H. Cartan

Domaines d'holomorphie et domaines de convergence : théorie de la convexité (I)

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. n° 8, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A8_0>

DOMAINES D'HOLOMORPHIE ET DOMAINES DE CONVERGENCE: THÉORIE DE LA CONVEXITÉ (I)

(Exposé de H. Cartan, 28-1-1952)

Dans cet exposé, on considère un domaine (E, φ) étalé dans $\mathbf{C}^n$ (cf. 7); et une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes dans E (à valeurs scalaires), resp. une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes qui converge normalement dans E (cf. 7, 7), resp. une suite de fonctions holomorphes uniformément convergente dans E, resp. une famille bornée dans E. Dans l'exposé 7, on a défini le domaine de prolongement analytique simultané des fonctions de $\mathcal{F}$ (que nous appellerons aussi, ici, le domaine d'holomorphie de la famille $\mathcal{F}$), resp. le domaine de convergence normale, resp. le domaine de convergence uniforme, resp. le domaine de bornologie. Dans chacun de ces 4 cas, c'est un $(\tilde{E}, \tilde{\varphi})$ étalé dans $\mathbf{C}^n$, et muni d'une application ψ qui étale E dans $\tilde{E}$, de manière que $\varphi = \tilde{\varphi}\circ\psi$.

On se propose de trouver, dans chacun de ces cas, des conditions nécessaires et suffisantes pour que ψ soit un isomorphisme de E sur $\tilde{E}$; autrement dit, pour que le domaine (E, φ) donné soit le domaine d'holomorphie de la famille $\mathcal{F}$, resp. son domaine de normalité, etc....

1. Notations; lemmes préliminaires.

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un point de l'espace $\mathbf{C}^n$, et r un nombre > 0. On notera $S(x, r)$ le polydisque ouvert de centre x et de rayon r, c'est-à-dire l'ensemble des points $y = (y_1, \ldots, y_n)$ tels que

$$|y_k - x_k| < r \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, n .$$

On notera $\overline{S}(x, r)$ le polydisque fermé, défini par $|y_k - x_k| \leq r$. On appellera "distance" de deux points x et y, la plus grande des quantités $|y_k - x_k|$; c'est la borne supérieure des rayons des polydisques de centre x qui ne contiennent pas y.

Soit (E, φ) un domaine (connexe) étalé dans $\mathbf{C}^n$. Soient x un point de E, et V un voisinage connexe de $\varphi(x)$ dans $\mathbf{C}^n$; on dira, par abus de langage, que V est contenu dans E s'il existe un homéomorphisme ψ de V sur un voisinage de x dans E, qui envoie $\varphi(x)$ au point x, et soit tel que $\varphi\circ\psi$ soit l'identité (ψ est unique s'il existe). En particulier, on parlera du plus grand polydisque ouvert, de centre x, contenu dans (E, φ); son rayon s'appellera la distance de x à la frontière de (E, φ) (noter que nous n'avons pas défini la "frontière" de (E, φ)). Si r est cette distance, on pourra parler, pour chaque $\rho < r$ $(\rho > 0)$, du polydisque fermé de centre x et de rayon ρ, contenu dans E; on le notera $\overline{S}(x, \rho)$ par abus de langage.

Cela dit, soit $(\tilde{E}, \tilde{\varphi})$ un autre domaine étalé dans $\mathbf{C}^n$, et ψ une application localement biunivoque de E dans $\tilde{E}$, telle que $\varphi = \tilde{\varphi}\circ\psi$.

Lemme 1. Pour que ψ soit un isomorphisme de E sur $\tilde{E}$, il faut et il suffit que:

1° l'application ψ soit biunivoque;

2° pour chaque point $x \in E$, le plus grand polydisque de centre x contenu dans E ait pour image, par ψ, le plus grand polydisque de centre $\psi(x)$ contenu dans $\tilde{E}$; en d'autres termes: la distance de x à la frontière de (E, φ) doit être égale à la distance de $\psi(x)$ à la frontière de $(\tilde{E}, \tilde{\varphi})$.

Démonstration: les conditions sont évidemment nécessaires. Elles sont suffisantes, car la condition 2° entraîne que l'application ψ fait de E un revêtement de $\tilde{E}$ (en fait, la condition 2° est nécessaire et suffisante pour que E soit un revêtement de $\tilde{E}$).

Nous allons d'abord nous occuper de la condition 1°, dans le cas où $(\tilde{E}, \tilde{\varphi})$ est le domaine d'holomorphie d'une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes dans (E, φ), resp. le domaine de normalité d'une famille $\mathcal{F}$ qui converge normalement dans (E, φ), etc.... Observons qu'une fonction f holomorphe au voisinage d'un point x_0 de E s'exprime par une fonction holomorphe des coordonnées du point $\varphi(x)$ de $\mathbf{C}^n$, au voisinage de $\varphi(x_0)$. Si deux points x et y de E ont même image $\varphi(x) = \varphi(y)$ dans C^n, on dira qu'une f, holomorphe dans E, a des déterminations différentes aux points x et y si les éléments de fonction qu'elle définit au voisinage de $\varphi(x) = \varphi(y)$ sont distincts (c'est-à-dire ne sont pas identiques dans tout un voisinage de $\varphi(x)$). Cela étant, dans chacun des 4 cas envisagés, la condition pour que l'application ψ de E dans $\tilde{E}$ soit biunivoque est celle-ci: chaque fois que 2 points distincts x, y de E ont même image par φ dans C^n, il existe une $f \in \mathcal{F}$ qui a des déterminations différentes en x et en y.

Lemme 2. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe une combinaison linéaire infinie $\sum_p \lambda_p f_p$ de fonctions $f_p \in \mathcal{F}$ (les coeff. λ_p sont des nombres complexes; la série converge normalement sur tout compact de E, et a donc pour somme une fonction holomorphe dans E), qui jouisse de la propriété que, chaque fois que 2 points distincts x et y de E ont même image dans C^n, la fonction $\sum_p \lambda_p f_p$ a des déterminations différentes en x et y.

Démonstration: la condition est suffisante, car elle implique que l'une au moins des fonctions f_p a des déterminations différentes en x et en y. Elle est nécessaire: en effet, recouvrons E par une suite dénombrable de polydisques S_i; si les images $\varphi(S_i)$ et $\varphi(S_j)$ se rencontrent et si $S_i \cap S_j = \emptyset$, choisissons un couple de points $x_{ij} \in S_i$ et $x_{ji} \in S_j$ tels que $\varphi(x_{ij}) = \varphi(x_{ji})$, et une fonction $g_{ij} \in \mathcal{F}$ prenant des valeurs différentes en x_{ij} et x_{ji} (ceci est possible). On va construire une fonction f qui, pour tout couple (i, j), prendra des valeurs différentes en x_{ij} et x_{ji}, ce qui impliquera que, pour tout couple de points distincts x, y tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$, f aura des déterminations différentes en x et en y. Rangeons les g_{ij} en une suite unique (f_p); prenons une suite croissante de sous-ensembles compacts K_p de E, telle que tout compact de E soit contenu dans l'un d'eux. Prenons arbitrairement des constantes complexes λ_p telles que la borne supérieure de $|\lambda_p f_p|$ sur K_p soit 2^{-p}; la série $\sum_p \lambda_p f_p$ convergera normalement sur tout compact de E. Reste à montrer que l'on peut assujettir les λ_p aux conditions supplémentaires $\Sigma_p \lambda_p(f_p(x_{ij}) - f_p(x_{ji})) \neq 0$ pour tout couple (i, j). Or, par hypothèse, l'un au moins des coefficients des λ_p, dans cette somme, est $\neq 0$; on a donc à écrire une famille dénombrable d'inégalités linéaires entre les λ_p, à coefficients non tous nuls. Ceci est possible.

2. Un théorème sur le prolongement analytique.

Nous allons maintenant nous occuper de la condition 2° du lemme 1. Une condition nécessaire pour que cette condition soit remplie va être fournie par le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit (E, φ) un domaine étalé dans $\mathbf{C}^n$. Etant donné une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes dans E, associons à chaque compact K contenu dans E l'ensemble (fermé) $K_{\mathcal{F}}$ des points $x \in E$ tels que $|f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)|$. Alors, si la famille $\mathcal{F}$ est stable pour la différentiation par rapport aux coordonnées locales définies par φ:*

1° pour tout compact K, et tout point $x \in K_{\mathcal{F}}$, toute fonction f de $\mathcal{F}$ est holomorphe dans le polydisque ouvert $S(x, r)$, r désignant la distance de K à la frontière de E (i.e., la borne sup. des distances des points de K à la frontière de E).

(L'énoncé 1° est un abus de langage pour exprimer que l'élément de fonction défini par f au point $\varphi(x)$ de $\mathbf{C}^n$ se prolonge en une fonction holomorphe dans tout le polydisque $S(\varphi(x), r)$.)

2° pour chaque $\rho < r$ $(\rho > 0)$, notons $M_\rho(f)$ la borne supérieure de $|f|$ dans $\overline{S}(K, \rho)$, ensemble des points de E qui appartiennent à un polydisque fermé de rayon ρ ayant son centre sur K; alors, pour $0 < \rho' < \rho < r$, *et pour toute $f \in \mathcal{F}$, la borne supérieure de $|f|$ dans $\overline{S}(x, \rho')$ est $\leq (1 - \rho'/\rho)^{-n} M_\rho(f)$.* ($x$ désigne toujours un point de $K_{\mathcal{F}}$).

Démonstration: notons, par abus de langage, $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées, dans $\mathbf{C}^n$, du point $\varphi(x)$; écrivons le développement de Taylor de la fonction f au point x:

$$(1) \quad f(y) = \sum_{k_1 \geq 0, \ldots, k_n \geq 0} \frac{1}{k_1! \cdots k_n!} \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} f(x)}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} (y_1 - x_1)^{k_1} \cdots (y_n - x_n)^{k_n}.$$

Soit alors $\rho < r$; puisque tout point de K est centre d'un polydisque fermé de rayon ρ, sur lequel f est holomorphe et $|f| \leq M_\rho$, on a, en vertu des inégalités classiques de Cauchy,

$$\left| \frac{1}{k_1!\cdots k_n!} \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}} \right| \leq \frac{M_\rho(f)}{\rho^{k_1+\cdots+k_n}}$$

en tout point de K. D'après la définition de $K_{\mathcal{F}}$, et compte tenu du fait que les dérivées partielles de f appartiennent à $\mathcal{F}$, ces inégalités ont lieu aussi en tout point $x \in K_{\mathcal{F}}$. Il en résulte que le second membre de (1) converge normalement sur chaque polydisque de centre x et de rayon $< \rho$; donc f se prolonge en une fonction holomorphe dans $S(x, r)$, ce qui établit la première partie de l'énoncé. La deuxième partie résulte d'une majoration évidente de la série (1).

Complément au théorème 1: supposons que la famille $\mathcal{F}$ satisfasse à la condition supplémentaire:

(C) quels que soient l'entier $k \geq 0$ et le nombre complexe λ, la fonction λf^k appartient à $\mathcal{F}$ chaque fois que $f \in \mathcal{F}$. La conclusion 2° du théor. 1 se précise alors comme suit: pour tout $\rho < r$, la borne supérieure de $|f|$ dans $\overline{S}(x, \rho)$ est $\leq M_\rho(f)$ (pour $x \in K_{\mathcal{F}}$).

Il suffit en effet d'appliquer la conclusion 2° à la fonction $g = (f/M_\rho(f))^k$ qui, par hypothèse, est dans $\mathcal{F}$. On trouve $|g| \leq (1 - \rho'/\rho)^{-n}$ dans $\overline{S}(x, \rho')$, et cela quel que soit k, ce qui exige $|g| \leq 1$ dans $\overline{S}(x, \rho')$. Ainsi $|f| \leq M_\rho(f)$ dans $\overline{S}(x, \rho')$, et cela quel que soit $\rho' < \rho$; d'où à la limite $|f| \leq M_\rho(f)$ dans $\overline{S}(x, \rho)$.

Corollaire du théorème 1. Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes dans un domaine (E, φ) étalé dans C^n; supposons que $\mathcal{F}$ soit stable pour la différentiation par rapport aux coordonnées locales définies par φ. Désignons par $(\widetilde{E}, \widetilde{\varphi})$ l'un quelconque des domaines étalés suivants: le domaine d'holomorphie de la famille $\mathcal{F}$; le domaine de normalité de $\mathcal{F}$ supposée normale dans E; le domaine de bornologie de $\mathcal{F}$ supposée bornée dans E. Alors pour tout compact K contenu dans E, la distance de $K_{\mathcal{F}}$ à la frontière de $(\widetilde{E}, \widetilde{\varphi})$ est au moins égale à la distance de K à la frontière de E.

Remarque: nous nous dispensons une fois pour toutes d'envisager le cas où (E, φ) est le domaine de convergence uniforme d'une suite de fonctions de $\mathcal{F}$, suite supposée uniformément convergente dans E (c'est-à-dire, rappelons-le, uniformément convergente sur tout compact de E). En effet, le domaine de convergence uniforme n'est autre que le domaine de bornologie de la suite.

Nous pouvons maintenant trouver une condition nécessaire pour que soit remplie la condition 2° du lemme 1:

Théorème 2. Soit (E, φ) un domaine étalé dans C^n, et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes dans E (resp. une famille normalement convergente dans E, resp. une famille bornée dans E). Pour que E soit un revêtement du domaine d'holomorphie $(\widetilde{E}, \widetilde{\varphi})$ de la famille (resp. de son domaine de normalité, resp. de son domaine de bornologie), il faut (tout au moins lorsque la famille $\mathcal{F}$ est stable pour la différentiation par rapport aux coordonnées locales définies par φ) que soit vérifiée la condition suivante:

(Γ) pour tout compact K contenu dans E, la distance de $K_{\mathcal{F}}$ à la frontière de (E, φ) est égale à la distance de K à la frontière de (E, φ).

Cela résulte immédiatement de la condition 2° et du corollaire du théorème 1.

Dans ce qui suit, nous allons voir que, moyennant de légères restrictions au sujet de la famille $\mathcal{F}$, la condition (Γ) est aussi suffisante pour que E soit un revêtement de $\widetilde{E}$ ($\widetilde{E}$ ayant la signification de l'énoncé du théorème 2).

3. Cas des domaines de normalité et des domaines de bornologie.

Nous allons d'abord introduire une condition plus faible que la condition (Γ). Avant de l'énoncer, convenons de dire qu'un sous-ensemble fermé F de E <u>ne touche pas la frontière de</u> (E, φ) si, pour chaque point $x \in E$, le plus grand polydisque ouvert de centre x contenu dans E contient des points qui n'appartiennent pas à F. On observera qu'il suffit de poser cette condition pour des points x_k formant un ensemble partout dense dans E.

Il est clair que si la distance de F à la frontière de (E, φ) est $\neq 0$, F ne touche pas la frontière de (E, φ). Donc, si une famille $\mathcal{F}$ vérifie la condition (Γ) de la fin du n° 2, l'ensemble fermé $K_{\mathcal{F}}$ ne touche pas la frontière de (E, φ), quel que soit le compact $K \subset E$. Ainsi la condition (Γ) est plus forte que la suivante:

(Γ') <u>pour tout compact</u> K <u>contenu dans</u> E, <u>l'ensemble</u> $K_{\mathcal{F}}$ <u>ne touche pas la frontière de</u> (E, φ).

<u>Théorème</u> 3. <u>Soit</u> $\mathcal{F}$ <u>une famille de fonctions holomorphes dans</u> (E, φ) <u>et satisfaisant à la condition</u> (C) <u>du</u> n° 2 <u>et à la condition</u> (Γ'). <u>Alors il existe une sous-famille dénombrable</u> $\mathcal{F}'$ <u>de</u> $\mathcal{F}$, <u>qui converge normalement dans</u> E, <u>et est telle que, pour tout</u> $x \in E$, <u>le plus grand polydisque de centre</u> x <u>contenu dans</u> E <u>soit aussi le plus grand polydisque de centre</u> x <u>dans lequel</u> $\mathcal{F}'$ <u>est bornée; autrement dit</u>, E <u>est un revêtement du domaine de bornologie de</u> $\mathcal{F}'$, <u>et a fortiori du domaine de normalité de</u> $\mathcal{F}'$.

<u>Démonstration</u>: il suffit de montrer que, pour chacun des points x_i d'une suite dénombrable partout dense dans E, le plus grand polydisque S_i de centre x_i contenu dans (E, φ) est aussi le plus grand polydisque dans lequel la famille $\mathcal{F}$ à définir est bornée (rappelons que "bornée" signifie "bornée sur tout compact"). Considérons la suite des polydisques

$$S_1,\ S_2,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_1, \ldots$$

Notons Σ_p le p-ième terme de cette suite. Prenons une suite croissante de compacts K_p contenus dans E, telle que tout compact de E soit contenu dans l'un d'eux. Puisque la condition (Γ') est satisfaite il y a dans Σ_p au moins un point z_p qui n'appartient pas à $(K_p)_{\mathcal{F}}$. Puisque $\mathcal{F}$ satisfait à (C), il existe dans $\mathcal{F}$ une f_p telle que

$$|f_p| \leq 2^{-p} \text{ dans } K_p, \quad |f_p(z_p)| \geq 2^p .$$

Soit $\mathcal{F}'$ la suite des f_p; elle remplit évidemment les conditions voulues, et le théorème est démontré.

Complément au théorème 3: supposons que $\mathcal{F}$ satisfasse en outre à la condition: chaque fois que 2 points distincts x, y de E ont même image par φ il existe une fonction de $\mathcal{F}$ ayant des déterminations différentes en x et en y (autrement dit: l'application de E dans le domaine d'holomorphie de la famille $\mathcal{F}$ est biunivoque). Alors il existe une sous-famille dénombrable $\mathcal{F}''$ de $\mathcal{F}$, qui converge normalement dans E, et dont le domaine de bornologie (et a fortiori le domaine de convergence normale) est exactement (E, φ).

En effet, on a vu dans la démonstration du lemme 2 qu'il existe une suite de fonctions de $\mathcal{F}$ telle que l'application de E dans le domaine d'holomorphie de cette suite soit biunivoque. Par multiplication par des constantes convenables, on peut faire en sorte que la p-ième fonction de cette suite soit $\leq 2^{-p}$ dans K_p. Il suffit d'adjoindre cette suite à la famille $\mathcal{F}'$ du théorème 3, pour obtenir la famille $\mathcal{F}''$ cherchée.

Nous sommes conduits à poser la définition suivante:

Définition: soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes dans un domaine (E, φ) étalé dans $\mathbf{C}^n$. On dit que (E, φ) est faiblement $\mathcal{F}$-convexe (resp. fortement $\mathcal{F}$-convexe) si les deux conditions suivantes sont remplies:

1) l'application de E dans le domaine d'holomorphie de la famille $\mathcal{F}$ est biunivoque;

2) la condition (Γ') (resp. la condition (Γ)) est satisfaite.

Il est clair que si une famille $\mathcal{F}_2$ contient une famille $\mathcal{F}_1$, et si (E, φ) est $\mathcal{F}_1$-convexe (fortement, resp. faiblement), (E, φ) est a fortiori $\mathcal{F}_2$-convexe (fortement, resp. faiblement). D'autre part, toute "intersection" (au sens de 7, n° 4) de domaines fortement $\mathcal{F}$-convexes est fortement $\mathcal{F}$-convexe; on peut donc parler du "plus petit domaine fortement

$\mathcal{F}$-convexe" contenant un domaine étalé (E, φ), lorsque la famille $\mathcal{F}$ est holomorphe dans E; on l'appellera l'enveloppe fortement $\mathcal{F}$-convexe de (E, φ).

La confrontation des théoremès précédents conduit au résultat fondamental que voici:

Théorème 4. Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes dans (E, φ), satisfaisant à la condition (C), et stable pour la différentiation par rapport aux coordonnées locales définies par φ. Il y a équivalence entre les conditions suivantes:

(α) (E, φ) est fortement $\mathcal{F}$-convexe;

(β) (E, φ) est faiblement $\mathcal{F}$-convexe;

(γ) (E, φ) est le domaine de convergence normale d'une famille de fonctions de $\mathcal{F}$;

(δ) (E, φ) est le domaine de bornologie d'une famille de fonctions de $\mathcal{F}$.

Démonstration: (β) entraîne (γ) et (δ), d'après le complément au théorème 3. D'après le théorème 2, (γ) ou (δ) entraîne (α). Enfin, (α) entraîne trivialement (β).

Conséquence: Désormais, lorsque la famille $\mathcal{F}$ satisfera à la condition (C) et sera stable pour la différentiation par rapport aux coordonnées locales définies par φ, il ne sera pas utile de faire la distinction entre fortement et faiblement $\mathcal{F}$-convexe. On dira simplement: $\mathcal{F}$-convexe. Et l'on pourra parler de l'enveloppe $\mathcal{F}$-convexe d'un domaine étalé dans lequel les fonctions de $\mathcal{F}$ sont holomorphes. Toute famille de fonctions de $\mathcal{F}$, qui converge normalement dans E (resp. qui est bornée dans E) converge normalement dans l'enveloppe $\mathcal{F}$-convexe de (E, φ), resp. est bornée dans cette enveloppe $\mathcal{F}$-convexe.

4. Cas des domaines d'holomorphie.

Théorème 5. Soit $\mathcal{F}$ une algèbre de fonctions holomorphes dans E, fermée pour la convergence uniforme sur tout compact de E. Si (E, φ) est faiblement $\mathcal{F}$-convexe, il existe une $f \in \mathcal{F}$ telle que (E, φ) soit exactement le domaine d'holomorphie de f, et même le domaine de méromorphie de f.

Démonstration: on va d'abord fabriquer une $f \in \mathcal{F}$ jouissant de la propriété suivante: dans chaque S_k (notation de la démonstration du théorème 3), f possède des zéros dont les ordres de multiplicité sont arbitrairement grands. Il en résultera que S_k est le plus grand polydisque de centre x_k dans lequel la fonction f reste holomorphe, et même méromorphe (on verra en effet dans l'exposé 11 que si une fonction est méromorphe dans un ouvert, sur tout compact les ordres de multiplicité de ses zéros sont bornés). Dans ces conditions, E sera un revêtement du domaine d'holomorphie (et même du domaine de méromorphie) de f. Il restera ensuite à trouver une g holomorphe dans E, et telle que (E, φ) soit exactement son domaine d'holomorphie (resp. de méromorphie); pour cela, on applique le lemme 2 à l'espace vectoriel des fonctions de $\mathcal{F}$ qui sont divisibles par f, espace qui est fermé pour la convergence uniforme sur tout compact de E; on trouvera donc, parmi les multiples de f, une g telle que chaque fois que 2 points distincts x, y de E ont même image par φ, les déterminations de g en ces 2 points sont différentes. Alors (E, φ) sera exactement le domaine d'holomorphie (et même le domaine de méromorphie) de g.

Ainsi il nous reste seulement à prouver l'existence d'une fonction f qui, dans chaque polydisque S_k, possède des zéros dont les ordres de multiplicité ne sont pas bornés. Comme dans la démonstration du th. 3, introduisons la suite des polydisques Σ_p, suite dans laquelle chaque S_k figure une infinité de fois. Comme dans cette démonstration, nous fabriquons une $f_p \in \mathcal{F}$ telle que $|f_p| \leq 2^{-p}$ dans K_p, $f_p(z_p) = 1$. La fonction $(1 - f_p)^p$ appartient à l'algèbre $\mathcal{F}$, et s'annule au point $z_p \in \Sigma_p$ avec un ordre de multiplicité qui est un multiple de p. Le produit infini $\prod_p (1 - f_p)^p$ converge normalement sur tout compact de E, donc représente une fonction holomorphe f qui appartient à l'algèbre $\mathcal{F}$. Et cette fonction f remplit toutes les conditions voulues.

Corollaire du théorème 5: si $\mathcal{F}$ est une famille quelconque de fonctions holomorphes dans E, et si (E, φ) est faiblement $\mathcal{F}$-convexe, alors (E, φ) est un domaine d'holomorphie (i.e., le domaine d'holomorphie d'une certaine fonction).

Corollaire 2 du théorème 5: soit (E, φ) un domaine étalé dans C^n, et $\mathcal{F}$ l'algèbre de toutes les fonctions holomorphes dans E. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(α) (E, φ) est le domaine d'holomorphie d'une certaine fonction de $\mathcal{F}$;

(β) (E, φ) est $\mathcal{F}$-convexe;

(γ) (E, φ) est identique à son enveloppe d'holomorphie (définie en 7, n° 5).

En effet, (γ) entraîne (β) d'après le th. 2; le th. 5 montre que (β) entraîne (α); enfin, (α) entraîne (γ) trivialement.

On voit que toute enveloppe d'holomorphie est un domaine d'holomorphie (c'est-à-dire est le domaine d'holomorphie d'une certaine fonction). On voit aussi que si $\mathcal{F}$ est l'algèbre de toutes les fonctions holomorphes dans une variété analytique-complexe E, susceptible d'être étalée dans C^n, la notion de $\mathcal{F}$-convexité de E est indépendante de la réalisation de E comme domaine étalé dans C^n: on a vu en effet (7, coroll. du th. 2) que la notion d'enveloppe d'holomorphie est indépendante de cette réalisation.

Corollaire 3 du théorème 5: tout domaine de convergence normale, tout domaine de bornologie, est un domaine d'holomorphie (car un tel domaine est $\mathcal{F}$-convexe, $\mathcal{F}$ désignant l'algèbre de toutes les fonctions holomorphes dans ce domaine).

5. Sur l'enveloppe d'holomorphie de certaines catégories de domaines étalés.

Théorème 6. Soit (E, φ) un domaine étalé dans C^n, et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes dans E, stable pour la différentiation par rapport aux coordonnées locales définies par φ, et jouissant de la propriété suivante:

(APPR) toute fonction holomorphe dans E est limite (uniforme sur tout compact) d'une suite de fonctions de $\mathcal{F}$, resp. est somme d'une série normalement convergente de fonctions de $\mathcal{F}$. Alors l'enveloppe d'holomorphie de (E, φ) n'est autre que l'enveloppe fortement $\mathcal{F}$-convexe de (E, φ).

En effet, soit $(\tilde{E}, \tilde{\varphi})$ cette enveloppe fortement $\mathcal{F}$-convexe. C'est un domaine d'holomorphie; il suffit donc de montrer que toute f holomorphe dans E se prolonge dans $(\tilde{E}, \tilde{\varphi})$. Or f est limite d'une suite uniforme, convergente de fonctions de $\mathcal{F}$, resp. est somme d'une série normalement convergente de fonctions de $\mathcal{F}$; et, d'après le th. 2, la convergence a lieu dans $(\tilde{E}, \tilde{\varphi})$.

C.Q.F.D.

Remarque: si $\mathcal{F}$ satisfait en outre à la condition (C), il n'y a pas besoin, dans l'énoncé précédent, de spécifier "fortement" $\mathcal{F}$-convexe, puisqu'alors il n'y a qu'une seule notion de $\mathcal{F}$-convexe (th. 4).

Le théorème 6 est susceptible de nombreuses applications: par ex., si dans (E, φ) toute fonction holomorphe est limite de polynômes (unif. sur tout compact), l'enveloppe d'holomorphie de (E, φ) est univalente. Pour d'autres applications, nous renvoyons au mémoire de Cartan-Thullen cité en 7, d'où l'essentiel du présent exposé a été tiré.