H. Cartan

Domaines d'holomorphie

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. n° 7, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A7_0>

DOMAINES D'HOLOMORPHIE

(Exposé de H. Cartan, 21-1-1952)

1. Prolongement analytique, en général.

Pour la notion de variété analytique-complexe (de dimension complexe n, quelconque), voir Exp. 1, n° 4. Sauf mention du contraire, toutes les variétés analytiques-complexes seront supposées connexes. Une application continue f d'une E dans une F (E et F variétés anal.-compl.) est analytique si, pour tout point $x \in E$, les coordonnées locales au voisinage du point $f(x)$ sont des fonctions analytiques (i.e., holomorphes) des coordonnées locales au voisinage de x. Soit $\mathcal{H}(E, F)$ l'ensemble des applications analytiques de E dans F.

Si φ est une application anal. de E dans E', associons à toute $f \in \mathcal{H}(E', F)$ l'application f^* de E dans F, égale à la composée $f \circ \varphi$. Ceci définit une application φ^*: $\mathcal{H}(E', F) \to \mathcal{H}(E, F)$, "transposée" de φ. Si l'image $\varphi(E)$ de E dans E' contient un ouvert non vide, l'application φ^* est biunivoque. En effet, si f et g sont des applications analytiques de E' dans F, telles que $f^* = g^*$, f et g sont égales sur un ouvert non vide de E', donc sont égales dans tout E'.

Définition: une $f^* \in \mathcal{H}(E, F)$ sera dite prolongeable relativement à φ si f^* est dans l'image de φ^*: $\mathcal{H}(E', F) \to \mathcal{H}(E, F)$, autrement dit s'il existe une $f \in \mathcal{H}(E', F)$ telle que $f \circ \varphi = f^*$. Une telle f est alors unique, si l'application φ est ouverte (i.e., l'image d'un ouvert est un ouvert); la fonction f s'appelle le prolongement analytique de f^*, relativement à φ.

On a des notiens et résultats analogues dans d'autres cas. Par exemple, au lieu de considérer les applications analytiques dans une F, considérons les fonctions méromorphes; si deux fonctions méromorphes dans E coïncident dans un ouvert non vide de E, elles sont identiques. Par conséquent, si φ est une application analytique ouverte de E dans E', on a la notion de prolongement d'une fonction méromorphe dans E, relativement à φ; le prolongement est une fonction méromorphe dans E', qui est unique si elle existe.

Exemples: 1) supposons E et E' de même dimension, φ étant un homéomorphisme (analytique) de E sur un ouvert de E'; E s'identifie à un ouvert de E', et on retrouve la notion habituelle de prolongement analytique (prolongement d'une fonction analytique dans E, en une fonction analytique dans E').

2) E est le plan C d'une variable complexe x, E' est C privé de 0, $\varphi(x) = e^{2\pi i x}$. L'application φ est localement biunivoque, mais pas biunivoque. Pour qu'une fonction f^* définie dans E se prolonge suivant φ, il faut et il suffit qu'elle admette la période 1.

3) E est un "tore dégénéré" (cf. 5, n° 1); E' est le tore non dégénéré associé, φ est l'application canonique de E sur son quotient E'. Il a été prouvé que toute fonction méromorphe sur E "se prolonge" suivant φ (c'est-à-dire provient d'une fonction méromorphe sur E', fonction que l'on obtient en passant au quotient suivant φ).

2. Domaines étalés.

On suppose désormais que $\varphi: E \to E'$ est un homéomorphisme local: tout point $x \in E$ possède un voisinage ouvert V tel que la restriction de φ à V soit un homéomorphisme sur un voisinage ouvert de $\varphi(x)$. Alors tout système de coordonnées locales au point $\varphi(x)$ est un système de coordonnées locales pour le point x; l'application φ et la structure analytique-complexe de E' déterminent la structure analytique-complexe de E. Le couple (E, φ) s'appelle un domaine étalé dans E'. On notera que si E' est réunion dénombrable de compacts, il en est de même de E (théorème classique).

Etant donnée une variété analytique-complexe E, on va définir une relation d'ordre dans l'ensemble des φ qui étalent E (dans une E' non donnée à l'avance; il n'y a pas d'inconvénient à parler de cet "ensemble").

D'une façon précise: si φ étale E dans F, et φ' étale E dans F', on dira que φ' majore φ s'il existe une ψ étalant F dans F', et telle que $\varphi' = \psi\circ\varphi$; alors ψ est unique (n° 1). On voit sans peine ceci: si φ majore φ', et φ' majore φ, alors φ et φ' sont isomorphes (dans un sens qu'on laisse au lecteur le soin de préciser). A ce titre, on peut donc bien dire que la relation "φ' majore φ" est une relation d'ordre.

3. Prolongement analytique au-dessus d'une B analytique-complexe.

Soit B une variété analytique-complexe donnée une fois pour toutes. On se donne une (E, φ) étalée dans B, et une application analytique $f \in \mathcal{H}(E, F)$ (où F désigne une variété anal-compl. fixe). On considère seulement les prolongements analytiques de f (au sens du n° 1) par rapport à des ψ: $E \to E'$ qui étalent E dans E' et sont majorées par φ. Autrement dit, un prolongement de f au-dessus de B se compose: 1) d'une ψ étalant E dans E' et d'une λ étalant E' dans B, de manière que $\varphi = \lambda\circ\psi$; 2) d'une $\overline{f} \in \mathcal{H}(E', F)$ telle que $f = \overline{f}\circ\psi$. La donnée de ψ détermine λ et $\overline{f}$ si elles existent.

Théorème 1. *B étant donnée, ainsi que le domaine (E, φ) étalé dans B, et l'application $f \in \mathcal{H}(E, F)$, il existe, dans l'ensemble des ψ qui étalent E, sont majorées par φ, et par rapport auxquelles f se prolonge, un élément qui majore tous les autres.*

On va définir une variété X_0, une application ψ_0 étalant E dans X_0, une λ_0 étalant X_0 dans B, et une $f_0 \in \mathcal{H}(X_0, F)$, de manière que: (a) on ait $\varphi = \lambda_0\circ\psi_0$ et $f = f_0\circ\psi_0$; (b) chaque fois qu'on a une ψ étalant E dans un E', une λ étalant E' dans B, et une $\overline{f} \in \mathcal{H}(E', F)$, telles que $\varphi = \lambda\circ\psi$ et $f = \overline{f}\circ\psi$, il existe une g étalant E' dans X_0 de manière que $\psi_0 = g\circ\psi$, $\lambda = \lambda_0\circ g$ et $\overline{f} = f_0\circ g$. Toutes ces compatibilités sont illustrées par le diagramme "commutatif" suivant:

$$\begin{tikzcd}
& E' \arrow[dl, "\overline{f}"'] \arrow[dr, "\lambda"] \arrow[dd, bend left, "g"] & \\
F & E \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[u, "\psi"] \arrow[d, "\psi_0"'] & B \\
& X_0 \arrow[ul, "f_0"] \arrow[ur, "\lambda_0"'] &
\end{tikzcd}$$

Voici la définition de X_0, ψ_0, λ_0 et f_0. Soit d'abord X l'espace topologique dont chaque point est un couple (b, h), où b est un point de B et h une application analytique dans F, d'un voisinage de b (on identifie deux telles applications quand elles coïncident dans un voisinage assez petit de b). La topologie de X est définie comme suit: à chaque couple formé d'un ouvert V de B et d'une application analytique h de V dans F, on associe l'ensemble des couples (b, h), où b parcourt V; les parties de X ainsi définies constituent par définition, un système fondamental d'ouverts pour la topologie de X. La topologie de X est <u>séparée</u>: si $(b_1, h_1) \neq (b_2, h_2)$, les points (b_1, h_1) et (b_2, h_2) possèdent deux voisinages ouverts sans point commun; c'est clair si $b_1 \neq b_2$, et si $b_1 = b_2$ cela résulte du fait suivant: deux applications <u>analytiques</u> h_1 et h_2 d'un voisinage ouvert connexe de b_1 ne peuvent coïncider au voisinage d'un point sans être identiques.

Définissons une application Λ de X dans B: celle qui, au couple (b, h), associe le point b. C'est un homéomorphisme local; il définit sur X une structure de variété analytique-complexe (à cela près que X n'est pas nécessairement connexe). Noter que X est bien une variété parce que X est un espace topologique <u>séparé</u> (il ne suffirait pas d'avoir prouvé que chaque point possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de l'espace numérique).

Définissons une application h de X dans F: celle qui, au couple (b, h), associe la valeur $h(b)$ de la fonction h au point b. Il est clair que h est analytique. Enfin, soit Ψ l'application de E dans X qui, à chaque point $x \in E$, associe le couple $(\varphi(x), h)$, h étant l'unique application (dans F) d'un voisinage de $\varphi(x)$, telle que $f = h \circ \varphi$

au voisinage de x. On voit que Ψ est un homéomorphisme local, que $f = h \circ \Psi$ et $\Lambda \circ \Psi = \varphi$.

Cela étant, soit X_0 la composante connexe de X qui contient l'image (connexe) de E par Ψ. Soit ψ_0 l'application de E dans X_0 définie par Ψ, soit λ_0 la restriction de Λ à X_0, et f_0 la restriction de h à X_0. Alors X_0, ψ_0, λ_0 et f_0 satisfont à toutes les conditions requises, et le théorème est démontré.

Définition: le domaine (X_0, λ_0) étalé dans B, muni de l'application ψ_0 étalant E dans X_0, et de l'application analytique f_0 de X_0 dans F, s'appelle le prolongement analytique maximum, au-dessus de B, de l'application f de E dans F, relativement à l'application φ étalant E dans B.

Un théorème analogue au théorème 1, et une définition analogue à celle-ci, existent pour une fonction f méromorphe (au lieu d'une application analytique dans F). Le lecteur fera lui-même la substitution des termes.

4. Prolongement analytique simultané.

Reprenons, comme au n° précédent, une (E, φ) étalée dans B. Donnons-nous cette fois une famille d'applications analytiques $f_i \in \mathcal{H}(E, F_i)$, i parcourant un ensemble d'indices I. Un prolongement de la famille (f_i) se compose: 1) d'une ψ étalant E dans E' et d'une λ étalant E' dans B, de manière que $\varphi = \lambda \circ \psi$; 2) d'une famille de $\overline{f}_i \in \mathcal{H}(E', F_i)$ telles que $f_i = \overline{f}_i \circ \psi$. La donnée de ψ détermine λ et les $\overline{f}_i$ si elles existent.

Théorème 1 bis. B étant donnée, ainsi que le domaine (E, φ) étalé dans B et les applications $f_i \in \mathcal{H}(E, F_i)$, il existe, dans l'ensemble des ψ qui étalent E, sont majorées par φ, et par rapport auxquelles les f_i se prolongent, un élément qui majore tous les autres.

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 1. On définit d'abord un espace X, dont les points sont les systèmes (b, h_i), où b est un point de B, et (h_i) un système (indexé par I) d'applications dans F_i, définies et analytiques dans un même voisinage de b. On convient d'identifier (b, h_i) et (b, h'_i) s'il existe un voisinage assez petit de b dans lequel h_i et h'_i coïncident pour tout i. La fin de la démonstration est laissée au lecteur.

On définit alors le prolongement analytique simultané maximum, au-dessus de B, de la famille d'applications f_i, relativement à l'application φ étalant E dans B.

Voici un cas particulier: celui où les f_i étalent E et sont majorées par φ. On a donc, pour chaque i, une g_i étalant F_i dans B, de manière que $g_i \circ f_i = \varphi$. Le théorème 1 bis affirme alors que les f_i ont une borne inférieure, sous la forme d'une f étalant E dans un F lui-même étalé dans B par une g, de manière que $g \circ f = \varphi$. F s'étale dans F_i suivant une k_i donnant lieu au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & F_i \arrow[dr, "g_i"] & \\
E \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f"'] & & B \\
 & F \arrow[uu, "k_i"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Le domaine (F, g) étalé dans B, muni des applications k_i et de l'application f étalant E dans F, s'appellera l'intersection des domaines étalés (F_i, g_i), relativement au domaine E étalé dans chaque F_i (par f_i). Cette notion a d'ailleurs un caractère purement topologique, et pourrait être définie indépendamment de toute structure analytique.

Remarque: soit $\alpha\colon E' \to E$ une application (analytique) localement biunivoque; et soit $E' \to B$ l'application composée de α et de l'application φ de E dans B. Soit I une famille de fonctions analytiques dans E (appliquant E dans des F_i), et soit X_0 le domaine de prolongement analytique simultané maximum des fonctions de I au-dessus de B (X_0 est muni d'une application de E dans X_0, et s'envoie lui-même dans B). Alors X_0, muni de l'application $E' \to X_0$ composée de α et de $E \to X_0$, est le domaine de prolongement analytique simultané de la famille I' des fonctions, analytiques dans E', "induites" sur E' par les fonctions de I (relativement à l'application α de E' dans E). Ce résultat est clair, d'après la démonstration du théorème 1 bis.

5. Enveloppe d'holomorphie

Désormais, par fonction holomorphe nous entendrons une application analytique à valeurs dans le plan C d'une variable complexe. Soit E une variété analytique-complexe susceptible d'être étalée dans C^n. Choisissons une application analytique φ qui étale E dans C^n, et considérons le prolongement analytique maximum, au-dessus de C^n, de la famille de toutes les fonctions holomorphes dans E, relativement à l'application φ étalant E dans C^n. On a donc un domaine $(\tilde{E}, \tilde{\varphi})$ étalé dans C^n, une application g étalant E dans $\tilde{E}$, (avec $\varphi = \tilde{\varphi}\circ g$), et des fonctions holomorphes dans $\tilde{E}$ et qui prolongent respectivement (relativement à g) les fonctions holomorphes dans E. Observons que $\tilde{\varphi}$ n'est autre que le prolongement analytique de φ (relativement à g).

La variété $\tilde{E}$, munie de l'application g de E dans $\tilde{E}$, s'appelle l'enveloppe d'holomorphie de E; a priori, ceci dépend de l'application φ qui étale E dans C^n, mais on va voir qu'en réalité g et $\tilde{E}$ sont uniques (à une isomorphie près). Prouvons d'abord:

Théorème 2. *Soient (E, φ) et (E', φ') étalées dans C^n; soient $\tilde{E}$ et $\tilde{E}'$ leurs enveloppes d'holomorphie, g l'application de E dans $\tilde{E}$, g' l'application de E' dans $\tilde{E}'$. Pour toute application analytique f étalant E dans E',* (on n'exige pas que $\varphi = \varphi'\circ f$), *il existe une application analytique $\tilde{f}$ (et une seule) étalant $\tilde{E}$ dans $\tilde{E}'$, de manière que* $g'\circ f = \tilde{f}\circ g$, ce qui exprime la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & E' \arrow[d, "g'"] \\ \tilde{E} \arrow[r, "\tilde{f}"] & \tilde{E}' \end{tikzcd} .$$

L'unicité résulte du n° 1. Pour prouver l'existence de f, considérons l'application $\varphi' \circ f$ qui étale E dans C^n. Puisque $\tilde{E}$ (muni de l'application g de E dans $\tilde{E}$) est l'enveloppe d'holomorphie de E, il existe une application analytique λ et une seule de $\tilde{E}$ dans C^n, telle que $\lambda \circ g = \varphi' \circ f$. Je dis que λ <u>étale</u> $\tilde{E}$ dans C^n; pour le voir, prenons dans $\tilde{E}$ les coordonnées locales définies par l'application $\tilde{\varphi}$ (qui prolonge φ relativement à g), et montrons que, pour ces coordonnées locales, le jacobien $\tilde{J}$ de l'application λ est partout $\neq 0$. Or le jacobien J de $\varphi' \circ f$ (si on prend dans E les coordonnées locales définies par φ) est $\neq 0$ en tout point de E, puisque $\varphi' \circ f$ est localement biunivoque; ainsi $1/J$ est holomorphe dans E, donc se prolonge à $\tilde{E}$ (relativement à g); ce prolongement est forcément $1/\tilde{J}$, donc $\tilde{J}$ est $\neq 0$ en tout point de $\tilde{E}$.

Considérons maintenant les applications localement biunivoques $E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{g'} \tilde{E}' \xrightarrow{\tilde{\varphi}'} C^n$ (avec $\tilde{\varphi}' \circ g' = \varphi'$). Appliquons la remarque de la fin du n° 4, en y remplaçant E', E, X_0 et B respectivement par E, E', $\tilde{E}'$ et C^n. On voit que la famille des fonctions holomorphes induites sur E par les fonctions holomorphes dans E' ("induites" relativement à l'application f de E dans E') admet $\tilde{E}'$ comme domaine de prolongement analytique simultané maximum ($\tilde{E}'$ étant muni de $g' \circ f$: $E \to \tilde{E}'$ et de $\tilde{\varphi}'$: $\tilde{E}' \to C^n$). Or ces fonctions se prolongent à $\tilde{E}$ suivant g; alors l'existence de l'application localement biunivoque λ: $\tilde{E} \to C^n$ (qu'on a démontrée plus haut) entraîne l'existence d'une application localement biunivoque $\tilde{f}$ de $\tilde{E}$ dans $\tilde{E}'$, telle que $\tilde{f} \circ g = g' \circ f$. Et ceci démontre le théorème.

Si on a trois domaines étalés dans C^n, soient E, E' et E'', une application f qui étale E dans E' et une application f' qui étale E' dans E'', on aura, d'après le théorème 2, des applications $\tilde{f}$ de $\tilde{E}$ dans $\tilde{E}'$, et $\tilde{f}'$ de $\tilde{E}'$ dans $\tilde{E}''$, telles que le diagramme soit commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & E' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & E'''' \arrow[d, "g''"] \\ \tilde{E} \arrow[r, "\tilde{f}"] & \tilde{E}' \arrow[r, "\tilde{f}'"] & \tilde{E}'' \end{tikzcd}$$

Il en résulte que l'application $\tilde{f}'\circ\tilde{f}$ de $\tilde{E}$ dans $\tilde{E}''$ est celle que le théorème 2 associe à l'application $f'\circ f$ de E dans E''. En particulier, si $E'' = E$, et si $f'\circ f$ est l'identité, alors $\tilde{f}'\circ\tilde{f}$ est l'identité. D'où:

Corollaire du théorème 2: dans les hypothèses de ce théorème, si f est un isomorphisme de E sur E', $\tilde{f}$ est un isomorphisme de $\tilde{E}$ sur $\tilde{E}'$. (Ceci prouve bien que la notion d'enveloppe d'holomorphie de E est indépendante, à un isomorphisme près, de la réalisation de E comme domaine étalé dans C^n.)

6. Exemples d'enveloppes d'holomorphie.

1) Soit E étalé par $\varphi = (\varphi_1,\ldots, \varphi_n)$ dans C^n, et invariant par un groupe de transformations $T(\alpha_1,\ldots, \alpha_n)$ dépendant de n paramètres angulaires α_k ($0 \leq \alpha_k \leq 2\pi$; autrement dit, le groupe est un tore T^n), telles que $\varphi_k(T(\alpha_1,\ldots, \alpha_n)\cdot x) = e^{i\alpha_k}\,\varphi_k(x)$. Alors l'enveloppe d'holomorphie est invariante par ce même groupe; si en outre E contient au moins un point que φ envoie à l'origine, alors $\tilde{E}$ est univalent (c'est-à-dire: $\tilde{\varphi}$ est biunivoque): cela tient à ce que toute fonction holomorphe dans E est développable, dans E, en série entière suivant les $\varphi_k(x)$. De plus, $\tilde{E}$ étant désormais identifié à un ouvert (connexe) de C^n, si on représente les points $(x_1,\ldots, x_n)$ de $\tilde{E}$ par les points

$$(\log|x_1|,\ldots, \log|x_n|) \text{ de l'espace } R^n,$$

l'ensemble représentatif est un ouvert convexe de R^n.

2) si E est un tube de l'espace C^n, c'est-à-dire un ensemble ouvert (connexe) défini par la condition que $(\mathrm{Im}(x_1),\ldots, \mathrm{Im}(x_n))$ soit dans un ouvert connexe D de R^n (les $\mathrm{Re}(x_k)$ étant arbitraires), alors l'enveloppe d'holomorphie de E n'est autre que le tube défini par l'ouvert $\overline{D}$, enveloppe convexe de D. (sans démonstration ici).

3) dans l'exemple 1), $(\tilde{E}, \tilde{\varphi})$ est univalent, sans que (E, φ) le soit nécessairement. Inversement, il se peut que (E, φ) soit univalent et que $(\tilde{E}, \tilde{\varphi})$ ne le soit pas (ce qui montre que la théorie des enveloppes d'holomorphie ne pouvait pas être faite en se bornant à considérer des domaines univalents).

Voici un exemple: soit, pour 2 variables complexes x, y, l'ouvert E, réunion de

(I) $$-3 < \mathrm{Re}(x) < 0, \quad |y| < e^{\mathrm{Re}(x)}$$

(II) $$0 \leq \mathrm{Re}(x) < 3, \quad e^{-1/\mathrm{Re}(x)} < |y| < 1 .$$

D'après un théorème de Hartogs, toute fonction holomorphe dans E se prolonge dans $\tilde{E}$ contenant, outre (I), les points de

(II)' $$0 \leq \mathrm{Re}(x) < 3, \quad |y| < 1 .$$

Soit alors $\varphi(x) = \exp(i \frac{\pi}{2} x)$. L'application $(x, y) \to (\varphi(x), y)$ est biunivoque dans E, mais pas dans $\tilde{E}$.

7. Domaines de convergence, etc.

Soit une famille de fonctions f_i holomorphes dans E; on dit que $\Sigma_i f_i$ converge normalement dans E si, sur tout compact de E, les fonctions $|f_i|$ sont majorées par des constantes a_i telles que $\Sigma_i a_i$ soit fini. On sait que, dans ces conditions, la somme $\Sigma_i f_i$ est holomorphe. On définit de même la convergence uniforme d'une suite de fonctions g_n (on entend par là: convergence uniforme sur tout compact de E); si les g_n sont holomorphes, leur limite est alors holomorphe. Enfin, nous dirons qu'une famille de f_i est bornée dans E si sur chaque compact de E les f_i sont inférieures à un nombre fini fixe.

Cela étant, plaçons-nous dans les conditions du n° 4: on se donne (E, φ) étalé dans B. De même qu'on a défini le prolongement maximum au-dessus de B, d'une famille de f_i holomorphes dans E, de même on peut définir les notions suivantes: pour une famille de f_i holomorphes dans E on définit un prolongement maximum de E, au-dessus de B, et dans lequel la famille des f_i est normalement convergente (cette définition est rendue possible par un théorème analogue au th. 1 bis, et de démonstration toute pareille). On définit de même le prolongement maximum de E (au-dessus de B) dans lequel est uniformément convergente une suite de fonctions holomorphes dans E, et uniformément convergente dans E. Enfin, étant donné une famille bornée dans (E, φ), on définit le prolongement maximum de E au-dessus de B, dans lequel la famille reste bornée.

Dans chacun des 3 cas, le prolongement maximum s'identifie à un sous-ensemble ouvert connexe du domaine étalé (E', φ'), obtenu par prolongement analytique simultané des fonctions considérées. Par abus de langage, on dira: "domaine de convergence normale" d'une famille de fonctions (sous-entendu: relativement à l'application φ qui étale E dans B), "domaine de convergence uniforme" d'une suite de fonctions; "domaine de bornologie" d'une famille de fonctions.

Bibliographie

H. CARTAN et P. THULLEN, Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen, Math. Annalen, 106 (1932), p. 617-647.

F. HARTOGS, Ueber analytische Funktionen mehrerer Veränd, Math. Annalen, 62 (1906), p. 1-88.