $w(A)$ qui converge vers y; si $\mathfrak{U}''$ est un ultrafiltre sur $w(A)$ plus fin que $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{U}''$ converge aussi vers y. Puisque w est biunivoque, il existe un ultrafiltre $\mathfrak{U}'$ sur A tel que $w(\mathfrak{U}') = \mathfrak{U}''$; l'ultrafiltre $\mathfrak{U}'$ engendre un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur E, et $w(\mathfrak{U})$ converge évidemment vers y. Donc $\mathfrak{U}$ converge vers $x \in E$; puisque $A \in \mathfrak{U}$, et que A est fermé, on a $x \in A$. D'autre part, w étant continue, on a $w(x) = y$. Ceci montre que $y \in w(A)$, autrement dit que $w(A)$ est fermé dans F.

Appliquant ceci avec $A = E$, on voit tout d'abord que $w(E)$ est fermé dans F; en outre l'application w transforme un fermé de E en un fermé de $w(E)$, donc est un homéomorphisme, cqfd.

a) <u>que</u> u <u>soit un homomorphisme faible</u>[4] <u>de</u> E <u>sur</u> F,

b) <u>que</u> v <u>soit complètement continue, et</u>

(K) <u>que tout compact convexe de</u> F <u>soit l'image par</u> u <u>d'un compact convexe de</u> E.

<u>Alors</u> $w = u + v$ <u>est un homomorphisme faible de</u> E <u>sur un sous-espace fermé de codimension finie de</u> F.

Soit E'_c (resp. F'_c) le dual topologique de E (resp. F), muni de la topologie $\mathcal{C}_c$ de la convergence uniforme sur toute partie compacte convexe de E (resp. F). D'après un théorème de Mackey[5], le dual de E'_c n'est autre que E, et de même pour F'_c; autrement dit, la topologie affaiblie[6] de la topologie $\mathcal{C}_c$ sur E' est $\sigma(E', E)$.

Soient ${}^t u$ et ${}^t v$ les transposés de u et v, respectivement; ce sont des applications linéaires continues de F'_c dans E'_c. Nous allons montrer qu'elles vérifient les hypothèses du Théorème 1:

a) Puisque u applique E <u>sur</u> F, ${}^t u$ est biunivoque; la condition (K) entraîne que c'est un isomorphisme topologique; enfin, on sait[7] que

---

(4) C'est-à-dire un homomorphisme pour E et F munie des topologies affaiblies $\sigma(E, E')$ et $\sigma(F, F')$. Cf. EVT, Chap. IV, §2, No. 1.

(5) Cf. EVT, Chap. IV, §2, No. 3. Rappelons la démonstration:

On sait que le dual de E', muni de la topologie faible $\sigma(E', E)$, est égal à E; comme la topologie $\mathcal{C}_c$ est plus fine que $\sigma(E', E)$, il en résulte que E est contenu dans E_0, dual de E'_c. Soit $x_0 \in E_0$; puisque x_0 est une forme linéaire continue sur E'_c, il existe un voisinage V' de 0 dans E'_c tel que x_0 soit ≤ 1 en valeur absolue sur V', autrement dit tel que $x_0 \in (V')^0$. Vu la définition de $\mathcal{C}_c$, on peut supposer qu'il existe un ensemble compact convexe K dans E tel que $V' \supset K^0$; on a donc $x_0 \in K^{00}$. Or on sait que K est dense dans K^{00}, pour la topologie $\sigma(E_0, E')$; d'autre part, K est compact pour la topologie initiale de E, donc aussi pour $\sigma(E, E')$ qui est moins fine et séparée, donc aussi pour $\sigma(E_0, E')$ qui coïncide visiblement avec $\sigma(E, E')$ sur E. Il s'ensuit que $K = K^{00}$, d'ou $x_0 \in E$, et $E_0 = E$, cqfd.

(6) Cf. EVT, Chap. IV, §2, No. 1.

l'image de ${}^t u$ est faiblement fermée (donc aussi fermée pour $\mathcal{C}_c$ qui est plus fine), puisque u est un homomorphisme faible.

b) Soit V un voisinage de 0 dans E, tel que $v(V)$ soit relativement compacte dans F; le polaire[8] V^0 de V est une partie équicontinue de E', et, puisque ${}^t v\ (v(V)^0) \subset V^0$, ${}^t v\ (v(V)^0)$ est aussi une partie équicontinue de E'_c, donc relativement compacte, d'après le théorème d'Ascoli. D'autre part, $v(V)$ étant relativement compacte, $v(V)^0$ est un voisinage de 0 dans F'_c. Ceci montre que ${}^t v$ est complètement continue.

Appliquons alors le Théorème 1:

i) ${}^t w(F')$ est fermé dans E'_c, donc aussi fermé pour la topologie affaiblie correspondante, qui n'est autre que $\sigma(E', E)$, on l'a vu plus haut. Il en résulte[7] que w est un homomorphisme faible.

ii) ${}^t w$ est un homomorphisme pour les topologies $\mathcal{C}_c$, donc aussi pour les topologies affaiblies correspondantes[9], qui sont $\sigma(E', E)$ et $\sigma(F', F)$. Il en résulte[7] que $w(E)$ est faiblement fermé, donc fermé.

iii) Le noyau N de ${}^t w$ est de dimension finie; comme N est isomorphe au dual de $F/w(E)$ (parce que $w(E)$ est fermé), on voit que $w(E)$ est un sous-espace de codimension finie de F, cqfd.

---

(7) Pour qu'une application linéaire continue soit un homomorphisme faible, il faut et il suffit que l'image de l'application transposée soit faiblement fermée. Cf. EVT, Chap. IV, §4, No. 1, ainsi que J. Dieudonné, Annales ENS, 59 (1942) p. 107-139, Th. 14.

(8) Le polaire V^0 de V est l'ensemble des $x' \in E'$ tels que $\mathcal{R}\langle x', x\rangle \leq 1$ pour tout $x \in V$. Cf. EVT, Chap. IV, §1, No. 3.

(9) Tout homomorphisme est aussi un homomorphisme pour les topologies affaiblies correspondantes, autrement dit, est un homomorphisme faible. Cela résulte immédiatement des deux propriétés suivantes, faciles à démontrer (cf. EVT, Chap. IV, §1, No. 4):

a) La topologie faible d'un sous-espace est induite par la topologie faible de l'espace ambiant,

b) La topologie faible d'un quotient (par un sous-espace fermé) est identique à la topologie quotient de la topologie faible de l'espace initial.

Corollaire. Soient E et F deux espaces de Fréchet[10], et soient u et v deux applications linéaires continues de E dans F. Supposons: a) que u applique E sur F.

b) que v soit complètement continue.

Alors $w = u+v$ est un homomorphisme de E sur un sous-espace fermé de codimension finie de F.

La condition a) entraîne que u est un homomorphisme (th. de Banach, EVT, Chap. I, §3), donc un homomorphisme faible[9]. D'autre part, la condition (K) est vérifiée, du fait que E et F sont des espaces de Fréchet [11]. Le Théorème 2 montre alors que $w(E)$ est un sous-espace fermé de codimension finie de F, et le théorème de Banach montre que w est un homomorphisme.

---

(10) Un espace de Fréchet est un espace localement convexe, métrisable, et complet. Cf. EVT, Chap. II, §2, No 1.

(11) Il suffit de montrer que tout compact de F est l'image par u d'un compact de E, puisque l'enveloppe convexe fermée d'un compact de E est un compact de E (car E est complet, cf. EVT, Chap. II, §4, No. 1).

D'après le théorème de Banach, F est isomorphe à un espace quotient de E par un sous-espace fermé. Nous munirons E d'une distance invariante par translation (cf. EVT, Chap. I, §3, No. 1), notée $d(x, x')$, et nous munirons F de la distance "quotient":

$$d(y, y') = \inf_{\substack{u(x) = y \\ u(x') = y'}} d(x, x').$$

Soit K un compact de F. Il existe un nombre fini de points $y_i \in K$, tels que, si B_i désigne la boule fermée de centre y_i et rayon 1/2, les intérieurs des B_i recouvrent K. Nous choisirons dans E des points x_i tels que $u(x_i) = y_i$. Puisque $B_i \cap K$ est compact, il existe un nombre fini de points $y_{ij} \in B_i \cap K$ tels que, si B_{ij} désigne la boule fermée de centre y_{ij} et de rayon 1/4, les intérieurs des B_{ij} recouvrent $B_i \cap K$. Nous choisirons dans E des points x_{ij} tels que $u(x_{ij}) = y_{ij}$, et que

$d(x_i, x_{ij}) \leq 3/4$, ce qui est possible, vu la définition de la distance sur F. Puisque $B_{ij} \cap K$ est compact, il existe un nombre fini de points $y_{ijk} \in B_{ij} \cap K$ tels que, si B_{ijk} désigne la boule fermée de centre y_{ijk} et de rayon $1/8$, les intérieurs des B_{ijk} recouvrent $B_{ij} \cap K$. Nous choisirons dans E des points x_{ijk} tels que $u(x_{ijk}) = y_{ijk}$, et que $d(x_{ij}, x_{ijk}) \leq 3/8$. Etc.

Soit H l'ensemble formé par les $x_i, x_{ij}, x_{ijk}, \cdots$. Tout point de H est distant de l'un des x_i de moins de $3/4 + 3/8 + \cdots = 3/2$; de même, tout point de H est distant de l'un des x_{ij} (resp. $x_{ijk} \cdots$) de moins de $3/4$ (resp. $3/8, \ldots$). Donc H est précompact. Comme E est complet, $\overline{H}$ est compact. De plus $u(H) = \{y_i, y_{ij}, y_{ijk}, \ldots\}$ est une partie dense de K. Donc $u(\overline{H}) = K$, cqfd.

(On notera que la structure vectorielle n'est pas intervenue dans la démonstration.)