Séminaire Henri Cartan

P. Dolbeault

Fonctions thêta associées à un diviseur donné

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. n° 2, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A2_0>

Séminaire H. Cartan

3951–1952

FONCTIONS THÊTA ASSOCIÉES À UN DIVISEUR DONNÉ

(D'après deux exposés de P. DOLBEAULT,

12-11-51 et 26-11-51)

1. Notion de diviseur, $2^{\text{ème}}$ problème de Cousin.

Soit V une variété analytique complexe de dimension complexe n; une sous-variété (sous-entendu analytique) de V est un sous-ensemble fermé W de V tel que, pour tout $x \in V$ il y ait un voisinage U de x et des fonctions f_i $(i = 1,\ldots,q)$, holomorphes dans U vérifiant la condition

$$M \in W \cap U \Longleftrightarrow f_i(M) = 0 \quad \text{pour tout } i.$$

Plus brièvement, on peut dire que W est, localement, l'ensemble des zéros d'un idéal de fonctions holomorphes.

W est dite de dimension maximum si c'est localement l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe non identiquement nulle.

On observera qu'une sous-variété d'une variété analytique complexe n'est pas en général une variété analytique complexe; elle peut posséder des "singularités" (cf. une variété algébrique plongée dans un espace projectif complexe) α. L'étude locale d'une sous-variété sera faite dans un exposé ultérieur.

Un cycle entier (resp. réel, complexe, etc.) sur la variété V est, par définition, une somme formelle à coefficients entiers (resp. réels, complexes, etc.) de sous-variétés de V. Lorsque toutes ces sous-variétés sont de dimension maximum, le cycle est appelé diviseur. Un diviseur entier est dit positif si ses coefficients sont tous positifs. Un moyen commode pour définir un diviseur (resp. un diviseur positif) consiste à se donner un recouvrement ouvert U_i (fini ou infini) de V et dans chaque U_i une fonction méromorphe (resp. holomorphe) f_i de telle sorte que f_i/f_j

soit holomorphe et $\neq 0$ dans $U_i \cap U_j$ pour tout couple (i, j); le diviseur D associé aux f_i est l'ensemble des zéros des f_i diminué de l'ensemble des pôles; on dit que les f_i constituent une donnée de Cousin définissant D.

En particulier, si l'on prend $U = V$, on voit que toute fonction f méromorphe sur V définit un diviseur qu'on note (f). 2ème problème de Cousin: étant donné un diviseur D, existe-t-il une fonction f telle que $D = (f)$?

En d'autres termes, étant donné des U_i, f_i comme précédemment, existe-t-il une fonction f telle que f/f_i n'ait ni zéros ni pôles dans U_i pour tout i ?

Ce problème est toujours possible si V est, par exemple, un polydisque de C^n (cas résolu par Cousin; si $n = 1$ c'est le th. de Mittag-Leffler). Par contre, supposons que V soit compacte, et que D soit un diviseur strictement positif; la fonction f doit alors être une fonction partout holomorphe sur V, donc constante (principe du maximum), ce que montre que le problème est impossible en général. Dans ce qui suit, nous allons montrer comment, dans certains cas, on peut résoudre le pb. de Cousin en acceptant des fonctions f non uniformes d'un type particulier.

Remarque. Si V est un variété algébrique, la condition $D = (f)$ signifie que le diviseur D est linéairement équivalent à 0.

2. Le problème des fonctions thêta.

A partir de maintenant nous supposons que V est une variété kählérienne compacte; on notera $\overline{V}$ le revêtement universel de V, muni de la structure analytique complexe naturelle (cf. exposé 1); on notera Γ le groupe fondamental de V; Γ est un groupe d'automorphismes sans point fixe de $\overline{V}$, et on notera $u \cdot x$ le transformé de $x \in \overline{V}$ par $u \in \Gamma$.

Tout fonction f, toute différentielle ω sur V définit une fonction $f°$, une différentielle $\omega°$ sur $\overline{V}$ invariantes par les transformations de Γ, et réciproquement. Une fonction g sur $\overline{V}$ sera dite fonction <u>multiforme</u> sur V. Si, pour tout $u \in F$, $g(u\cdot x)/g(x)$ n'a ni zéros ni pôles, le diviseur de g sur $\overline{V}$ est invariant par Γ, et définit un diviseur sur V que nous noterons encore (g).

Une fonction holomorphe h sur $\overline{V}$ sera dite <u>intégrale de dif. de première espèce</u> si on a $dh = \omega^\circ$ où ω est une forme différentielle de 1ère espèce, c'est-à-dire une forme fermée de type $(1, 0)$; réciproquement, la donnée de ω détermine évidemment h (à l'addition d'une constante près).

<u>Définition</u>. <u>Une fonction multiforme</u> g <u>sur</u> V <u>est dite fonction thêta si elle est holomorphe et si, pour tout</u> $u \in \Gamma$, $g(u\cdot x)/g(x) = e^{h(x)}$, <u>où</u> $h(x)$ <u>est une intégrale de différentielle de 1ère espèce</u> (dépendant de u).

<u>Problème</u>. <u>Quels sont les diviseurs positifs</u> D <u>sur</u> V <u>pour lesquels il existe une fonction thêta</u> g <u>avec</u> $D = (g)$?

Nous prendrons une donnée de Cousin (U_i, f_i) définissant D; on peut toujours supposer que les U_i sont rétractiles ainsi que leurs intersections; en effet un tel recouvrement (appelé parfois "épiderme") existe sur toute variété différentiable (cf. un article récent de De Rham dans les Ann. Univ. Gren.).

Dans $U_i \cap U_j$ la fonction f_i/f_j n'a ni zéros ni pôles; on peut donc définir son logarithme, et poser:

$$\omega_{ij} = 1/2\pi i\cdot d\,\log(f_i/f_j) = 1/2\pi i(df_i/f_i - df_j/f_j) \ .$$

<u>Pour qu'il existe une fonction thêta</u> g <u>avec</u> $D = (g)$ <u>il faut et il suffit qu'il existe des 1-formes holomorphes fermées</u> ω_i, <u>définies dans les</u> U_i, <u>et telles que l'on ait dans</u> $U_i \cap U_j$:

$$\omega_i - \omega_j = \omega_{ij} + \eta_{ij} \ ,$$

où η_{ij} <u>est la restriction à</u> $U_i \cap U_j$ <u>d'une forme dif. de</u> 1ère <u>espèce</u>.

Nécessité: Si g existe, choisissons dans chaque U_i l'une de ses déterminations, soit g_i; par hypothèse f_i/g n'a ni zéros ni pôles dans U_i, ce qui permet de poser $\omega_i = 1/2\pi i\cdot d\,\log(f_i/g)$. On a:

$$\omega_i - \omega_j = 1/2\pi i \cdot d \log(f_i/f_j) - 1/2\pi i \cdot d \log(g_i/g_j).$$
$$= \omega_{ij} + \text{une dif. de 1ère espèce.}$$

<u>Suffisance</u>: Soient U_{id} les composantes connexes de l'image réciproque de U_i dans $\overline{V}$; puisque U_i est simplement connexe, la projection $p: \overline{V} \to V$ applique chaque U_{id} isomorphiquement sur U_i. Choisissons alors dans chaque U_{id} une primitive k_{id} de ω_i°, et posons:

$$g_{id} = f_i^\circ \cdot e^{-2\pi i \cdot k_{id}} .$$

On a dans $U_{id} \cap U_{jd'}$:

$$d \log(g_{id}/g_{jd'}) = d \log(f_i/f_j) - 2\pi i(dk_{id} - dk_{jd'})$$
$$= \text{dif. de 1ère espèce,}$$

d'où $g_{id} = g_{jd'} \cdot e^h$ où h est une intégrale de dif. de 1ère espèce.

Prenons maintenant l'une des fonctions g_{id} et effectuons son prolongement analytique sur $\overline{V}$. La formule précédente montre que ce prolongement est possible sur tout $\overline{V}$ et, puisque $\overline{V}$ est simplement connexe, ce prolongement g est <u>uniforme</u> sur $\overline{V}$. La fonction g est la fonction thêta cherchée: g/f_i n'a ni zéros ni pôles et, pour $u \in \Gamma$, la fonction $g(u \cdot x)/g(x)$ est de la forme e^h.

3. <u>Premières constructions</u>.

Nous devons donc trouver des formes ω_i holomorphes et fermées telles que $\omega_i - \omega_j = \omega_{ij}$ + une forme de 1ère espèce. Nous construirons des 1-formes ζ_i dont les propriétés seront de plus en plus voisines de celles des ω_i cherchées.

Posons $f_{ij} = 1/2\pi i \cdot \log(f_i/f_j)$; les f_{ij} ne sont déterminées qu'à un entier près, ce qui fait que leurs parties imaginaires, $\mathrm{Im}(f_{ij})$, sont déterminées sans ambiguïté, et l'on a évidemment:

$$\mathrm{Im}(f_{ij}) + \mathrm{Im}(f_{jk}) + \mathrm{Im}(f_{ki}) = 0 \qquad \text{dans } U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Si l'on suppose que chaque f_i est défini dans un ouvert $V_i \supset \overline{U}_i$, et que f_i/f_j n'a ni zéros ni pôles dans $V_i \cap V_j$, ce qui est licite, on peut trouver des fonctions indéfiniment différentiables g_i (à valeurs réelles) telles que:

$$\mathrm{Im}(f_{ij}) = g_i - g_j \qquad \text{dans} \quad U_i \cap U_j ,$$

g_i étant définie dans U_i. (Définir les g_i par récurrence sur i en prenant g_1 arbitrairement; pour passer de g_{i-1} à g_i, on a simplement à effectuer un prolongement de fonctions indéfiniment différentiables, ce qui est toujours possible).

Posons

$$\zeta_i = 2i \cdot d' g_i .$$

Les formes ζ_i sont de type (1, 0) et l'on a:

$$\zeta_i - \zeta_j = 2i(d'g_i - d'g_j) = 2i \cdot d' \,\mathrm{Im}(f_{ij}) = 2i \cdot d'((f_{ij} - \overline{f_{ij}})/ 2i)$$
$$= 2i \cdot d'(f_{ij}/2i) = df_{ij} = \omega_{ij} \quad (\text{car } d''f_{ij} = 0 = d'\overline{f_{ij}}) .$$

On a donc:

$$\zeta_i - \zeta_j = \omega_{ij} \quad \text{sur} \quad U_i \cap U_j .$$

Nous allons maintenant déterminer une forme μ de type (1, 0), partout définie, et telle que $\Delta\mu = \Delta\zeta_i$ sur U_i. Puisque ζ_i et μ sont de type (1, 0) leur ∂'' est nul, et cette condition s'écrit: $\partial''d''\zeta_i = \partial''d''\mu$. Or $d''\zeta_i - d''\zeta_j = d''\omega_{ij} = 0$; il existe donc une forme α partout définie qui coïncide avec $d''\zeta_i$ sur U_i: α est de type (1, 1). Ecrivons $\alpha = H\alpha + \Delta G\alpha = H\alpha + 2(d''\partial'' + \partial''d'')G\alpha$; comme d'' et G commutent et que $d''\alpha = d''d''\zeta_i = 0$, on voit que $\alpha = H\alpha + 2d''\partial''G\alpha$. D'où: $\partial''\alpha = \partial''H\alpha + 2\partial''d''\partial''G\alpha = 2\partial''d''\partial''G\alpha$. Si l'on pose alors $\mu = 2\partial''G\alpha$, on aura bien une forme de type (1, 0) telle que $\Delta\mu = \Delta\zeta_i$.

Posant alors $\zeta'_i = \zeta_i - \mu$, on voit que les ζ'_i sont des formes harmoniques, de type (1, 0), et telles que $\zeta'_i - \zeta'_j = \omega_{ij}$.

La forme σ.

On a $d\zeta'_i - d\zeta'_j = d\omega_{ij} = 0$; il existe donc une forme σ sur V telle que $\sigma = d\zeta'_i$ sur chaque U_i.

En outre $d\zeta'_i - d\zeta_i = -d\mu$ est orthogonale aux formes harmoniques. Il en résulte que $\sigma = d\zeta'_i = H(d\zeta_i)$ (ce qui a un sens, car $d\zeta_i$ est définie partout). Puisque $d'\zeta_i = 0$, ceci s'écrit:

$$\sigma = H(2id''d'g_i)$$

et montre que σ est une forme harmonique de type (1, 1). Cette forme est associée de façon invariante aux ω_{ij}, car, si l'on avait pris d'autres formes ζ''_i, harmoniques et de type (1, 0), telles que $\zeta''_i - \zeta''_j = \omega_{ij}$, la forme $\zeta'_i - \zeta''_i$ aurait été harmonique et définie partout, donc fermée, ce qui montre que $d\zeta''_i = d\zeta'_i$.

Nous donnerons plus loin une interprétation topologique de cette forme (ou plutôt, de sa classe de cohomologie).

4. Solution du problème.

Cherchons à retrancher des ζ'_i des formes θ_i de façon à obtenir les ω_i voulus. Pour cela il faut et il suffit que les θ_i vérifient les conditions suivantes:

θ_i de type (1, 0); $d\theta_i = \sigma$; $\theta_i - \theta_j$ = dif. de 1ère espèce.

Ceci entraîne que l'un des θ_i (arbitraire) se prolonge analytiquement sur tout le revêtement universel $\overline{V}$ de V en une forme τ de type (1, 0), telle que $d\tau = \sigma$, et qui s'augmente d'une dif. de 1ère espèce de V quand on effectue une transformation $u \in \Gamma$. Réciproquement, si l'on connaît une telle forme τ, on n'a qu'à prendre pour θ_i l'une de ses déterminations dans U_i.

Théorème. Pour qu'il existe une telle forme τ (et, de ce fait, une fonction thêta admettant D pour diviseur), il faut et il suffit que la classe de cohomologie de σ soit une somme de produits de classes de degré un (il s'agit de cohomologie à coefficients complexes).

1°. C'est nécessaire.

Pour tout $u \in \Gamma$, soit $\Sigma\, a_k(u)\cdot\psi_k$ la quantité dont s'augmente τ lorsqu'on fait une transformation u (les ψ_k formant une base des dif. de 1ère espèce); l'application $u \to a_k(u)$ est, pour tout k, un homomorphisme de $\Gamma = \pi_1(V)$ dans C, i.e. un élément de $H^1(V, C)$, et il existe une 1-forme fermée β_k sur V admettant les $a_k(u)$ pour périodes; si B_k désigne une primitive de β_k sur $\overline{V}$, la forme:

$$\tau_1 = \tau - \Sigma B_k \wedge \psi_k$$

sera invariante par les opérations $u \in \Gamma$, et définira donc une forme sur V. On aura:

$$\sigma = d\tau = \Sigma\, dB_k \wedge \psi_k + d\tau_1$$
$$= \Sigma\, \beta_k \wedge \psi_k + d\tau_1,$$

C.Q.F.D.

2°. <u>C'est suffisant</u>.

Soit $\sigma = \sum_{j,k} b_{j,k}\psi_j \wedge \psi_k + c_{j,k}\overline{\psi}_j \wedge \psi_k + a_{j,k}\overline{\psi}_j \wedge \overline{\psi}_k + d\tau_1$.

Prenons les composantes harmoniques de type (1, 1) de cette formule:

$$\sigma = H(\Sigma\, c_{j,k}\overline{\psi}_j \wedge \psi_k) .$$

Soit $\eta = \Sigma\, c_{j,k}\overline{\psi}_j \wedge \psi_k$ et écrivons: $\eta = H\eta + \Delta G\eta$. On a $\Delta = 2(d\partial'' + \partial'' d)$; puisque $d\eta = 0$ et que G commute avec d, il vient: $\Delta G\eta = 2d\partial'' G\eta$, d'où:

$$\sigma = H\eta = \eta - 2d\partial'' G\eta .$$

Soit P_j une primitive de ψ_j sur $\overline{V}$; $\eta = d(\Sigma\, c_{j,k}\overline{P}_j \cdot \psi_k)$, d'où:

$$\sigma = d\tau, \text{ avec } \tau = \Sigma\, c_{j,k}\overline{P}_j \cdot \psi_k - 2\partial'' G\eta .$$

La forme τ est de type (1, 0) et s'augmente bien d'une différentielle de 1ère espèce par une transformation $u \in \Gamma$, C.Q.F.D.

5. <u>Cas du tore complexe</u>.

Soit Γ un sous-groupe discret de rang 2n dans C^n, muni de la structure analytique complexe naturelle, et soit $V = C^n/\Gamma$ l'espace quotient de C^n par les translations définies par Γ. L'espace V est, au point de vue topologique, un tore de dimension 2n; nous le munirons de la structure analytique complexe et de la structure kählérienne quotients de celles de C^n.

Avec les notations du n° 2, on a $\overline{V} = C^n$; comme les dif. de 1ère espèce sur V ne sont autres que les $\Sigma\, a_i dz_i$, où les a_i sont des constantes, on voit qu'une fonction θ sur V n'est rien d'autre qu'une fonction entière F sur C^n, telle que, pour tout $u \in \Gamma$, l'on ait:

$$F(z+u) = F(z)\cdot e^{L_u(z)}$$

où $L_u(z)$ est une fonction C-linéaire sur C^n (non nécessairement homogène), dépendant de u.

On étudiera dans le prochain exposé la façon dont $L_u(z)$ dépend de la variable $u \in \Gamma$.

La cohomologie du tore est bien connue: c'est une algébre extérieure engendrée par des éléments de degré 1 formant un espace vectoriel de dimension $2n$. En particulier, toute classe de cohomologie de degré 2 est somme de produits de classes de degré 1, ce qui montre que la condition du n° précédent est toujours satisfaite. Donc: Soit V un tore complexe, D un diviseur positif de V; il existe une fonction thêta F sur V telle que $D = (F)$.

Signalons dès maintenant une conséquence intéressante de ce résultat: si f est une fonction méromorphe sur V, il existe deux fonctions thêta F et G sur V, correspondant aux mêmes formes $L_u(z)$, et telles que $f = F/G$; pour le voir, on écrit le diviseur (f) de la fonction f sous la forme: $(f) = D - D'$, où $D, D' \geq 0$; si F désigne une fonction thêta telle que $(F) = D$, on pose $G = F/f$; comme $(G) = (F) - (f) = D - (D - D') = D' \geq 0$, il s'ensuit que D est holomorphe et il est immédiat que c'est une fonction thêta.

Remarque. Dans le cas du tore complexe, les formes harmoniques ne sont autres que les formes invariantes par translation, comme on le voit immédiatement, en les écrivant à l'aide des coordonnées locales (ceci est encore valable sur un groupe de Lie compact, muni d'un ds^2 invariant par translation). Il est donc évident directement qu'il y a une forme harmonique et une seule dans toute classe de cohomologie, ce qui permet, dans ce cas, d'éviter la théorie de Hodge-de Rham, et d'expliciter les différents opérateurs dont nous avons dû faire usage (par exemple, l'opérateur H est simplement la moyenne des translatés); l'exposé auquel on est ainsi conduit est, à quelques modifications près, celui donné par A. Weil, Sém. Bourbaki, Mai 1949.

Exemple de fonction thêta.

Prenons $n = 1$; V est alors un tore elliptique, surface de Rieman d'une courbe de genre 1. Prenons pour diviseur D un seul point, l'origine. La fonction σ de Weierstrass est alors une fonction thêta admettant D pour diviseur et il en est de même de la fonction θ de Jacobi; d'ailleurs il est classique que σ et θ ne diffèrent que par une fonction thêta "triviale," c'est-à-dire que l'on a: $\sigma(z) = k \cdot e^{hz^2} \cdot \theta(z)$. Dans l'exposé suivant, on verra comment ceci se généralise à n quelconque.

Compléments

6. Produits extérieurs de formes harmoniques

Dans le cas du tore (ou plus généralement d'un groupe de Lie compact) le produit extérieur de deux formes harmoniques est harmonique; il n'en va pas de même dans le cas général (ce qui explique que nous ayons dû faire intervenir l'opérateur H au n°4), comme le montre l'exemple suivant:

On prend pour V la surface de Riemann d'une courbe algébrique de genre $g \geq 2$; V est donc une variété analytique complexe de dimension (complexe) 1, compacte, et que l'on peut munir d'une structure kählérienne (plonger la courbe dans un espace projectif complexe, et prendre la métrique induite); au point de vue topologique, V est un "tore à g trous" et son premier nombre de Betti est donc 2g, d'où l'existence de g formes dif. de 1ère espèce linéairement indépendantes, $\psi_1, \ldots, \psi_g$, harmoniques ainsi que leurs conjuguées. En outre, puisque le 2-ème nombre de Betti de V est 1, toute 2-forme harmonique est un multiple de la forme Ω associée à la métrique kählérienne.

Je dis que, pour tout i, la forme $\overline{\psi}_i \wedge \psi_i$ (qui est un produit extérieur de formes harmoniques) n'est pas harmonique.

En effet, cette forme n'est pas identiquement nulle, puisque ψ_i n'est pas identiquement nulle; d'après ce qui précède, si elle était harmonique elle serait de la forme $\lambda\cdot\Omega$, avec $\lambda \neq 0$; comme la forme Ω ne s'annule en aucun point (c'est "l'élément de surface" de V attaché au ds^2), il en serait donc de même de $\overline{\psi}_i \wedge \psi_i$, ce qui est contraire au fait bien connu que ψ_i s'annule en $2g - 2 > 0$ points (cf., par exemple, A. Weil, Sur les Courbes Algébriques ..., p. 12 à 27).

7. Interprétation topologique de la forme σ.

Revenons aux notations et hypothèses du n°3; à tout diviseur positif D sur V, défini par des données de Cousin f_i, nous avons attaché une forme σ, harmonique et de type (1, 1), obtenue en trouvant des ζ'_i telles que $\zeta'_i - \zeta'_j = 1/2\pi i(df_i/f_i - df_j/f_j)$, et en posant $\sigma = d\zeta'_i$.

Cette forme σ définit donc un élément $d \in H^2(V, C)$, second groupe de cohomologie de V à valeurs dans le corps des complexes. Nous allons montrer que la classe d est duale (au sens de la dualité de Poincaré) de la classe d'homologie de dimension $2n - 2$ définie par le diviseur D.

Soit C un 2-cycle singulier sur V, somme de simplexes C_i que nous pouvons supposer: a) différentiables, b) assez petits pour être contenus dans l'un des U_i, c) ne rencontrant aucun "point singulier" de D, d) rencontrant D "transversalement." (Nous admettons que tout 2-cycle est homologue à un tel cycle.) Le résultat que nous avons en vue est alors équivalent à la formule suivante:

$$\int_C \sigma = I(C, D),$$

où $I(C, D)$ désigne le nombre d'intersections de C et de D, nombre facile à définir, vu les hypothèses faites.

Pour démontrer cette formule, soit ρ la 1-forme sur V qui coïncide sur chaque U_i avec $\zeta'_i - 1/2\pi i\cdot df_i/f_i$. On a:

$$\int_C \sigma = \Sigma \int_{C_i} \sigma = \Sigma \int_{C_i} d\zeta'_i = \Sigma \int_{\partial C_i} \zeta'_i = \Sigma \int_{\partial C_i} 1/2\pi i\cdot df_i/f_i + \Sigma \int_{\partial C_i} \rho \quad .$$

Mais $\Sigma \int_{\partial C_i} \rho = \int_{\Sigma \partial C_i} \rho = 0$, puisque C est un cycle, et il est bien connu que

$$1/2\pi i \int_{\partial C_i} df_i/f_i = I(C_i, D) .$$

On a donc:

$$\int_C \sigma = \Sigma I(C_i, D) = I(C, D),$$

C.Q.F.D.

Conséquence. Pour toute $2n-2$ forme ω sur V, on a: $\int_D \omega = \int_V \sigma \wedge \omega$. Ceci donne une autre démonstration du fait que σ est de type $(1, 1)$; il suffit de montrer que σ est orthogonale aux formes ω de types $(n-2, n)$ et $(n, n-2)$, c'est-à-dire que $\int_D \omega = 0$ pour une forme de l'un de ces types. Or c'est évident, car, sur D, $d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n = 0$ et $dz_1 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_n = 0$.

Plus généralement, tout cycle analytique de dimension p est orthogonal aux formes pures de type $(i, j) \neq (p, p)$ (que la variété soit kählérienne ou pas). Par contre, si la variété est kählérienne, et si le cycle est positif et non nul, il n'est jamais homologue à 0 (à coefficients complexes) cas $\int \Omega^p$ est la "volume" du cycle et n'est pas 0. (Ce dernier résultat peut être faux sur une variété non kählérienne—cf. un tore dans la variété de Hopf).

8. Fonctions à multiplicateur.

Les notations et résultats des n°2, 3, 4, 7 peuvent être étendus sans difficulté au cas où le diviseur D n'est plus supposé positif; on montre alors qu'il existe une fonction thêta méromorphe F admettant D pour diviseur, pourvu que la classe $d \in H^2(V, C)$ définie par le diviseur soit décomposable. C'est en particulier le cas si D est homologue à zéro (à coef. $\in C$), c'est-à-dire si $d = 0$. On a alors $\sigma = d\zeta_i' = 0$, ce qui montre que les formes ζ_i' sont holomorphes, et peuvent donc être prises comme formes ω_i (au sens du n°2); répétant alors le raisonnement de la fin du n°2, on voit qu'il existe une fonction F méromorphe sur $\overline{V}$, telle que

$F(u \cdot z) = k_u \cdot F(z)$, où $k_u \neq 0$ <u>est une constante ne dépendant que de</u> $u \in \Gamma$, <u>et que</u> $(F) = D$.

Il est clair que k_u est un homomorphisme de Γ dans $\mathbf{C}^*$ (groupe multiplicatif du corps $\mathbf{C}$); c'est le <u>multiplicateur</u> de F.

On voit immédiatement que deux fonctions F et G de ce type ont le même diviseur si et seulement si on a $F = G \cdot e^L$, où L est une primitive de dif. de 1ère espèce; comme on peut trouver une dif. de 1ère espèce dont les périodes aient pour parties réelles des nombres donnés il suit de là que, D <u>étant donné</u>, <u>on peut choisir</u> F <u>pour que</u> $|k_u| = 1$, $u \in \Gamma$, <u>et</u> k_u <u>est alors bien déterminé par</u> D.

A tout diviseur D homologue à 0 on a ainsi fait correspondre un élément $\chi_D \in \mathrm{Hom}(\Gamma, T)$ (T désignant le tore à 1 dimension); pour que D soit linéairement équivalent à 0, il faut et il suffit évidemment que $\chi_D = 0$. <u>Le groupe des diviseurs homologues à</u> 0 (à coef. $\in \mathbf{C}$) <u>modulo ceux qui sont linéairement équivalents à</u> 0 <u>est donc un sous-groupe de</u> $\mathrm{Hom}(\Gamma, T) = H^1(V, T)$.

<u>Exemple</u>. On prend $V = T^2$, tore elliptique, $D = \{a\} - \{b\}$, avec $a \neq b$; on peut alors prendre pour fonction F la fonction $\sigma(z-a)/\sigma(z-b)$.

Pour plus de détails sur cette question, ses rapports avec les espaces fibrés de fibre $\mathbf{C}^*$, on renvoie à l'exposé de H. Cartan, Espaces fibrés analytiques complexes, <u>Sém. Bourbaki</u> (Déc. 1950), ainsi qu'à un article de K. Stein (relatif aux domaines d'holomorphie), <u>Math. Ann., 123</u> (1951), p. 201-222.