H. Cartan

Fonctions thêta sur le tore, II

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. n° 4, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A4_0>

FONCTIONS THÊTA SUR LE TORE, II

(Exposé de H. Cartan, 17-12-1951).

Les notations de l'exposé précédent (3) étant conservées, nous nous proposons essentiellement, dans cet exposé, de prouver le:

Théorème 3. Soient données: 1° une fonction $L(x, y)$, $\mathbf{C}$-linéaire en x et $\mathbf{R}$-linéaire en y, telle que

$$\varphi(x, y) = L(x, y) - L(y, x)$$

soit à valeurs entières quand x et y appartiennent à Γ, et que

$$\varphi(x, Jx) > 0 \quad \text{pour} \quad x \neq 0;$$

2° une fonction $\mathbf{R}$-linéaire $K(y)$. Alors l'espace $\mathbf{C}$-vectoriel des fonctions thêta (holomorphes) relatives à $L(x, y)$ et $K(y)$, c'est-à-dire des fonctions holomorphes $F(x)$ satisfaisant à

(1) $$F(x+u) = F(x)e^{-2\pi i(L(x,u)+\frac{1}{2}L(u,u)+K(u))} \quad \text{pour} \quad u \in \Gamma ,$$

a une dimension (complexe) non nulle, égale au "pfaffien" de la forme $\varphi(x, y)$ rapportée à une base de Γ .

Rappelons la définition du pfaffien: si l'on rapporte la forme bilinéaire alternée $\varphi(x, y)$ à une base du groupe Γ, son discriminant (i.e., le déterminant de ses coefficients qui sont entiers) est le carré d'un entier ≥ 0; cet entier est le pfaffien; il ne dépend pas du choix de la base.

1. Choix d'une base du groupe Γ.

Lemme (classique). Etant donnée une forme bilinéaire alternée $\varphi(x, y)$ à valeurs entières sur le groupe Γ de rang $2n$, il existe une base $(e_1, \dots, e_n; t_1, \dots, t_n)$ de Γ, telle que

(2) $$\begin{cases} \varphi(e_j, e_k) = 0 \quad \varphi(t_j, t_k) = 0 \text{ quels que soient } j \text{ et } k, \\ \varphi(e_j, t_k) = 0 \text{ si } j \neq k, \quad = d_k \text{ si } j = k, \end{cases}$$

les entiers d_k étant ≥ 0, avec $d_1 | d_2 | \cdots | d_n$.

Le pfaffien est alors égal au produit $d_1 d_2 \cdots d_n$, et les entiers

d_k sont tous $\neq 0$ si le discriminant de φ est $\neq 0$ ce qui est notamment le cas si la forme hermitienne associée $\Phi(x, x)$ est strictement positive pour $x \neq 0$.

Démonstration du lemme: si $\varphi \not\equiv 0$, soit d_1 la plus petite des valeurs > 0 prises par $\varphi(u, v)$ pour $u \in \Gamma$, $v \in \Gamma$. On a donc $e_1 \in \Gamma$ et $t_1 \in \Gamma$, avec $\varphi(e_1, t_1) = d_1$. Pour tout $u \in \Gamma$, $\varphi(u, t_1)$ est multiple de d_1: on le voit en considérant $\varphi(u - \lambda e_1, t_1)$, λ étant un entier tel que $|\varphi(u, t_1) - \lambda d_1| < d_1$. De même, $\varphi(e_1, v)$ est multiple de d_1, pour tout $v \in \Gamma$. Tout $u \in \Gamma$ s'écrit alors d'une seule manière

$$u = n_1 e_1 + m_1 t_1 + v ,$$

où n_1 et m_1 sont entiers, et v est conjugué de e_1 et t_1 par rapport à φ (i.e., $\varphi(e_1, v) = \varphi(t_1, v) = 0$). On poursuivra donc la réduction de φ dans le sous-groupe Γ_1 (de rang $2n-2$) conjugué de e_1 et t_1; or, pour $u \in \Gamma_1$ et $v \in \Gamma_1$, $\varphi(u, v)$ est multiple de d_1, car

$$\varphi(u+\lambda e_1, v+t_1) = \varphi(u, v) + \lambda d_1 ,$$

ce qui permet de choisir l'entier λ de manière que le premier membre soit $< d_1$ en valeur absolue, donc nul.

Dans le sous-groupe Γ_1, on est ramené au même problème qu'initialement; il se résout trivialement si la restriction de φ à Γ_1 est nulle, sinon l'entier d_1 a été remplacé par un entier d_2 multiple de d_1. On obtient donc le lemme, par récurrence sur l'entier n.

2. Transformation des conditions du problème.

Choisissons désormais une base $(e_1, \ldots, e_n; t_1, \ldots, t_n)$ de Γ, comme il est dit dans le lemme. C'est aussi une $\mathbf{R}$-base de l'espace E. Soit A le $\mathbf{R}$-sous-espace engendré par $e_1, \ldots, e_n$; et B le $\mathbf{R}$-sous-espace engendré par $t_1, \ldots, t_n$. Je dis que E est somme directe du sous-espace A et du sous-espace JA engendré par $Je_1, \ldots, Je_n$, — tout au moins si $\varphi(x, Jx) > 0$ pour tout $x \neq 0$ (ce que nous supposerons désormais). Il suffit de montrer que $A \cap (JA) = \{0\}$; or si un $x \in E$ est tel que $x \in A$ et $Jx \in A$, on a $\varphi(x, Jx) = 0$ d'après (2), d'où $x = 0$.

Prenons donc $e_1, \dots, e_n$ comme <u>base</u> de E pour la structure vectorielle complexe. Alors les éléments $t_1, \dots, t_n$ de la base de Γ ont des coordonnées <u>complexes</u> τ_{jk}:

(3) $$t_j = \sum_k \tau_{jk} e_k \ .$$

On peut transformer le problème en multipliant les $F(x)$ cherchées par une même fonction thêta triviale. On peut donc modifier la fonction $L(x, y)$ donnée, en en retranchant une forme $\mathbf{C}$-bilinéaire symétrique $G_2(x, y)$. Or une telle G_2 est déterminée par la donnée des nombres complexes $G_2(e_j, e_k)$; posons

$$G_2(e_j, e_k) = L(e_j, e_k) \quad ;$$

on a bien $G_2(e_j, e_k) - G_2(e_k, e_j) = L(e_j, e_k) - L(e_k, e_j) = \varphi(e_j, e_k) = 0$ d'après (2). En retranchant G_2 de L, on se ramène donc au cas où

(4) $$L(e_j, e_k) = 0 \ ;$$

cela revient à dire que

(4') $$L(x, y) = 0 \quad \text{pour} \quad y \in A$$

(i.e., y combinaison $\mathbf{R}$-linéaire des e_j), quel que soit x.

D'une façon précise, la fonction $L(x, y)$, qui est $\mathbf{C}$-linéaire en x, est déterminée par les conditions (4) ou (4'), et par

(5) $$L(e_j, t_k) = \delta_{jk}\, d_k \quad (= \varphi(e_j, t_k) \ \text{d'après (4')}),$$

où δ_{jk} désigne le symbole de Kronecker. Exprimons que $\varphi(t_j, t_k) = 0$:

(6) $$L(t_j, t_k) = L(t_k, t_j) \quad ;$$

ceci veut dire que, pour x et y dans le $\mathbf{R}$-sous-espace B engendré par $t_1, \dots, t_n$, la forme $\mathbf{R}$-linéaire $L(x, y)$ (à valeurs complexes) est <u>symétrique</u>. D'ailleurs, $L(t_j, t_k) = d_k\, \tau_{jk}$ d'après (3) et (2); donc la condition (6) exprime que <u>la matrice</u> (complexe)

$$\{d_k\, \tau_{jk}\}$$

<u>est symétrique</u>.

Il reste à exprimer l'hypothèse suivant laquelle $\varphi(x, Jx) = \Phi(x, x)$ est > 0, $x \neq 0$. Or la forme hermitienne $\Phi(x, y)$ est déterminée par les $\Phi(e_j, e_k)$, qui sont réels puisque $\varphi(e_j, e_k) = 0$ en vertu de (2). Il suffira donc d'écrire que $\Phi(x, x) > 0$ quand $x \neq 0$ appartient au $\mathbf{R}$-sous-espace A engendré par $e_1, \ldots, e_n$. On va transformer cette condition: chaque $y \in B$ se décompose d'une seule manière:

$$y = y' + Jy'', \quad \text{avec} \quad y' \in A, \quad y'' \in A ;$$

et l'application $y \to y''$ est une application linéaire biunivoque de B sur A (pour le voir, il suffit de vérifier qu'elle est biunivoque; or $y'' = 0$ entraîne $y = y'$, et comme $A \cap B = \{0\}$, cela implique $y = 0$). Bref, il suffit d'exprimer que $\varphi(y'', Jy'') > 0$ pour tout y non nul de B. Or $\varphi(y'', Jy'') = \varphi(y'', y)$ puisque $\varphi(y'', y') = 0$ d'après (2); et $\varphi(y'', y) = L(y'', y)$ puisque $L(y, y'') = 0$ d'après (4'). Enfin, $L(y, y) = L(y', y) + iL(y'', y)$, d'où finalement

$$\varphi(y'', Jy'') = \operatorname{Im} L(y, y).$$

Ainsi: sur le sous-espace B engendré par $t_1, \ldots, t_n$, la forme $\mathbf{R}$-bilinéaire symétrique $L(x, y)$, de matrice $\{d_k \tau_{jk}\}$, a pour partie imaginaire une forme définie positive.

3. Théorème d'existence des fonctions thêta.

Compte tenu des transformations qui précèdent, le théorème 3 se trouve ramené au suivant:

Théorème 3 bis. On donne une $\mathbf{C}$-base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de l'espace E, un système de n vecteurs $t_1, \ldots, t_n$, et un système de n entiers $d_k > 0$, satisfaisant aux conditions suivantes: si l'on pose

$$t_j = \sum_k \tau_{jk} e_k \quad , \tag{3}$$

la matrice (complexe) $\{d_k \tau_{jk}\}$ est symétrique, et sa partie imaginaire est définie positive. Alors les fonctions $F(x)$, holomorphes dans E, et telles que

$$(\alpha) \quad F(x+e_j) = F(x); \qquad (\beta) \quad F(x+t_k) = F(x) e^{-2\pi i(d_k \xi_k + a_k)}$$

(où les constantes complexes a_k sont données arbitrairement, les ξ_k désignant les coordonnées complexes du vecteur x), forment un espace $\mathbf{C}$-vectoriel de dimension (complexe) égale au produit $d_1 \cdots d_n$.

Les formules (α) et (β) ont été déduites de (1) en explicitant $L(x, y)$ grâce à (4) et (5).

Nous allons démontrer ce théorème. Au moyen d'une translation, on se ramène aussitôt au cas où tous les a_k sont nuls, ce que nous supposerons désormais. Nous noterons encore $L(x, y)$ la forme $\mathbf{R}$-bilinéaire symétrique, définie sur B par les relations

(7) $$L(t_j, t_k) = d_k \tau_{jk} .$$

Soit $F(x)$ une solution (se elle existe). Grâce à (α), F se développe en série de Laurent suivant les fonctions $e^{2\pi i r\cdot x}$ (où $r\cdot x$ désigne le produit scalaire $r_1\xi_1 + \cdots + r_n\xi_n$ du vecteur $r = (r_1,\ldots, r_n)$ à coordonnées entières, et du vecteur $x = (\xi_1,\ldots, \xi_n)$). Autrement dit, on a un développement de Fourier:

$$F(x) = \sum_r c_r e^{2\pi i r\cdot x} .$$

Les relations (β) vont se traduire par des relations linéaires entre les coefficients c_r. Avant de les expliciter, associons au point r du groupe $\mathbf{Z}^n$, le point $f(r)$ de l'espace B, défini par

$$f(r) = \frac{r_1}{d_1} t_1 + \cdots + \frac{r_n}{d_n} t_n .$$

Le point $f(r)$ décrit un sous-groupe discret de l'espace B engendré par $t_1,\ldots, t_n$, à savoir celui engendré par les points $\frac{t_1}{d_1},\ldots, \frac{t_n}{d_n}$. Alors le produit scalaire $r\cdot x$ n'est autre que $L(x, f(r))$. On écrira $\gamma_{f(r)}$ pour c_r; les relations (β) s'écrivent alors:

$$\sum_{f(r)} e^{2\pi i L(x,t_k)} \gamma_{f(r)} e^{2\pi i L(x+t_k, f(r))} = \sum_{f(r)} \gamma_{f(r)} e^{2\pi i L(x,f(r))} .$$

Ceci équivaut à

(8) $$\gamma_{f(r)+t_k} = \gamma_{f(r)} e^{2\pi i L(t_k, f(r))} .$$

Ces relations permettent de calculer, par récurrence, tous les coefficients à partir des $\gamma_{f(r)}$ pour lesquels $f(r)$ est dans le domaine fondamental suivant: $0 \leq r_1 < d_1, \ldots, 0 \leq r_n < d_n$. Il reste ainsi des coefficients arbitraires, en nombre égal au produit $d_1 \cdots d_n$. Nous avons encore à démontrer la convergence des séries ainsi obtenues ("séries thêta"). Etant donné un point a du domaine fondamental, on considère tous les r tels que $f(r)$ soit congru à a, modulo le sous-groupe engendré par $t_1, \ldots, t_n$. On a

$$e^{-\pi i L(f(r)+t_k, f(r)+t_k)} \gamma_{f(r)+t_k} = e^{-\pi i L(f(r),\, f(r))} \gamma_{f(r)} \cdot e^{-\pi i L(t_k, t_k)}$$

d'où

$$e^{-\pi i L(f(r), f(r))} \gamma_{f(r)} = e^{-\pi i L(f(a), f(a))} \gamma_a \cdot e^{-\pi i (\Sigma_{j=1}^{n} (r_j - a_j) \tau_{jj})} .$$

Finalement

$$\gamma_{f(r)} = e^{\pi i \lambda(r)} \gamma_a ,$$

avec

$$\lambda(r) = L(f(r),\, f(r)) - L(f(a),\, f(a)) - \sum_{j=1}^{n} (r_j - a_j) \tau_{jj} .$$

Comme la partie imaginaire de $L(f(r), f(r))$ est strictement positive pour $r \neq 0$, on voit que la série

$$\Theta_a(x) = \sum_{f(r) \equiv a} e^{\pi i \lambda(r)} e^{2\pi i r \cdot x}$$

est normalement convergente. Alors la solution générale $F(x)$ du système d'équations (α), (β), est combinaison linéaire (homogène), à coefficients complexes arbitraires, de ces $d_1 \cdots d_n$ séries $\Theta_a(x)$. Ceci achève la démonstration du théorème 3 bis, et en même temps du théorème 3 (§1).

4. Complément au théorème 3.

Soient données les fonctions $L(x, y)$ et $K(y)$ comme dans le théorème 3.

Proposition 6. Dans les hypothèses du théorème 3, il existe une fonction thêta holomorphe $F(x)$, relative à $L(x, y)$ et $K(y)$, dont le diviseur ne soit invariant par aucune translation autre que celles du groupe Γ.

Tout d'abord, il résulte de la prop. 4 de l'exposé 3 que le diviseur d'une $F(x)$ relative à L et K, et non identiquement nulle, n'est invariant par les translations d'aucun vrai sous-espace vectoriel de E. Cela étant, associons à chaque solution $F(x)$ non identiquement nulle, le groupe discret Γ' des translations laissant invariant le diviseur de $F(x)$. Je dis que $F(x)$ est une fonction thêta relative à Γ' (et aux fonctions L et K): en effet, il existe (exposé 2) une fonction thêta $G(x)$ relative au groupe Γ', admettant le même diviseur que $F(x)$; G/F est une fonction thêta triviale (la notion de fonction thêta triviale est indépendante du groupe Γ, pourvu que son rang soit $2n$); donc on peut normaliser G de manière que G/F soit identique à un. Autrement dit, F est bien une fonction thêta relative au groupe Γ', et alors il est immédiat que les fonctions $L(x, y)$ et $K(y)$ attachées à cette fonction thêta sont les mêmes que pour le groupe Γ.

Cela étant, notons $\mathcal{O}(\Gamma, L, K)$ l'espace C-vectoriel des fonctions thêta attachées au groupe Γ et aux fonctions L et K. Si Γ' est un vrai sur-groupe de Γ, $\mathcal{O}(\Gamma', L, K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}(\Gamma, L, K)$, dont la dimension divise strictement celle de $\mathcal{O}(\Gamma, L, K)$: car le quotient des deux pfaffiens est égal à l'indice du sous-groupe Γ de Γ'. Le groupe Γ étant donné, tous les Γ' possibles forment une famille dénombrable; à chacun d'eux correspond un vrai sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}(\Gamma, L, K)$, donc un sous-espace fermé sans point intérieur. D'après le théorème classique de Baire, $\mathcal{O}(\Gamma, L, K)$ n'est pas réunion d'une famille dénombrable de sous-espace fermés sans point intérieur. Donc il existe une $F(x) \in \mathcal{O}(\Gamma, L, K)$ qui n'appartient à aucun des $\mathcal{O}(\Gamma', L, K)$; et ceci démontre la proposition.

5. Le groupe de tous les diviseurs sur un tore complexe E/Γ.

Nous allons récapituler quelques-uns des résultats obtenus dans les exposés 2, 3 et 4. Soit $\mathfrak{D}$ le groupe (additif) des diviseurs dans l'espace E/Γ; il est isomorphe au quotient du groupe (multiplicatif) $\mathcal{T}$

des fonctions thêta (méromorphes) par le sous-groupe $\mathcal{T}_0$ des fonctions thêta triviales (cf. exposé 3, n° 1). De plus, tout diviseur est différence de deux diviseurs positifs (exposé 2). Chaque diviseur définit une fonction $\varphi(x, y)$, $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée, à valeurs entières sur Γ, et qui satisfait à la condition

(I) $\qquad \varphi(Jx, Jy) = \varphi(x, y)$ (prop. 1 de l'exposé 3).

Si en outre le diviseur est positif, la fonction φ correspondante satisfait à

(II) $\qquad \varphi(x, Jx) \geq 0$ (prop. 2 de l'exposé 3).

Dire que $\varphi(x, y)$ est identiquement nulle, c'est dire que l'intersection du diviseur avec tout 2-cycle de E/Γ est nulle; c'est aussi dire que la forme harmonique σ de l'exposé 2 (n° 7) est nulle; ceci exprime que la classe de cohomologie (de dimension 2) définie par le diviseur est nulle. Observons que la classe de cohomologie d'un diviseur positif ne peut être nulle que si le diviseur est nul (c'est-à-dire si la variété du diviseur est vide).

Le groupe Γ (de rang 2n) et la structure complexe de E étant donnés, considérons l'ensemble de toutes les $\varphi(x, y)$, $\mathbf{R}$-bilinéaires alternées, à valeurs entières sur Γ, et qui satisfont aux conditions (I) et (II). Soit V le sous-espace $\mathbf{C}$-Vectoriel des $x \in E$ tels que $\varphi(x, Jx) = 0$ pour toutes ces φ. Il existe alors une φ_0 telle que $\varphi_0(x, Jx) = 0$ soit équivalent à $x \in V$. En vertu de la prop. 4 de 3, tout diviseur sur E, invariant par Γ, est l'image réciproque d'un diviseur sur E/V, invariant par l'image (discrète) Γ' de Γ dans E/V (cette image est discrète en vertu de la prop. 3 de 3). Le groupe $\mathfrak{D}$ s'identifie donc au groupe des diviseurs de l'espace E/V, invariants par le groupe Γ'. Ainsi, l'étude du groupe $\mathfrak{D}$ se trouve ramenée au cas où V est réduit à 0. Lorsque $V = \{0\}$, on dit que le tore E/Γ est non dégénéré.

Remarque. En général, soit V' le sous-espace $\mathbf{C}$-vectoriel des x tels que $\varphi(x, y) = 0$ pour tout $y \in E$ et toute φ satisfaisant à la condition (I) seulement. V' est évidemment contenu dans V; en fait, V' peut être distinct de V. On donnera (exposé 5), dans le cas où la dimension (complexe) n de E est égale à 2, l'exemple d'un groupe Γ pour lequel $V' = 0$ et $V = E$. Pour un tel groupe Γ, tout diviseur est nécessairement nul; donc il ne suffit pas qu'une $\varphi(x, y)$, à valeurs entières sur Γ, satisfasse à (I), pour qu'elle corresponde effectivement à un diviseur. Par contre:

Proposition 7. Supposons que le tore E/Γ soit non dégénéré. Alors, pour toute $\varphi(x, y)$, $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée à valeurs entières sur Γ, et satisfaisant à (I), il existe un diviseur donnant naissance à cette $\varphi(x, y)$.

En effet, soit $\varphi_0(x, y)$, $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée, à valeurs entières sur Γ, et satisfaisant à (I) et en outre à la condition: $\varphi_0(x, Jx) > 0$ pour tout $x \neq 0$. On peut multiplier φ_0 par un entier > 0 convenable, de manière que $\varphi_0(x, Jx) \geq \varphi(x, Jx)$ pour tout x. Si l'on pose

$$\varphi_0 - \varphi = \varphi_1,$$

φ est la différence de deux fonctions φ_0 et φ_1, satisfaisant toutes deux à (I) et (II). Donc chacune d'elles correspond à un diviseur (cf. théorème 2, exposé 3); leur différence φ correspond à la différence de ces diviseurs.

C.Q.F.D.

Dans ce qui précède, nous avons défini un homomorphisme du groupe $\mathfrak{D}$ des diviseurs dans le groupe des φ, bilinéaires alternées, à valeurs entières sur Γ, et satisfaisant à (I) (autrement dit, dans le groupe des classes de cohomologie entière, de type (1, 1)); et, lorsque le tore E/Γ n'est pas dégénéré, c'est un homomorphisme sur (prop. 7). Proposons-nous maintenant d'étudier le noyau $\mathfrak{J}$ de cet homomorphisme.

Si un diviseur $D \in \mathfrak{J}$, il existe des fonctions thêta admettant D (cela résulte de l'exposé 2, n° 5). Une telle fonction thêta peut être normalisée de manière que $L(x, y)$ soit identiquement nulle; on a alors

$$F(x+u) = F(x)e^{-2\pi i K(u)} \quad \text{pour tout } u \in \Gamma;$$

autrement dit, les multiplicateurs sont des constantes complexes, que l'on peut d'ailleurs supposer de valeur absolue égale à un (en normalisant de manière que la fonction $K(y)$ soit réelle). Ces multiplicateurs sont alors entièrement déterminés, puisqu'aucune nouvelle normalisation n'est plus possible. Ils définissent un homomorphisme du groupe Γ dans le groupe $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ des nombres réels modulo un, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$, qui n'est autre que $\mathrm{Hom}(B_1(E), \mathbf{R}/\mathbf{Z})$, en notant $B_1(E)$ le groupe de Betti de E pour la dimension un. Ainsi, on vient de définir un homomorphisme du noyau $\mathfrak{J}$ dans le groupe $P = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{R}/\mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(B_1(E), \mathbf{R}/\mathbf{Z})$. Or ce dernier groupe est muni d'une structure de <u>variété analytique-complexe</u>, de dimension (complexe) n: c'est un résultat valable pour toute variété kählérienne compacte E. Voici comment on peut définir cette structure: puisque $B_1(E)$ est un groupe abélien libre (groupe sans torsion, de type fini), $\mathrm{Hom}(B_1(E), \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ s'identifie canoniquement au quotient de $\mathrm{Hom}(B_1(E), \mathbf{R})$ par un sous-groupe discret $\mathrm{Hom}(B_1(E), \mathbf{Z})$; il suffit de définir, sur $\mathrm{Hom}(B_1(E), \mathbf{R})$, une structure d'espace vectoriel sur le corps complexe $\mathbf{C}$. Or il existe une différentielle de première espèce, et une seule, dont les périodes aient des parties réelles données; ceci identifie $\mathrm{Hom}(B_1(E), \mathbf{R})$ à l'espace des conjuguées des formes différentielles de première espèce, qui est un espace $\mathbf{C}$-vectoriel. Nota: la variété analytique-complexe P n'est autre que la variété de Picard.

<u>Proposition</u> 8. Si le tore E/Γ n'est pas dégénéré, l'homomorphisme de $\mathfrak{J}$ dans la variété de Picard $P = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ est un homomorphisme sur.

En effet, soit φ_0 une fonction bilinéaire alternée à valeurs entières sur Γ, et satisfaisant à (I) et (II). Soit $F(x)$ une fonction thêta holomorphe donnant naissance à φ_0. Pour toute translation $h \in E$, le quotient $F(x+h)/F(x)$ est une fonction thêta dont le diviseur appartient à $\mathfrak{J}$; et l'on voit facilement que h peut être choisi de manière que l'invariant de $F(x+h)/F(x)$ soit un élément arbitraire de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$.

Il resterait enfin à étudier le noyau $\mathcal{A}$ de l'homomorphisme

$$\mathcal{J} \to \mathrm{Hom}(\Gamma, R/Z).$$

C'est le sous-groupe des diviseurs homologues à zéro, et pour lesquels il existe une fonction méromorphe, invariante par Γ, admettant ce diviseur. Une telle fonction s'appelle une fonction abélienne relative au groupe Γ; l'étude des fonctions abéliennes fait l'objet de l'exposé suivant. Le groupe $\mathcal{A}$ est isomorphe au groupe multiplicatif des fonctions abéliennes (relatives à Γ), modulo le sous-groupe des fonctions constantes.

On notera que $\mathcal{A}$ n'est autre que le groupe des diviseurs linéairement équivalents à zéro (dans le langage de la géométrie algébrique) (cf. exposé 2, n° 8). La proposition 8 montre que, lorsque le tore E/Γ est non dégénéré, le groupe quotient $\mathcal{J}/\mathcal{A}$ est canoniquement isomorphe à la variété de Picard.