H. CARTAN

Normalisation

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 10, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A10_0>

NORMALISATION

Exposé de H. Cartan, 15-2-1954,

récrit ultérieurement

§1. Interprétation fonctionnelle de la clôture intégrale.

Soit V un germe irréductible d'ensemble analytique à l'origine 0 de C^n. On a défini (Exposé 8, §3) un germe d'ensemble analytique irréductible V' (dans un espace C^N) et une application analytique $p: V' \to V$, de manière que l'homomorphisme d'algèbres analytiques $A(V) \to A(V')$ défini par p soit une injection et identifie A(V') à la clôture intégrale $\tilde{A}(V)$ de l'algèbre A(V). Le germe V', muni de p, est unique à un isomorphisme près, et s'appelle le normalisé du germe V.

Rappelons que $\tilde{A}(V)$ est un module de type fini sur A(V) (Exposé 7, Prop. 6). Appliquons le théorème 3 de l'Exposé 8: 1° on a $p^{-1}(0) = \{0\}$; 2° l'application p est surjective (au sens des germes); 3° l'image réciproque de tout point de V (assez voisin de l'origine) est finie (avec un cardinal inférieur à un nombre fixe), et est "en général" formée d'un seul point de V'; car il existe dans V un ouvert U partout dense, dont le complémentaire est un germe de sous-ensemble analytique, tel que la restriction de p à $p^{-1}(U)$ soit un homéomorphisme de $p^{-1}(U)$ sur U, et que $p^{-1}(U)$ soit dense dans V'.

Proposition 1. *Supposons réciproquement qu'on ait deux germes d'ensembles analytiques irréductibles V et V' (V: germe à l'origine de C^n; V': germe à l'origine de $C^{n'}$), et une application analytique surjective $p: V' \to V$ telle que $p^{-1}(0) = \{0\}$ et que la fibre d'un point $x \in V$ soit réduite à un seul point de V' lorsque x appartient à un ouvert partout dense de V. Alors, si le germe V' est normal à l'origine, $p: V' \to V$ est le normalisé du germe V.*

En effet, p définit une injection $A(V) \to A(V')$, puisque p est surjective; le corps des fractions F de A(V) s'identifie à un sous-corps du corps des fractions F' de A(V'). Mais l'une des hypothèses de l'énoncé implique que le degré d de F' sur F est égal à 1; donc F = F'. De plus A(V') est entier sur A(V), puisque $p^{-1}(0) = \{0\}$, et A(V') est intégralement clos (puisque le germe V' est normal). Ceci achève la démonstration.

On verra dans l'Exposé suivant (Prop. 1 de l'Exposé 11), en relation avec un théorème fondamental d'OKA, que puisque V' est normal à l'origine, il est encore normal en chacun de ses points suffisamment voisins de l'origine (l'ensemble des points de normalité d'un ensemble analytique est ouvert). Nous n'utiliserons pas ce résultat dans le présent Exposé.

On se propose de donner une interprétation fonctionnelle de la clôture intégrale $\tilde{A}(V)$ de l'algèbre $A(V)$, qui en fait sera valable même si le germe V n'est pas irréductible. Soit V^r l'ouvert partout dense formé des points <u>réguliers</u> de V. Soit $A'(V)$ l'algèbre des germes (à l'origine 0) de fonctions numériques (complexes) définies sur V^r, holomorphes sur la variété analytique complexe V^r, et <u>bornées</u> au voisinage de 0. On va définir un homomorphisme d'algèbres $\varphi\colon \tilde{A}(V) \to A'(V)$.

Soit g/h un élément de l'anneau complet des fractions $F(V)$ de l'algèbre $A(V)$; on a donc $g \in A(V)$, $h \in A(V)$, et h n'est pas diviseur de zéro (autrement dit, h ne s'annule identiquement sur aucune composante irréductible du germe V). Supposons de plus que $g/h \in \tilde{A}(V)$, c'est-à dire que g/h satisfasse dans $F(V)$ à une équation de la forme

$$(g/h)^q + a_1(g/f)^{q-1} + \cdots + a_q = 0,$$

dont les coefficients $a_1, \ldots, a_q$ sont dans $A(V)$. Il s'ensuit que, dans $A(V)$, on a la relation

$$(1) \qquad g^q + a_1 g^{q-1} h + \cdots + a_q h^q = 0,$$

qu'on peut considérer comme une relation entre germes de fonctions continues sur le germe d'ensemble V. L'ensemble des points de V^r où h n'est pas nulle est dense dans V^r, sinon h serait identiquement nulle au voisinage d'un point de $V_i \cap V^r$ (où V_i désigne l'une des composantes irréductibles de V), et par suite h serait identiquement nulle sur V_i, contrairement à l'hypothèse. D'après (1), la fonction f égale à g/h aux points de V^r

où h est $\neq 0$ est holomorphe et satisfait à la relation

(1') $$f^q + a_1 f^{q-1} + \cdots + a_q = 0 \ .$$

Il s'ensuit que f est bornée (au voisinage de l'origine). D'après un théorème classique, f se prolonge par continuité en une fonction holomorphe (encore notée f) aux points de V^r où h s'annule; ce prolongement est encore borné au voisinage de 0 et satisfait encore à (1'). Ainsi la fonction f prolongée est un élément de $A'(V)$, d'après la définition de $A'(V)$. On a ainsi associé à tout élément $g/h \in \tilde{A}(V)$ un élément $f \in A'(V)$, indépendant de l'écriture particulière g/h; et il est immédiat que l'application $\varphi : \tilde{A}(V) \to A'(V)$ ainsi définie est un homomorphisme d'algèbres.

<u>Théorème 1</u>. <u>L'homomorphisme</u> $\varphi : \tilde{A}(V) \to A'(V)$ <u>est un isomorphisme</u>.

D'abord, φ est une application injective; car si g/h définit une f identiquement nulle sur V^r, la fonction holomorphe g est nulle aux points de V^r où h est $\neq 0$, donc est nulle en tout point de V^r, et par continuité est identiquement nulle sur le germe V; donc l'élément $g/h \in A(V)$ est nul.

Il reste à montrer que φ est <u>surjectif</u>. On va d'abord montrer qu'il suffit de faire la démonstration dans le cas où le germe V est <u>irréductible</u>. En effet, dans le cas général, on a, pour chaque composante irréductible V_i, un homomorphisme naturel $A'(V) \to A'(V_i)$ défini comme suit: une f holomorphe sur V^r induit une f_i holomorphe sur $V^r \cap V_i$, et si f est bornée, f_i est bornée. La fonction f_i se prolonge par continuité en une fonction holomorphe (et bornée) en tout point de la variété ${V_i}^r$ des points réguliers de V_i, car les points de ${V_i}^r$ qui n'appartiennent pas à V^r sont ceux que appartiennent à la réunion des $V_i \cap V_j$ relatifs aux autres composantes irréductibles V_j. Ainsi à chaque f holomorphe et bornée sur V^r on associe une f_i holomorphe et bornée sur ${V_i}^r$, d'où l'application $A'(V) \to A'(V_i)$ que l'on voulait définir. C'est un homomorphisme d'algèbres. On en déduit un homomorphisme

$$A'(V) \to \prod_i A'(V_i) \quad ,$$

et il est évident que c'est un isomorphisme. Par ailleurs, la surjection naturelle $A(V) \to A(V_i)$ induit un homomorphisme $\tilde{A}(V) \to \tilde{A}(V_i)$, d'où un homomorphisme

$$\tilde{A}(V) \to \prod_i \tilde{A}(V_i) \quad ,$$

qui est un isomorphisme d'après l'Exposé 7 (Prop. 5). La commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \tilde{A}(V) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \tilde{A}(V_i) \arrow[d, "\varphi_i"] \\ A'(V) \arrow[r] & A'(V_i) \end{tikzcd}$$

étant évidente, il est clair que si on a montré que φ_i est un isomorphisme pour chaque i, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{A}(V) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\varphi"] & \prod_i \tilde{A}(V_i) \arrow[d, "\approx", "\Pi_i(\varphi_i)"'] \\ A'(V) \arrow[r, "\approx"] & \prod_i A'(V_i) \end{tikzcd}$$

prouvera que φ est un isomorphisme.

Supposons donc que V soit irréductible, et montrons que $\varphi: \tilde{A}(V) \to A'(V)$ est surjectif. Utilisons la description du germe irréductible V donnée au §2 de l'Exposé 8. Ce qu'on a appelé là V_0 est contenu dans l'ensemble V^r des points réguliers de V; donc toute fonction f holomorphe et bornée sur V^r est holomorphe et bornée sur V_0. Avec les notations de l'Exposé 8 (§2), V_0 possède exactement d points au-dessus de chaque point $(x_1, \ldots, x_k)$ tel que le discriminant $\Delta(x_1, \ldots, x_k)$ soit $\neq 0$. Les valeurs de f en ces d points sont les racines d'un polynôme unitaire de degré d, dont les coefficients sont holomorphes en $x_1, \ldots, x_k$ en tout point où $\Delta \neq 0$, et bornés. Ces coefficients se prolongent en des fonctions holomorphes de $x_1, \ldots, x_k$ dans tout un voisinage de l'origine (y compris les points où Δ s'annule). Ainsi f annule un polynôme unitaire à coefficients dans l'algèbre $A(V)$. Il reste à montrer que la fonction f est associée à un quotient g/h, où g et h sont dans $A(V)$, avec $h \neq 0$.

Pour cela, reportons-nous au Lemme 1 de l'Exposé 7, en y remplaçant l'algèbre A de ce lemme par la sous-algèbre analytique de $A(V)$ engendrée par $x_1, \ldots, x_k$, et B par la sous-algèbre analytique de $A(V)$ engendrée par $x_1, \ldots, x_k$ et x_{k+1}; le polynôme P du Lemme 1 est ici le polynôme distingué irréductible $P(x_{k+1}; x_1, \ldots, x_k)$ qui intervient dans la description du germe irréductible V (cf. §2 de l'Exposé 9). Nous ne pouvons pas appliquer ici le Lemme 1 formellement, car nous ne savons pas encore que f est dans le corps des fractions de l'anneau B. Cependant la démonstration du Lemme 1 peut se recopier dans la situation présente: au lieu de parler des conjugués d'un élément du corps des fractions de l'anneau B, on considère les valeurs de la fonction f aux d points de V_0 situés au-dessus d'un même point $(x_1, \ldots, x_k)$. On obtient ainsi le résultat suivant: si $f \in A'(V)$, le produit de f par la dérivée $P'(x_{k+1}; x_1, \ldots, x_k)$ est égal à un polynôme en x_{k+1} à coefficients dans l'algèbre des fonctions holomorphes en $x_1, \ldots, x_k$. Ainsi f est bien induite par un quotient g/h, avec g et h dans $A(V)$, h non identiquement nulle sur V.

Ceci achève la démonstration du Théorème 1.

Remarque: En général, l'algèbre $\tilde{A}(V) \approx A'(V)$ n'est pas une algèbre analytique; en effet, si V n'est pas irréductible, $\tilde{A}(V)$ est un produit de plusieurs algèbres locales, donc n'est pas une algèbre locale. En revanche, quand le germe V est irréductible, la clôture intégrale $\tilde{A}(V)$ est une algèbre analytique (Exposé 7, Corollaire au Théorème 2); on peut donc assigner une "valeur à l'origine" à toute fonction $f \in A'(V)$. En fait:

Proposition 2. *Soit V un germe irréductible à l'origine 0. Toute fonction $f \in A'(V)$ se prolonge par continuité à l'origine.*

Démonstration: f satisfait à une équation algébrique de la forme (1'), dont les coefficients sont des fonctions continues sur V, puisqu'ils appartiennent à $A(V)$. Donc f n'a qu'un nombre fini de valeurs d'accumulation à l'origine. Or l'origine 0 possède un système fondamental de voisinages ouverts qui coupent l'ensemble V^r des points réguliers de V suivant un ensemble connexe, puisque le germe V est, par hypothèse, irréductible. Il s'ensuit aussitôt que f, qui est une fonction continue sur V^r, n'a qu'une seule valeur d'accumulation à l'origine. Donc f tend vers une limite à l'origine.

§2. Points singuliers d'un germe d'ensemble analytique normal.

On se propose de montrer le théorème suivant:

Théorème 2. *Soit X un germe d'ensemble analytique à l'origine, et soit $S(X)$ le germe d'ensemble analytique formé des points singuliers de X* (cf. Exposé 9, Théorème 1). *Si X est normal à l'origine, alors $S(X)$ est de codimension ≥ 2 dans X* (i.e.: la dimension de toute composante irréductible de $S(X)$ à l'origine est $\leq p-2$, p désignant la dimension du germe X).

Nous allons donner de ce théorème une démonstration qui s'inspire d'un travail d''Abhyankar [1]. Un certain nombre de préliminaires seront nécessaires.

Soit A un anneau local noethérien, et soit $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, qui est engendré par un nombre fini d'éléments. Le quotient $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps résiduel $K = A/\mathfrak{m}$. On sait que sont système d'éléments de $\mathfrak{m}$ dont les images dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ engendrent cet espace vectoriel, est un système de générateurs de $\mathfrak{m}$ comme A-module. Si $r(A)$ désigne la dimension de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, on a

$$r(A) \geq \dim (A) ,$$

où $\dim(A)$ désigne la dimension de l'anneau A (au sens de Krull), c'est-à-dire le plus grand entier n tel qu'il existe une suite d'idéaux premiers distincts

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n \subset A .$$

(pour tout ceci, voir P. Samuel, Algèbre locale, Mém. Sc. Math. No. 123; voir Chap. II). Par définition, l'anneau local A est <u>régulier</u> si $r(A) = \dim(A)$.

Dans le cas où A est une algèbre analytique (de génération finie), l'Exposé 7 (Corollaire de la Prop. 11) montre que $r(A)$ est le plus petit des entiers n tels que A puisse s'écrire comme quotient de H_n; donc, <u>pour qu'un germe d'espace analytique</u> X (en un point $a \in X$) <u>puisse se plonger comme germe de sous-ensemble analytique à l'origine de</u> C^n, <u>il faut et il suffit que</u> $n \geq r(A)$, où $A = A(X)$ est l'algèbre analytique associée au germe X (cf. Exposé 8, §3). Aussi appelle-t-on $r(A)$ la <u>dimension de plongement</u> de l'anneau A. Lorsque $A = A(X)$, et que X est irréductible au point a, $\dim(A)$ n'est autre que la dimension $\dim(X)$ du germe X; elle est au plus égale à la dimension de plongement de X, et ne lui est égale que si a est un <u>point simple</u> de X, c'est-à-dire si $A(X) \approx H_n$, avec $n = \dim X$.

Considérons la situation suivante: V et X sont des germes de sous-ensembles analytiques à l'origine o de C^N avec $V \subset X$. Avec les notations de l'Exposé 8, §3, l'anneau $A(V)$ s'identifie au quotient $A(X)/I(V)$, où $I(V)$ désigne l'idéal de $A(X)$ formé des éléments qui s'annulent identiquement sur le germe V. Supposons désormais X et V <u>irréductibles</u> au point a. L'idéal $I(V)$ est premier; on notera $A(X, V)$ <u>l'anneau de fractions</u> de l'anneau local $A(X)$ relatif à l'idéal premier $I(V)$, c'est-à-dire l'anneau des fractions r/s, où $r \in A(X)$, $s \notin I(V)$, avec les opérations usuelles. On sait que c'est un anneau local, dont l'idéal maximal $\mathfrak{m}(X, V)$ est l'idéal engendré par $I(V)$. Notons $r(X, V)$ la dimension $r(A(X, V))$. Comme les idéaux premiers de $A(X, V)$ correspondent biunivoquement aux idéaux premiers de $A(X)$ qui contiennent $I(V)$, on voit que l'on a

(2) $$r(X, V) \geq \dim(X) - \dim(V) ,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si l'anneau local $A(X, V)$ est régulier. Au second membre de (2) figure la codimension de V dans X.

Nous allons démontrer la proposition auxiliaire suivante:

Proposition 3. *Avec les notations précédentes, supposons que les anneaux locaux* $A(V)$ *et* $A(X, V)$ *soient réguliers; alors l'anneau local* $A(X)$ *est régulier* (i.e., le sous-ensemble analytique X est une *sous-variété* de $\mathbf{C}^N$ au voisinage de l'origine).

Pour la démonstration, notons Y le germe de $\mathbf{C}^N$ à l'origine. On a donc les inclusions $V \subset X \subset Y$. L'anneau $A(X, V)$ s'identifie au quotient de $A(Y, V)$ par l'idéal J engendré par $I(X)$ (idéal de $A(Y)$ formé des germes de fonctions s'annulant sur X); J est contenu dans l'idéal maximal $\mathbf{m}(Y, V)$, et on a

$$\mathbf{m}(X, V) = \mathbf{m}(Y, V)/J.$$

Les corps résiduels $A(X, V)/\mathbf{m}(X, V)$ et $A(Y, V)/\mathbf{m}(Y, V)$ s'identifient tous deux au corps k des germes de fonctions méromorphes sur V (corps des fractions de l'anneau intègre $A(V)$). On a un épimorphisme naturel de k-espaces vectoriels

$$\mathbf{m}(Y, V)/\mathbf{m}(Y, V)^2 \longrightarrow \mathbf{m}(X, V)/\mathbf{m}(X, V)^2$$

dont le noyau est évidemment le sous-espace vectoriel engendré par l'image de $I(X)$ dans $\mathbf{m}(Y, V)/\mathbf{m}(Y, V)^2$. Si m désigne la dimension de ce sous-espace vectoriel, on a donc

$$m = r(Y, V) - r(X, V) . \tag{3}$$

Après ces remarques préliminaires, nous sommes en mesure de prouver la Proposition 3. Supposons que l'anneau $A(V)$ soit régulier (c'est-à-dire que l'origine soit un point simple de V). D'après le début du §1 de l'Exposé 9, V est un germe de sous-variété de $Y = \mathbf{C}^N$. On peut donc choisir dans Y des coordonnées locales $y_1, \dots, y_N$ telles que l'idéal de V (dans Y) soit engendré par $y_1, \dots, y_n$. Choisissons dans l'idéal $I(X)$ m éléments $u_1, \dots, u_m$ dont les images dans $\mathbf{m}(Y, V)/\mathbf{m}(Y, V)^2$ soient linéairement indépendantes. Puisque les u_i appartiennent à l'idéal de V, on a

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} y_j ,$$

où les λ_{ij} sont dans l'anneau $A(Y)$ (germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbf{C}^N$), et la matrice des $\lambda_{ij}(0)$ est de rang m. Par le théorème des fonctions implicites, on peut donc supposer que $u_1, \ldots, u_m$ font partie d'un système de coordonnées locales à l'origine de $\mathbf{C}^N$, et par suite les équations $u_1 = 0, \ldots, u_m = 0$ définissent une sous-variété W contenant X, de codimension m dans $\mathbf{C}^N$. Supposons maintenant que l'anneau local $A(X, V)$ soit régulier; alors $r(X, V)$ est égal à la codimension de V dans X d'après (2); d'après (3), m est égal à la codimension de X dans $Y = \mathbf{C}^N$. Donc X et W ont même codimension dans $\mathbf{C}^N$; puisque $X \subset W$ et que dim X = dim W, le germe X coïncide nécessairement avec le germe W. Autrement dit, X est un germe de sous-variété dans $\mathbf{C}^N$, ce qui démontre la Proposition 3.

Proposition 4. Soit X un germe d'ensemble analytique à l'origine 0, et supposons que X soit normal en 0. Soit V un germe de sous-ensemble irréductible de X, de codimension un dans X. Alors tout point simple de V (assez voisin de 0) est un point simple de X.

Notons tout de suite que ceci entraîne aussitôt le Théorème 2: supposons en effet que le germe S(X) des points singuliers de X soit de codimension 1; il y aurait une composante irréductible V de S(X) qui serait de codimension 1, et en appliquant à V la Proposition 4 on obtiendrait une contradiction.

Il nous reste à prouver la Proposition 4. Avec les notations de cette proposition, l'anneau local $A(X, V)$ est intégralement clos (vérification immédiate) et de dimension 1 (au sens de Krull). Il en résulte (cf. Appendice) que $A(X, V)$ est régulier. En tout point $a \in V$, voisin de 0, et en lequel V est irréductible, nous pouvons aussi considérer l'anneau local $A_a(X, V)$; on montrera dans un instant que $A_a(X, V)$ est encore régulier. Admettons ce résultat pour un instant; si a est un point simple de V, on applique (au point a) la Proposition 3, qui permet de conclure que a est un point simple de X, et la Proposition 4 est démontrée.

Il n'y a plus qu'à montrer que $A_a(X, V)$ <u>est un anneau régulier en tout point</u> $a \in V$ <u>tel que</u> V <u>soit irréductible en</u> a. Notons $\mathfrak{m}_a(X, V)$ l'idéal maximal de $A_a(X, V)$; il est engendré par l'idéal $I_a(V)$ des germes de fonctions (au point a) qui s'annulent sur V; dire que $A_a(X, V)$ est régulier, c'est dire (puisque V est de codimension 1 dans X) qu'il existe un élément $u \in I_a(V)$ qui engendre l'idéal $\mathfrak{m}_a(X, V)$ dans l'anneau $A_a(X, V)$. Par hypothèse, il en est ainsi lorsque a est l'origine 0. Soit $u \in I_0(V)$ un tel générateur. Tout élément $v \in I_0(V)$ peut donc s'écrire

$$v = (r/s)u ,$$

où r et s sont dans $A_0(X)$, $s \notin I_0(V)$. Ecrivons ceci pour un système fini de générateurs v_i de l'idéal $I_0(V)$ (comme module sur l'anneau $A_0(V)$):

$$v_i = (r_i/s)u$$

(car on peut prendre un dénominateur commun s). En tout point $a \in V$ voisin de 0, les v_i engendrent l'idéal $I_a(V)$: ceci exprime la "cohérence" du faisceau d'idéaux de V (voir Séminaire 1951-52, Exposé 16); nous admettons ici ce résultat essentiel. Donc si $v \in I_a(V)$, on a $v = \Sigma_i \lambda_i v_i$, où les λ_i sont dans l'anneau $A_a(X)$, et par suite

$$v = \Big(\sum_i \lambda_i r_i/s\Big)u . \tag{4}$$

Si V est irréductible en a, le germe défini par s au point a ne s'annule pas identiquement sur le germe de V au point a (puisque V est irréductible à l'origine et que s ne s'annule pas identiquement sur le germe de V à l'origine); la relation (4) montre que le germe de u, au point a, engendre l'idéal $\mathfrak{m}_a(X, V)$ dans l'anneau $A_a(X, V)$. Et ceci achève enfin la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ABHYANKAR, Math. Ann. 141, 1960, p. 171-192. Cette référence bibliographique a été rajoutée, évidemment, lors de la révision des textes du présent Séminaire. La démonstration du théorème d'OKA [Voir Exposé 11, Th. 1] donnée dans le première édition de ce Séminaire contenait une faute, ce qui a obligé à reprendre la question autrement. Une fois prouvé le Théorème 2 du présent Exposé par la méthode d'Abhyankar, nous conservons, dans l'Exposé suivant 11, la méthode d'Oka.

[La marche suivie dans les Exposés 10 et 11 diffère peu de celle utilisée par R. NARASIMHAN (Introduction to the Theory of Analytic Spaces, Lecture Notes in Mathematics No. 25, Springer 1966).

Hugo ROSSI (Analytic Spaces, Princeton, 1960) a suivi une marche différente, plus proche de la version initiale du présent Séminaire E.N.S. 1953-54.]

APPENDICE à l'Exposé 10.

On se propose de démontrer le résultat suivant:

Soit A un anneau local noethérien, intégralement clos, de dimension 1. Alors A est un "anneau de valuation discrète" (c'est-à-dire: son idéal maximal $\mathfrak{m}$ est principal), et par suite A est régulier (puisque $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est un espace vectoriel de dimension 1).

Soit $x \in \mathfrak{m}$, $x \neq 0$. Puisque A est de dimension 1, tout idéal premier contenant x est égal à $\mathfrak{m}$. Donc tout élément de $\mathfrak{m}$ a une puissance dans l'idéal xA engendré par x. Puisque A est noethérien, il existe une puissance $\mathfrak{m}^n$ de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ qui est contenue dans xA; et on peut prendre le plus petit entier n possible, autrement dit on peut supposer que $\mathfrak{m}^{n-1} \not\subset xA$. Soit $y \in \mathfrak{m}^{n-1}$ tel que $y \notin xA$, et soit $z = xy^{-1}$ (élément du corps des fractions de A). Alors

$$z^{-1} \notin A \quad \text{et} \quad z^{-1}\mathfrak{m} \subset A.$$

On va montrer que $z^{-1}\mathfrak{m} = A$, en raisonnant par l'absurde: s'il n'en était pas ainsi, on aurait $z^{-1}\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, donc $z^{-k}\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ pour tout entier $k \geq 0$. En particulier on aurait $z^{-k}x \in \mathfrak{m}$ pour tout k, donc l'anneau de polynômes $A[z^{-1}]$ serait contenu dans le A-module monogène $A[x^{-1}]$, et par suite serait un A-module de type fini. Ceci signifie que z^{-1} est entier sur A. Comme A est supposé intégralement clos, on conclut que $z^{-1} \in A$, d'où une contradiction.

Ainsi $z^{-1}\mathfrak{m} = A$, autrement dit $\mathfrak{m} = zA$. Ceci prouve que $\mathfrak{m}$ est un A-module principal, engendré par l'élément z.