Séminaire Henri Cartan

K. Stein

Un théorème sur le prolongement des ensembles analytiques

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. nº 13, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A13_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UN THÉORÈME SUR LE PROLONGEMENT DES ENSEMBLES ANALYTIQUES

Premier exposé de K. Stein, 15-3-1954

§1. Soient X une variété analytique complexe de dimension n; F un sous-ensemble analytique dans X, de dimension $\leq k$ en chacun de ses points $(k < n)$; et E un sous-ensemble analytique dans $X - F$, <u>de dimension</u> k en chacun de ses points. Nous dirons qu'un point $p \in F$ est un point <u>ordinaire</u> par rapport à E si l'adhérence $\overline{E}$ de E dans X est analytique au point p, c'est-à-dire s'il existe un voisinage ouvert U de p tel que $U \cap \overline{E}$ soit un sous-ensemble analytique dans U. Tout point de F qui n'appartient pas à $\overline{E}$ est ordinaire. L'ensemble des points ordinaires de F, par rapport à E, est évidemment un ouvert de F. Un point de F qui n'est pas ordinaire par rapport à E est appelé <u>point singulier essentiel</u> de E.

On se propose de démontrer le théorème suivant:

<u>Théorème</u>. <u>L'ensemble des points de F qui sont points singuliers essentiels de E est un sous-ensemble analytique de F, de dimension k en chacun de ses points</u>.

On en déduit immédiatement deux corollaires importants:

<u>Corollaire 1</u>. <u>Tout point $x \in F$ où $\dim_x F < k$ est ordinaire par rapport à E</u>.

<u>Corollaire 2</u>. <u>Si F est globalement irréductible dans X, et de dimension k, et si F contient au moins un point ordinaire, alors tous les points de F sont ordinaires par rapport à E</u>. (En effet, tout sous-ensemble analytique de F, qui est de dimension k en chacun de ses points, est vide ou est F tout entier.)

Dans cet exposé, on se bornera à démontrer le lemme suivant:

Lemme fondamental. Soit F *une sous-variété de dimension* k ($k < n$) *de la variété analytique complexe* X *de dimension* n. *Si* E *est un sous-ensemble analytique de* X - F *de dimension* k *en chacun de ses points, l'ensemble des points de* F *qui sont ordinaires par rapport à* E *est ouvert et fermé.*

Il est clair que ce lemme est lui-même une conséquence du théorème. Nous montrerons au début de l'Exposé suivant que, inversement, le lemme fondamental entraîne facilement le Corollaire 1, puis le théorème lui-même.

Pour prouver le lemme, il suffira de montrer que l'ensemble des points de F qui sont ordinaires par rapport à E est *fermé*; en effet, cet ensemble est évidemment ouvert dans F.

N.B. Le lemme fondamental a été d'abord démontré par P. Thullen dans le cas particulier où $k = n-1$ (Math. Ann. 111, 1935). Le cas général est traité dans un travail de R. Remmert et K. Stein (Math. Ann. 126, 1953), où la démonstration s'appuie sur le résultat de Thullen.

§2. Nous donnons ici, d'après H. Cartan, une démonstration directe du cas général qui utilise une généralisation d'un théorème de RADO. Cette généralisation s'énonce comme suit:

Proposition 1. Soit Y *un espace analytique normal, et soit* f *une fonction à valeurs complexes, continue dans* Y *et holomorphe en tout point* $y \in Y$ *où* $f(y) \neq 0$. *Alors* f *est holomorphe en tout point de* Y *sans exception.*

Un énoncé équivalent est:

Proposition 1 bis. Soient Y *et* Y' *deux espaces analytiques normaux tels que* Y' *soit un sous-espace ouvert de* Y. *Soit* f *une fonction holomorphe dans* Y'. *Supposons que* f(y) *tende vers* 0 *quand* $y \in Y'$ *tend vers n'importe quel point frontière de* Y' *dans* Y. *Alors* f *se prolonge d'une seule manière en une fonction holomorphe dans tout* Y, _et les points frontières de_ Y' _dans_ Y _sont contenus dans l'ensemble analytique défini dans_ Y _par l'équation_ $f(y) = 0$.

La Proposition 1 bis suit de la Proposition 1, si l'on pose $f(y) = 0$ pour $y \in Y - Y'$. Réciproquement, la Proposition 1 suit de la Proposition 1 bis si on définit Y' comme l'ensemble des points $y \in Y$ tels que $f(y) \neq 0$ (le cas où f est identiquement nulle est trivial), et si on restreint f à Y'.

Pour les démonstrations de ces propositions, cf. H. Cartan, Math. Ann. _125_ (1952), ou H. Behnke-K. Stein, Math. Ann. _124_ (1951). T. Rado a traité, sous la forme de la Proposition 1 bis, le cas particulier où Y et Y' sont des domaines simplement connexes dans le plan d'une variable complexe (Math. Zeit. _20_ (1924)). Le cas général se ramène aussitôt au cas de la dimension 1.

Pour démontrer le lemme fondamental, nous aurons en outre besoin de quelques autres propositions.

Proposition 2. _Soit_ E_a _un germe d'ensemble analytique irréductible en un point_ a _d'une variété analytique_ X, _et soit_ f _un germe de fonction, sur_ E_a, _induit par un germe de fonction holomorphe de_ X _au point_ a. _Si_ f _n'est pas constante, et si la dimension_ k _de_ E_a _est_ ≥ 1, f _prend sur_ E_a _au moins une fois toute valeur assez voisine de_ $f(a)$.

Démonstration: supposons $f(a) = 0$. Soit k la dimension de E_a. Choisissons les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de l'espace ambiant X, de manière qu'elles s'annulent au point a et que les k premières $x_1, \ldots, x_k$ ne s'annulent simultanément sur E_a qu'au point a. Alors f est racine d'un polynôme unitaire $R(f; x_1, \ldots, x_k)$ à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_k$, tous nuls (sauf celui de la plus haute puissance de f) pour $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0$. Si de plus on suppose R irréductible (ce qui est possible), tout système de nombres complexes y, $x_1, \ldots, x_k$ (suffisamment voisins de 0) satisfaisant à $R(y; x_1, \ldots, x_k) = 0$ est tel qu'il existe un point de E_a, de coordonnées $x_1, \ldots, x_k$, où f prend la valeur y. (Cela résulte de Corollaire 2 du Théorème 4 de l'Exposé 8, appliqué à l'application que $x_1, \ldots, x_k$ et f définissent de l'ensemble analytique E_a dans le sous-ensemble analytique de C^{k+1} défini par la relation $R(y; x_1, \ldots, x_k) = 0$.)

Les coefficients du polynôme R, autres que le premier, ne sont pas tous identiquement nuls (puisque par hypothèse f n'est pas identiquement nulle sur E_a). On peut donc, au moyen d'une substitution linéaire sur $x_1, \ldots, x_k$, faire en sorte que $R(0; 0, \ldots, 0, x_k)$ ne soit pas identiquement nul. Alors, d'après le théorème de Weierstrass, la relation $R(f; x_1, \ldots, x_k) = 0$ équivaut à

$$Q(x_k; x_1, \ldots, x_{k-1}, f) = 0 ,$$

où Q désigne un polynôme distingué en x_k. Il en résulte que $(x_1, \ldots, x_{k-1}, f)$ peut prendre sur E_a tout système de valeurs assez voisin de $(0, \ldots, 0)$. En particulier, f prend toute valeur assez voisine de 0.

C.Q.F.D.

Corollaires de la Proposition 2.

(a) si une fonction holomorphe dans un espace analytique connexe atteint la borne supérieure de sa valeur absolue, alors elle est constante.

(b) une fonction holomorphe dans un espace analytique compact et connexe est constante.

(c) soit D un ouvert dans l'espace C^n, et soit M un sous-ensemble analytique de D. Si M est compact, alors M a la dimension 0 et se compose d'un nombre fini de points.

Démonstration de (c): soit M_1 une composante irréductible (globale) de M. Les fonctions holomorphes $x_1, \ldots, x_n$ (coordonnées dans l'espace ambiant) sont bornées sur l'espace compact M_1 et leur valeur absolue atteint sa borne supérieure; donc M_1 est de dimension 0, c'est-à-dire est réduit à un point.

<u>Proposition 3</u>. <u>Soit</u> U <u>un ouvert dans</u> $\mathbf{C}^n$ <u>contenant l'origine</u> 0, <u>et soit</u> L^k <u>la partie du plan</u> $x_1 = \cdots = x_{n-k} = 0$ $(0 \leq k < n)$ <u>contenue dans</u> U. <u>Soit donné dans</u> $U - L^k$ <u>un ensemble analytique</u> M^k <u>de dimension</u> $\leq k$. <u>Alors, pour tout entier</u> i <u>tel que</u> $0 \leq i \leq k$, <u>il existe un sous-espace vectoriel complexe</u> ${}^*L^{n-k+i}$ <u>tel que la dimension des intersections</u> ${}^*L^{n-k+i} \cap M^k$ <u>et</u> ${}^*L^{n-k+i} \cap L^k$ <u>soit</u> $\leq i$.

<u>Démonstration</u>: par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a $k = i = 0$, et il suffit de prendre ${}^*L^1 = \mathbf{C}$. Supposons $n > 1$, et la proposition démontrée pour $1, \ldots, n-1$. Si $i = k$, on prend ${}^*L^n = \mathbf{C}^n$. Si $0 \leq i < k$, soient (M_r) les composantes irréductibles (globales) de M^k dans U, et choisissons un point p_r sur chaque M_r. Soit H^{n-1} un hyperplan (complexe) ne contenant ni L^k ni aucun des points p_r, mais passant par 0. Nous pouvons supposer que H^{n-1} est l'hyperplan défini par $x_n = 0$. Si k_r $(k_r \leq k)$ désigne la dimension de M_r, alors $M_r \cap H^{n-1} = M_r'$ est soit vide soit de dimension $k_r - 1$, et $L^{k-1} = L^k \cap H^{n-1}$ a la dimension $k-1$ (cf. Séminaire 1951-52, Exp. 14, page 15). L'ensemble M^{k-1}, réunion des M_r', est un ensemble analytique de dimension $\leq k-1$ dans l'espace $\mathbf{C}^{n-1}$ des variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$, et $U' = U \cap H^{n-1}$ et M^{k-1} remplissent les hypothèses de la récurrence. Il existe donc dans $\mathbf{C}^{n-1}$, pour tout i tel que $0 \leq i \leq k-1$, un sous-espace vectoriel complexe ${}^*L^{(n-1)-(k-1)+i} = {}^*L^{n-k+i}$ jouissant de la propriété exigée par rapport à U', L^{k-1}, M^{k-1}. Considéré comme sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$, il jouit de la propriété exigée par rapport à U, L^k, M^k.

C.Q.F.D.

<u>Proposition 4</u>. <u>Dans l'espace</u> $\mathbf{C}^n$ <u>des variables complexes</u>

$$(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_{n-k}) = (x, y) ,$$

<u>soit</u> D <u>le polycylindre</u> $|x| < 1$, $|y| < 1$ (on a posé

$$|x| = \sup(|x_1|, \ldots, |x_k|), \quad |y| = \sup(|y_1|, \ldots, |y_{n-k}|)).$$

<u>Soit</u> L^k <u>la partie du sous-espace vectoriel</u> $y = 0$ <u>contenue dans</u> D. <u>Soit donné dans</u> $D - L^k$ <u>un ensemble analytique non vide</u> M^k <u>ayant en</u>

<u>chacun de ses points la dimension</u> k, <u>et ne possédant pas de point dans un voisinage du sous-ensemble</u> R <u>de la frontière de</u> D <u>défini par</u>

(R) $$|x| < 1, \qquad |y| = 1 .$$

<u>Alors, pour tout</u> $\varepsilon > 0$, M^k <u>rencontre le polycylindre</u>

$$|x| < \varepsilon, \qquad 0 < |y| < 1 .$$

<u>Démonstration</u>: tout sous-espace vectoriel L^{n-k}: $x = x^{(0)}$ rencontre M^k au plus en des points isolés. Car si $M' = L^{n-k} \cap M^k$ n'est pas vide, les fonctions $y_1, \ldots, y_{n-k}$ prennent le maximum de leur valeur absolue sur chaque composante irréductible M_r' de M', puisque M' ne rencontre pas un voisinage de R. Donc ces fonctions sont constantes sur M_r', qui est donc réduit à un point. Soit alors $p_1 = (x^{(1)}, y^{(1)})$ un point de M^k; on a $y^{(1)} \neq 0$, et on peut supposer $x^{(1)} \neq 0$ (sinon la proposition serait démontrée). Supposons donc que les premières coordonnées $x_1^{(1)}$ et $y_1^{(1)}$ soient $\neq 0$, et que les coordonnées $x_2^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)}$ de p_1 soient nulles. L'intersection N de M^k avec le sous-espace vectoriel L^{n-k+1} défini par $x_2 = \cdots x_k = 0$ n'est pas vide. Montrons que N a en chacun de ses points la dimension 1. D'abord la dimension ne peut être 0, car N est l'ensemble des points de M^k défini par l'annulation de $k-1$ fonctions holomorphes seulement. D'autre part, au voisinage de tout point $p' = (x_1', 0, \ldots, 0; y_1', \ldots, y_{n-k}')$ de N la fonction $x_1 - x_1'$ n'a que le zéro isolé p' sur N, d'après ce qu'on a vu au début de cette démonstration. Il s'ensuit que la dimension d de N au point p' est ≤ 1, et par suite égale a 1.

Raisonnons alors par l'absurde, en supposant que la borne inférieure de $|x_1|$ sur M^k soit > 0. Soit q un entier > 0 tel que

$$|x_1^{(1)}|^q < |y_1^{(1)}| .$$

Considérons sur N la fonction

$$f(x, y) = y_1/(x_1)^q .$$

Elle est holomorphe sur chaque composante irréductible de N, et elle reste bornée sur N puisque $|x_1|$ a par hypothèse une borne inférieure > 0 sur N, tandis que $|y_1| \leq 1$. Soit m la borne supérieure de $|f(x, y)|$ sur N; d'après le choix de l'entier q, on a $m > 1$. Aux points de N voisins de la frontière de D, $|x_1|$ tend vers un, donc $|f(x, y)|$ finit par être $< m$. Il en résulte que $|f(x, y)|$ atteint sa borne supérieure sur N, donc $f(x, y)$ est constante sur une composante irréductible de N, soit N_r. Sur N_r, $|y_1|$ est plus grand qu'un nombre > 0 fixe (puisqu'il en est ainsi de $|x_1|$), donc $|x_1|$ atteint sa borne inférieure en un point de N_r, et par suite x_1 est constante sur N_r; or ceci est en contradition avec ce qui a été établi précédemment.

§3. On va maintenant démontrer le lemme fondamental du §1. Sous les hypothèses et avec les notations de ce lemme, soit $p \in F$ un point adhérent à l'ensemble B des points ordinaires de F par rapport à E; on veut montrer que $p \in B$. La question est de nature locale au voisinage de p; on peut donc supposer que X est un domaine D de l'espace C^n des variables complexes

$$(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_{n-k}) = (x, y) ,$$

et que F est la sous-variéte de D définie par $y = 0$, le point p étant à l'origine.

D'après la Proposition 3, il existe un sous-espace vectoriel complexe ${}^*L^{n-k}$ qui rencontre F et l'ensemble analytique E au plus en des points isolés. Par une transformation linéaire qui conserve le sous-espace $y = 0$, on peut faire en sorte que ${}^*L^{n-k}$ soit défini par $x = 0$. Choisissons $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ de façon que l'on ait les propriétés suivantes:

(1) l'ensemble S défini par $|x| < \varepsilon$, $|y| < \delta$ est contenu dans D;

(2) l'ensemble $|x| < \varepsilon$, $|y| = \delta$ ne rencontre pas E.

Alors tout sous-espace $x = x^{(1)}$, avec $|x^{(1)}| < \varepsilon$, coupe E, à l'intérieur de S, au plus en des points isolés; en effet l'intersection de $x = x^{(1)}$ avec E est un ensemble analytique dans $S - F \cap S$, et $y_1, \ldots, y_{n-k}$ prennent sur toute composante irréductible de cet ensemble le maximum de leur valeur absolue (d'après (2)); ces coordonnées sont donc constantes sur toutes les composantes irréductibles (Prop. 2, Coroll. (a)), et ces composantes sont donc réduites à des points isolés.

D'après l'hypothèse, il y a des points ordinaires par rapport à E dans le polycylindre de dimension k:

$$(Z^k) \qquad |x| < \varepsilon, \quad y = 0.$$

Soit B_0 une composante connexe de l'ensemble des points ordinaires situés dans Z^k. Elle s'identifie à un ouvert B_0^* dans l'espace des variables x. Tout sous-espace $x = x^{(1)}$ (dans C^n), avec $x^{(1)} \in B_0^*$, rencontre l'adhérence $\overline{E}$ de E dans D en un nombre fini de points isolés à l'intérieur de S. A chacun de ces points de rencontre nous associons un entier (ordre de multiplicité) de la façon suivante: si $p_1 = (x^{(1)}, y^{(1)})$ est un tel point, les composantes irréductibles K_j de $\overline{E}$ en ce point ont toutes la dimension k; chaque K_j admet une représentation canonique, dans laquelle $x_1, \ldots, x_k$ peuvent être pris comme variables indépendantes, la projection $(x, y) \to x$ définissant K_j comme "revêtement ramifié" d'ordre m_j. On définit alors l'"ordre de multiplicité" comme la somme des m_j. Soit $m(p_1)$ cet entier. On voit facilement que le point p_1 possède un voisinage ouvert U tel que chaque sous-espace $x = \text{cte}$ qui rencontre U rencontre $\overline{E}$ en exactement $m(p_1)$ points (chaque point étant compté avec son ordre de multiplicité). La raison en est que E n'a pas de point au voisinage de $|y| = \delta$.

Pour $x^{(1)} \in B_0^*$, nous définissons $s(x^{(1)})$ comme la somme des ordres de multiplicité $m(p)$ relatifs aux points de rencontre p de E, situés dans S, avec le sous-espace $x = x^{(1)}$. D'après ce qui précède, l'entier $s(x^{(1)})$ est localement constant dans B_0^*, à cause de (2). Il s'ensuit que $s(x^{(1)})$ est constant dans B_0^*; soit s sa valeur.

On veut montrer que l'origine 0 est un point ordinaire par rapport à E. Raisonnons par l'absurde, et supposons que l'origine 0 ne soit pas un point ordinaire par rapport à E. Alors B_0^* possède au moins un point frontière x^* dans le polycylindre Z^*: $|x| < \varepsilon$. Soit s^* le nombre de points communs du sous-espace vectoriel $x = x^*$ avec E (chacun étant compté avec son ordre de multiplicité). On a $s^* \leq s$, sinon il y aurait plus de s points de E au-dessus des points de B_0^* suffisamment voisins de x^*. On ne peut pas avoir $s^* = s$, car on obtiendrait une contradiction avec la Proposition 4: on pourrait en effet choisir dans $\mathbf{C}^n$ un polycylindre autour du point $(x^*, 0)$ de manière qu'il n'y ait pas de point de E au-dessus de B_0^* dans ce polycylindre, tandis que E pénétrerait dans tout voisinage de $(x^*, 0)$.

On a donc $s^* < s$. Par suite, si un point x de B_0^* tend vers x^*, alors au moins un des s points de $\overline{E}$ au-dessus de x tend vers $(x^*, 0)$, et les coordonnées $y_1, \ldots, y_{n-k}$ de ce point tendent vers 0. Le même résultat vaut pour <u>tout</u> point frontière x^* de B_0^* dans Z^*.

Introduisons $n-k$ indéterminées u_j, et posons:

$$z = \sum_{j=1}^{n-k} u_j y_j \quad . \tag{3}$$

Si $(x, y^{(i)})$ $(1 \leq i \leq s)$ sont les s points de $\overline{E}$ au-dessus de $x \in B_0^*$, nous poserons

$$z^{(i)} = \sum_{j=1}^{n-k} u_j y_j^{(i)} \quad . \tag{4}$$

Le produit $z^{(1)} \ldots z^{(s)}$ est un polynôme homogène de degré s par rapport aux u_j. Les coefficients $c_{i_1 \ldots i_s}$ de ce polynôme sont des fonctions holomorphes de x dans B_0^*: ceci est évident pour les points $x \in B_0$ au-dessus desquels les s points de $\overline{E}$ sont distincts; comme les $c_{i_1 \ldots i_s}$ sont continus dans B_0^*, et que les points de B_0^* au-dessus desquels les points de $\overline{E}$ ne sont pas distincts forment un sous-ensemble analytique de codimension 1, les $c_{i_1 \cdots i_s}$ sont holomorphes partout dans B_0^* (d'après un théorème classique). Ces coefficients ne sont pas tous identiquement nuls, car B_0 n'est pas contenu dans $\overline{E}$, puisque les points de B_0 sont ordinaires par rapport à E.

Si le point $x \in B_0^*$ tend vers un point frontière de B_0^* dans Z^*, tous les $c_{i_1 \cdots i_s}$ tendent vers 0, d'après ce qu'on vient de voir. Nous sommes donc dans la situation de la Proposition 1 bis (théorème de Rado généralisé); par suite les points frontières de B_0^* à l'intérieur de Z^* sont situés sur un ensemble analytique M de codimension 1 dans Z^*.

Soit $Q(z) = (z - z^{(1)}) \cdots (z - z^{(s)})$. D'après (3) et (4), Q est un polynôme homogène de degré s par rapport aux u_j. Les coefficients $b_{i_1 \cdots i_s}(x, y)$ de ce polynôme sont holomorphes en x pour $x \in B_0^*$, et sont des polynômes par rapport aux y_i. Or le système d'équations

$$(5) \qquad b_{i_1 \cdots i_s}(x, y) = 0, \quad \text{où} \quad x \in B_0^* \text{ et } |y| < \delta$$

donne exactement la partie de $\overline{E}$ située au-dessus de B_0^* à l'intérieur de S. D'autre part les $b_{i_1 \cdots i_s}$ restent bornés si le point $x \in B_0^*$ tend vers un point frontière de B_0^* (situé sur M, d'après ce qui précède), les y_i restant constants. Donc les $b_{i_1 \cdots i_s}$ se prolongent en des fonctions holomorphes en tous les points de M, donc dans tout Z^*. Le système (5) définit, pour $x \in Z^*$, $|y| < \delta$, un ensemble analytique $\widetilde{E}$. Chaque point de $\widetilde{E}$ appartient à l'adhérence de la partie de $\overline{E}$ située au-dessus de B_0^* à l'intérieur de S. Donc tous les points de Z^k ($x \in Z^*$, $y = 0$) sont des points ordinaires par rapport à E, et par suite $B_0^* = Z^*$. Ainsi B_0^* n'a pas de point frontière dans Z^*, contrairement à l'hypothèse faite. Et ceci achève la démonstration du lemme fondamental.