H. Cartan

Variétés riemanniennes, variétés analytiques complexes, variétés kählériennes

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. n° 1, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A1_0>

1951-52

VARIETES RIEMANNIENNES,
VARIETES ANALYTIQUES COMPLEXES, VARIETES KÄHLERIENNES

(Expose de H. Cartan, 19-11-51)

1. Variétés différentiables.

On rappelle la notion de variété (indéfiniment) différentiable: c'est un espace topologique séparé V, dont chaque point possède un voisinage ouvert homéomorphe à l'espace numérique $\mathbf{R}^n$ (l'entier n, toujours le même, est appelé la dimension de V), et qui est recouvert par des ouverts U_i munis d'homéomorphismes f_i sur des ouverts de $\mathbf{R}^n$ tels que, dans chaque intersection non vide $U_i \cap U_j$, la transformation $f_j \circ (f_i)^{-1}$, dans l'ouvert $f_i(U_i \cap U_j)$ de $\mathbf{R}^n$, soit (indéfiniment) différentiable à jacobien $\neq 0$. Les n fonctions numériques qui définissent f_i s'appellent des "coordonnées locales" dans U_i. On définit de manière évidente la notion de fonction (numérique) indéfiniment différentiable, définie sur V ou seulement sur un ouvert de V. D'ailleurs tout ouvert de V est muni d'une structure de variété différentiable, induite par celle de V.

Nous supposons connue la théorie des formes différentielles sur une variété V. L'espace vectoriel (réel) des formes différentielles (il s'agit de formes diff. réelles) est gradué; une forme de degré 0 est une fonction de point (indéfiniment différentiable); une forme de degré p est une fonction (indéfiniment différentiable) des p-vecteurs tangents, linéaire en chaque point de V. La différentiation extérieure d transforme une forme ω de degré p en une forme $d\omega$ de degré p+1, et on a $dd = 0$. Dans tout ouvert U où il y a des coordonnées locales, on peut trouver n formes du premier degré ω_i telles que toute forme du premier degré s'exprime comme combinaison linéaire des ω_i, à coefficients fonctions (indéf. diff.); par exemple, prendre pour les ω_i les différentielles des coordonnées locales. Un tel système de ω_i s'appellera une base des formes diff. de degré un, dans U_i. Alors toute forme de degré p s'écrit, dans U_i, d'une seule manière comme combinaison linéaire (à coefficients fonctions) des produits extérieurs $\omega_{i_1} \wedge \omega_{i_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p}$ (où $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$).

2. Variétés riemanniennes.

Une variété riemannienne est une variété différentiable V sur laquelle on s'est donné un ds^2, c'est-à-dire une fonction indéfiniment différentiable des couples de vecteurs tangents, en un même point, qui est bilinéaire symétrique dans chaque espace tangent en un point de V, et est telle que la forme quadratique associée soit définie positive. Cette forme quadratique se prolonge classiquement en une forme quadratique (définie positive) sur l'espace des p-vecteurs tangents; la forme bilinéaire correspondante, que nous noterons (α, β), est une fonction indéfiniment différentiable, identiquement nulle si α et β sont des formes différentielles de degrés distincts; si α et β sont des formes de degré 0, (α, β) est la fonction, produit des fonctions α et β. Si on multiplie la forme α (resp. β) par une fonction f, le produit scalaire (α, β) est multiplié par f. Enfin, le carré scalaire (α, α) est une fonction ≥ 0, qui n'est identiquement nulle que si $\alpha = 0$.

Si, dans un ouvert U où il y a un système des coordonnées locales, on a une base $\{\omega_i\}$ pour les formes différentielles de degré un, les produits "symétriques" $\omega_i \omega_j$ consituent une base pour l'espace des formes différentielles bilinéaires symétriques; tout ds^2 s'écrit alors $\sum_{i,j} g_{ij}\omega_i\omega_j$, où les g_{ij} sont des fonctions. On peut choisir la base des ω_i de manière que le ds^2 donné prenne la forme $\sum_i (\omega_i)^2$. Alors les produits scalaires (ω_i, ω_j) sont nuls si $i \neq j$, égaux à la constante un si $i = j$. Plus généralement, $(\omega_{i_1} \wedge \omega_{i_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p}, \omega_{j_1} \wedge \omega_{j_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_p})$ est nul, sauf si $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2, \ldots, i_p = j_p$ (on a supposé $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_p$), auquel cas il est égal à la constante un. En d'autres termes, et en supposant pour simplifier l'écriture $p = 3$, si l'on a $\alpha = \sum_{i<j<k} a_{ijk}\, \omega_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k$, et $\beta = \sum_{i<j<k} b_{ijk}\, \omega_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k$, alors

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i<j<k} a_{ijk} b_{ijk}$$

Le ds^2 définit un élément de volume (positif) dans V, que nous noterons dv; si, dans un ouvert, on a $ds^2 = \Sigma_i (\omega_i)^2$, alors dv est égal à $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ au signe près. Nous définissons, entre formes différentielles sur V, un nouveau produit scalaire $< \alpha, \beta >$ (à valeurs numériques), en intégrant la fonction (α, β):

$$< \alpha, \beta > = \int (\alpha, \beta)\, dv \quad .$$

Toutefois, il faut que l'intégrale ait un sens. Nous nous bornerons désormais aux formes différentielles à support compact (ce qui n'est pas une restriction si la variété V est compacte); pour de telles formes, le produit scalaire $< \alpha, \beta >$ est toujours défini.

Ce produit scalaire définit une structure préhilbertienne sur l'espace vectoriel (gradué) $\mathcal{H}$ de toutes les formes différentielles à support compact. On a donc la notion d'opérateurs transposés: deux opérateurs T et T' (transformations linéaires de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$, conservant ou non le degré) sont transposés si l'on a, pour tout couple d'éléments α, β de $\mathcal{H}$:

$$< T\alpha, \beta > = < \alpha, T'\beta > \quad .$$

(Un opérateur T donné, même s'il est continu, n'a pas nécessairement de transposé, parce que $\mathcal{H}$ n'est pas complet. Nous envisagerons des opérateurs non nécessairement continus.) Le transposé de T, s'il existe, est unique.

Un opérateur T sera dit de caractère local (ou, plus simplement, local) s'il diminue les supports, c'est-à-dire si le support de la forme $T\alpha$ est contenu dans le support de α, pour toute $\alpha \in \mathcal{H}$. (On rappelle que le support d'une forme différentielle est le complémentaire du plus grand ensemble ouvert dans lequel elle induit 0.) Pour connaître une transformée $T\alpha$ au voisinage d'un point de V, il suffit, si T est un opérateur "local," de connaître la forme α au voisinage de ce point; le comportement de α ailleurs n'intervient pas.

Il est immédiat que si T et T' sont deux opérateurs transposés, et si l'un T est local, l'autre T' est aussi local. En effet: soit x un point n'appartenant pas au support de β; cela veut dire que $< \alpha, \beta >$ est nul pour toute α dont le support est contenu dans un voisinage assez petit de x; pour une telle α, on a $< \alpha, T'\beta > = 0$, car c'est égal à $< T\alpha, \beta >$, qui est nul car le support de $T\alpha$ est contenu dans celui de α. Ceci prouve l'assertion.

Nous allons, dans ce qui suit, donner des exemples de couples d'opérateurs transposés, ce seront tous des opérateurs locaux. Définissons d'abord l'opérateur $*$ (dans une variété V orientable, pour simplifier; on supposera choisie une orientation de V). Pour définir l'application $\omega \to *\omega$, on définit, en chaque point de V, une application linéaire de l'espace des p-covecteurs tangents sur l'espace des (n-p)-covecteurs tangents; cette application est caractérisée comme suit: à un p-covecteur simple elle associe l'unique (n-p)-covecteur simple qui sous-tend un sous-espace orthogonal au sous-espace sous-tendu par le premier, a même volume (pour le ds^2), et est tel que le produit extérieur du premier par le second soit positif (pour l'orientation choisie). Si, dans un ouvert U, on a une base ω_i des formes diff. de degré un, telle que $ds^2 = \Sigma_i (\omega_i)^2$, notons, pour toute partie H de la suite $(1,2,\ldots,n)$, ω_H la forme différentielle, produit extérieur des ω_i relatives aux $i \in H$ (pris dans l'ordre croissant). Pour toute partie H, soit H' le complémentaire de H. Alors on voit facilement que $*\omega_H = \varepsilon_H\, \omega_{H'}$, en notant ε_H la signature de la permutation obtenue en écrivant successivement les indices de H (dans l'ordre croissant) puis ceux de H' (dans l'ordre croissant).

Comme $\varepsilon_H\, \varepsilon_{H'} = (-1)^{p(n-p)}$ si H a p éléments, on voit que $** = (-1)^{p(n-p)}$ sur les formes de degré p.

L'élément d'intégrale $(\alpha, \beta)dv$ s'écrit $\alpha\cdot(*\beta)$, en notant $\cdot$ le produit extérieur; ainsi, si α et β sont de degré p,

$$\begin{aligned} < \alpha, \beta > &= \int \alpha\cdot(*\beta) = (-1)^{p(n-p)} \int (*\beta)\cdot\alpha \\ &= \int (*\beta)\cdot(**\alpha) = < *\beta, *\alpha > = < *\alpha, *\beta > . \end{aligned}$$

Ainsi $*$ est un opérateur unitaire; son transposé est son inverse $*^{-1}$.

Soit maintenant Ω une forme de degré q; considérons l'opérateur $e(\Omega)$ qui consiste à multiplier extérieurement (à gauche) par Ω; c'est un opérateur local. On va voir qu'il possède un transposé, que nous noterons $i(\Omega)$: produit <u>intérieur</u> par Ω. On a, si α est de degré p,

$$(e(\Omega)\alpha)\cdot(*\beta) = (-1)^{pq}\,\alpha\cdot(e(\Omega)*\beta) = (-1)^{pq}\,\alpha\cdot(*^{-1}\,e(\Omega)*\beta)\ ,$$

ce qui prouve que

$$(1)\qquad i(\Omega) = (-1)^{pq}\,*^{-1}\,e(\Omega)*$$

sur les formes de degré $p+q$ (q désignant le degré de Ω). Si Ω est un produit $\Omega_1\cdot\Omega_2$, alors $i(\Omega) = i(\Omega_2)i(\Omega_1)$. Pour une forme ω de degré <u>un</u>, on a en particulier

$$(1\ \text{bis})\qquad i(\omega) = (-1)^{n(p+1)}\,*e(\omega)*$$

sur les éléments de degré p.

Explicitons les produits intérieurs $i(\omega_k)$ définis par les formes ω_k d'une base (dans un ouvert U), lorsque $ds^2 = \Sigma_k\,(\omega_k)^2$. L'opérateur $i(\omega_k)$, appliqué à un produit ω_H, donne zéro si $k \notin H$; si $k \in H$, ramenons ω_H, par une permutation des indices, à être $\omega_k\cdot\omega_K$ au signe près; alors $i(\omega_k)$, appliqué à cette forme, donne ω_K (on "enlève" le facteur ω_K, supposé en tête).

<u>Transposé de l'opérateur d</u>. On va voir que l'opérateur de différenciation extérieure (qui est un opérateur local) possède un transposé, bien qu'il ne soit pas continu. Ce transposé, noté ∂ (lire: "del") diminue le degré d'une unité. En effet: soit α de degré $p-1$, β de degré p; une intégration par parties donne

$$\int (d\alpha)\cdot(*\beta) = (-1)^p\int \alpha\cdot(d*\beta) = (-1)^p\int \alpha\cdot(*\,*^{-1}\,d*\beta)$$

$$= (-1)^p < \alpha,\ *^{-1}\,d*\beta > \ .$$

Donc d possède pour transposé

$$(2)\qquad \partial = (-1)^p\,*^{-1}\,d\,* = (-1)^{np+n+1}\,*d*$$

sur les éléments de degré p; on trouve, en sens inverse,

(2 bis) $$d = (-1)^p *^{-1}\partial * = (-1)^{np} *\partial*$$

sur les éléments de degré $p-1$. Notons les formules

(3) $$\left\{\begin{matrix} *\partial = (-1)^p d * \\ *\partial = (-1)^{p+1} \partial* \end{matrix}\right\} \text{ sur les éléments de degré } p.$$

Si la dimension n de la variété V est <u>paire</u>, on a

(4) $$d = - *d*, \quad d = *\partial* \quad (n \text{ pair}).$$

Puisque $dd = 0$, on a aussi $\partial\partial = 0$. L'opérateur $d + \partial$ est son propre transposé, et on a $(d+\partial)^2 = d\partial + \partial d$; cet opérateur se note Δ, il est <u>hermitien positif</u>. Comme d et ∂, c'est un opérateur local. Les formes différentielles α telles que $\Delta\alpha = 0$ se nomment <u>harmoniques</u> (notion locale). Les relations (3) montrent que Δ <u>commute avec</u> $*$.

Toute forme α telle que $d\alpha = 0$ et $\partial\alpha = 0$ est évidemment harmonique. Réciproquement: soit α une forme partout définie et à support compact; si α est harmonique, on a $d\alpha = \partial\alpha = 0$ (théorème de nature globale): en effet, $< \Delta\alpha, \alpha > = < d\alpha, d\alpha > + < \partial\alpha, \partial\alpha >$, et chacun des termes du second membre est ≥ 0, et ne peut s'annuler que si $d\alpha = 0$ (resp. $\partial\alpha = 0$).

Une forme α telle que $d\alpha = 0$ est dite <u>fermée</u>; une forme α telle que $\partial\alpha = 0$ est dite <u>cofermée</u>.

<u>Usage de coordonnées normales</u>. En un point P de V, on dit qu'un système de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ est <u>normal</u> si les coefficients du ds^2, exprimé à l'aide des produits symétriques $dx_i dx_j$, sont égaux à ceux de $\Sigma_k (dx_k)^2$ <u>aux infiniment petits du second ordre près</u>. Il est classique qu'en chaque point il existe au moins un système de coordonnées normales.

Rappelons comment on peut le voir, sans supposer connue toute la technique des espaces de Riemann. Supposons choisie, au voisinage de P, une base (ω_k) telle que $ds^2 = \Sigma_k (\omega_k)^2$. Il s'agit de trouver des θ_k

telles que, au point P, le ds^2 soit $\Sigma_k (\theta_k)^2$ au second ordre près, et que les $d\theta_k$ soient nulles au point P; car alors les θ_k seront égales, au second ordre près, à des différentielles exactes dx_k, et on n'aura qu'à prendre les x_k comme coordonnées locales. Or on a

$$d\omega_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k} c_{ijk}\, \omega_j \cdot \omega_k \quad (c_{ijk} + c_{ikj} = 0),$$

et il existe des coordonnées locales x_k, nulles en P, telles que $dx_k = \omega_k$ au point P (i.e., aux infiniment petits du premier ordre près). Prenons

$$\theta_i = \omega_i - \sum_{j,k} a_{ijk} x_j \omega_k \quad ,$$

les constantes a_{ijk} étant à déterminer de manière que les $d\theta_i$ soient nuls au point P, et que $\Sigma_i (\theta_i)^2 = \Sigma_i (\omega_i)^2$ au second ordre près. Cette dernière condition donne

$$a_{ijk} + a_{kji} = 0 \quad ,$$

et les conditions $d\theta_i = 0$ en P donnent

$$a_{ijk} - a_{ikj} = c_{ijk} \quad .$$

Or le système de toutes ces équations est compatible; il admet la solution

$$a_{ijk} = \frac{1}{2} (c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij}) \quad .$$

Proposons-nous d'expliciter l'opérateur ∂ en un point P, avec des coordonnées normales (x_k) en ce point. Supposons d'abord que le ds^2 soit <u>exactement</u> $\Sigma_k (dx_k)^2$, c'est-à-dire que la variété V soit localement euclidienne. Introduisons l'opérateur (local) τ_k, qui consiste à prendre les dérivées partielles, par rapport à x_k, des coefficients de la forme supposée exprimée à l'aide des produits extérieurs des formes $\omega_k = dx_k$. Il est clair que τ_k commute avec $e(\omega_k)$, $i(\omega_k)$ et $*$. En utilisant la formule

$$\tau_k(\alpha \cdot \beta) = (\tau_k \alpha) \cdot \beta + \alpha \cdot (\tau_k \beta) \quad ,$$

une intégration par parties montre que <u>le transposé de</u> τ_k <u>est</u> $-\tau_k$. D'autre part on a la relation évidente $d = \Sigma_k e(\omega_k) \tau_k$; en la transposant, on obtient

$$(5) \qquad \partial = -\sum_k \tau_k i(\omega_k)),$$

qui explicite ∂ dans le cas d'un ds^2 euclidien. Par exemple, on a

$$\partial(\sum_k a_k dx_k) = -\sum_k \frac{\partial a_k}{\partial x_k} .$$

La formule (5) vaut aussi, en un point P, si le ds^2 est égal, en P, à $\Sigma_k (dx_k)^2$ au second ordre près; en effet, l'expression de $\partial = (-1)^p * d *$ ne fait intervenir que les dérivées du premier ordre du ds^2. Autrement dit, la formule (5) vaut pour un système de coordonnées normales.

Revenons au ds^2 euclidien: $\Sigma_k (dx_k)^2$. L'explicitation de ∂ conduit aussitôt à celle de $\Delta = \partial d + d\partial$; l'opérateur Δ consiste à prendre <u>l'opposé du laplacien</u> des coefficients de la forme différentielle considérée, supposée exprimée à l'aide des produits extérieurs des dx_k.

<u>Formes différentielles complexes</u>. Les formes différentielles complexes (fonctions à valeurs complexes des p-vecteurs tangents) forment un espace vectoriel sur le corps complexe. Notons $\bar{\alpha}$ la forme imaginaire conjuguée de la forme α. Le produit scalaire $< \alpha, \beta >$ de deux formes complexes, à supports compacts, sera défini comme suit:

$$< \alpha, \beta > = \int (\alpha, \bar{\beta}) dv = \int \alpha\cdot(*\bar{\beta}) = \int \alpha\cdot(\overline{*\beta}) .$$

Alors $< \alpha, \alpha >$ est ≥ 0, et ne peut être nul que si $\alpha = 0$. On a encore la notion d'opérateurs transposés. Un opérateur T, sur l'espace des formes différentielles complexes à support compact, est dit <u>réel</u> s'il transforme une forme réelle en une forme réelle; pour les opérateurs réels, la notion d'opérateur transposé est la même qu'auparavant. Les opérateurs $*$, d, ∂, Δ sont réels. Les opérateurs $e(\Omega)$ et $i(\Omega)$ sont réels si la forme Ω est réelle; si Ω est complexe, on notera encore $i(\Omega)$ le transposé de $e(\Omega)$, mais les formules (1) et (1 bis) doivent être modifiées comme suit:

$$\left.\begin{array}{lll} (1)' & i(\Omega) = (-1)^{q+pq} *^{-1} e(\bar{\Omega}) * \\ (1 \text{ bis})' & i(\omega) = (-1)^{n(p+1)} * e(\bar{\omega}) * \end{array}\right\}$$

sur les éléments de degré p.

3. Théorèmes globaux sur les variétés riemanniennes compactes.

Ce paragraphe s'applique indifféremment au cas des formes différentielles réelles et à celui des formes complexes. L'espace $\mathcal{H}$ des formes différentielles à support compact contient notamment 3 sous-espaces intéressants:

l'espace $\mathcal{H}_1$ des formes harmoniques;

l'espace $\mathcal{H}_2$ des formes du type $d\alpha$ ("cobords");

l'espace $\mathcal{H}_3$ des formes du type $\partial\alpha$ ("bords").

Ces 3 sous-espaces sont 2 à 2 orthogonaux (vérification triviale); et tout élément de $\mathcal{H}$, orthogonal à chacun d'eux, est nul: car si α est orthogonale à $\mathcal{H}_2$ (resp. $\mathcal{H}_3$), on a $\partial\alpha = 0$ (resp. $d\alpha = 0$); donc tout forme orthogonale à $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ est harmonique, c'est-à-dire dans $\mathcal{H}_1$.

C.Q.F.D.

En particulier: l'intersection de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ est réduite à $\{0\}$; donc les formes harmoniques, qui sont fermées, ne sont jamais des cobords (à moins d'être nulles): l'espace $\mathcal{H}_1$ s'applique biunivoquement dans l'espace de cohomologie (à supports compacts) de la variété V. Or la topologie nous apprend que, si V est compacte (ce que nous supposerons désormais), l'espace de cohomologie est de dimension finie. Il s'ensuit que $\mathcal{H}_1$ est de dimension finie (voir une démonstration de ce résultat chez DE RHAM, par les méthodes de l'Analyse).

Puisque $\mathcal{H}_1$ est de dimension finie, il existe, dans $\mathcal{H}$, un opérateur de projection orthogonale sur $\mathcal{H}_1$: on le notera H (ce n'est pas un opérateur de caractère local); il est son propre transposé. Désormais la variété V sera supposée compacte.

Nous ne démontrerons pas ici le résultat fondamental de la théorie (voir par exemple DE RHAM, Cours de Princeton 1950):

Théorème 1. Pour que l'équation $\Delta\alpha = \omega$, où ω est une forme donnée, ait une solution α, il faut et il suffit que ω soit orthogonale aux formes harmoniques.

(La condition est évidemment nécessaire. On montre qu'elle est suffisante, en faisant usage d'une "paramétrix," et appliquant la théorie des équations intégrales.)

Ceci étant admis: pour toute forme ω, la forme $\omega - H\omega$, qui est orthogonale aux formes harmoniques, est du type $\Delta\alpha$; et α est unique si on l'astreint a être orthogonale aux formes harmoniques. Cette unique forme α sera notée $G\omega$ (G est l'opérateur "de Green"). On a donc, pour toute forme ω, la décomposition canonique:

$$\omega = H\omega + \Delta G\omega = H\omega + d(\partial G\omega) + \partial(dG\omega) ,$$

qui prouve que l'espace $\mathcal{H}$ est somme des 3 sous-espaces $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$. Ceux-ci étant 2 à 2 orthogonaux, on a:

Théorème 2. L'espace $\mathcal{H}$ est somme directe des 3 sous-espaces $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$, deux à deux orthogonaux.

Il est immédiat que G commute avec d et ∂, donc avec Δ. Et la relation

$$\omega = H\omega + d(\partial G\omega) + \partial G(d\omega)$$

montre que le projecteur $\omega \to H\omega$ est un opérateur d'homotopie vis-à-vis de l'opérateur cobord d. Donc il définit un isomorphisme de l'espace de cohomologie de V, sur l'espace $\mathcal{H}_1$ des formes harmoniques.

4. Variété analytique complexe.

C'est une variété V de dimension paire $n = 2m$, recouverte par des ouverts U_i munis d'homéomorphismes f_i sur des ouverts de $\mathbf{C}^m$ (espace de m variables complexes) tels que, dans chaque intersection non vide $U_i \cap U_j$, la transformation $f_j \circ (f_i)^{-1}$, dans l'ouvert $f_i(U_i \cap U_j)$ de $\mathbf{C}^m$, soit définie par des fonctions analytiques des coordonnées complexes, à jacobien $\neq 0$ (donc > 0). Les m composantes complexes d'une application f_i s'appellent les coordonnées complexes locales dans U_i. On définit de manière évidente la notion de fonction (à valeurs numériques complexes) holomorphe dans V, ou dans un ouvert de V. Tout ouvert de V est muni d'une structure analytique complexe, induite par celle de V. On notera qu'une variété analytique complexe est orientable, et même possède une orientation canonique.

Exemples de variétés analytiques complexes: l'espace C^m lui-même, muni de ses m coordonnées complexes $z_1, z_2, \ldots, z_m$. La variété quotient de C^m par un sous-groupe discret Γ du groupe des translations de C^m est une variété analytique complexe (les coordonnées d'un point de C^m servent de coordonnées locales dans la variété quotient). D'une manière générale, tout quotient d'une variété analytique complexe V par un groupe proprement discontinu d'automorphismes (analytiques-complexes) de V, est muni d'une manière naturelle d'une structure analytique complexe (N.B: "proprement discontinu" signifie que chaque point de V possède un voisinage qui ne rencontre aucun de ses transformés par le groupe). Tout revêtement d'une variété analytique complexe est naturellement muni d'une structure analytique complexe.

Sur une variété analytique complexe V, on ne considérera que des formes différentielles à valeurs complexes à coeff. indéfiniment différentiables). Si (z_k) est un système de coordonnées (complexes) locales dans un ouvert U, les différentielles dz_k et les différentielles $d\overline{z_k}$ des fonctions conjuguées $\overline{z_k}$ constituent une base (complexe) pour les formes différentielles de degré un. Il s'ensuit que toute forme différentielle de degré p, dans l'ouvert U, est combinaison linéaire (à coefficients fonctions indéfiniment différentiables à valeurs complexes) des produits extérieurs de p formes parmi les dz_k et les $d\overline{z_k}$. Un terme qui contient q facteurs du type dz_k, et r facteurs de type $d\overline{z_k}$ (avec $q + r = p$), sera dit du type (q, r). Une forme de type (q, r) sera une somme de termes de type (q, r). La notion de forme de type (q, r) est indépendante du choix des coordonnées locales. Une forme définie sur V sera dite de type (q, r), si elle est de type (q, r) au voisinage de chaque point de V. L'espace $\mathcal{H}$ des formes différentielles admet une décomposition directe, comme somme directe des sous-espace $\mathcal{H}_{q,r}$ de types déterminés.

<u>Remarque</u>: La notion de <u>type</u> d'une forme vaut non seulement dans une variété analytique complexe, mais plus généralement dans une variété "presque complexe," c'est-à-dire une variété différentiable pour laquelle on s'est donné un automorphisme (indéfiniment différentiable) J de l'espace des vecteurs tangents, qui transforme chaque espace tangent en un point P en lui-même, soit linéaire dans cet espace tangent, et dont le carré J^2 change chaque vecteur en son opposé. Ceci définit, sur chaque espace tangent, une structure vectorielle-complexe, qui varie "différentiablement" avec le point de contact. Une forme différentielle de degré un est de type (1, 0) si J la multiplie par la constante $i = \sqrt{-1}$, de type (0, 1) si J la multiplie par $-i$. Il est immédiat que l'espace des formes de degré un est somme directe des sous-espaces de type (1, 0) et de type (0, 1) respectivement. De là on déduit la décomposition directe en types, pour les formes de degré quelconque.

L'usage de coordonnées complexes locales montre ceci: l'opérateur d transforme une forme α de type (q, r) en la somme d'une forme de type $(q+1, r)$ et d'une forme de type $(q, r+1)$ (ceci n'est plus exact pour une variété presque complexe). On notera $d'\alpha$ la composante de type $(q+1, r)$, et $d''\alpha$ la composante de type $(q, r+1)$. Ceci définit une décomposition

$$d = d' + d''$$

de l'opérateur de différentiation extérieure. Nous dirons que d' est de type (1, 0), et d'' de type (0, 1). Pour des raisons de type, on a

$$d'd' = 0, \qquad d''d'' = 0, \qquad d'd'' + d''d' = 0. \tag{6}$$

Une <u>fonction holomorphe</u> est une fonction f telle que $d''f = 0$.

Une <u>forme holomorphe</u> de degré p, est une forme de type $(p, 0)$ qui, exprimée avec les dz_k et les $d\overline{z_k}$ d'un système de coordonnées locales, a ses coefficients holomorphes; cette condition s'écrit simplement: $d''\alpha = 0$ (compte tenu du fait que α est de type $(p, 0)$). On notera ceci: une forme α de type $(p, 0)$, qui est <u>fermeé</u>, est holomorphe.

5. Variété analytique complexe munie d'un ds^2 hermitien ("variété hermitienne").

On suppose que le ds^2 est localement de la forme $\Sigma_k\, \omega_k\overline{\omega_k}$, où les ω_k constituent une base pour les formes de type (1, 0) (et par conséquent les $\overline{\omega_k}$ constituent une base pour les formes de type (0, 1)). Alors deux formes de types différents sont orthogonales; autrement dit, dans l'espace $\mathcal{H}$, les projecteurs définis par les types sont des opérateurs de projection orthogonale. L'opérateur $*$ transforme le type (q, r) dans le type $(m-r, m-q)$. Le transposé d'un opérateur de type (q, r) est de type $(-q, -r)$.

Soient ∂, ∂', ∂'' les transposés de d, d', d''. Alors ∂' est de type $(-1, 0)$, ∂'' de type $(0, -1)$; on a

$$\partial = \partial' + \partial'', \qquad \partial'\partial' = 0, \qquad \partial''\partial'' = 0, \qquad \partial'\partial'' + \partial''\partial' = 0.$$

La forme différentielle de degré deux:

$$\Omega = \sum_k \omega_k\cdot\overline{\omega_k} \tag{7}$$

est canoniquement définie par le ds^2, et est imaginaire pure; elle s'interprète comme suit: le ds^2 étant définie par une forme bilinéaire hermitienne des couples de vecteurs tangents (en un même point de V), la partie imaginaire de cette forme est alternée; d'où la forme différentielle Ω. On considérera les opérateurs $e(\Omega)$ et $i(\Omega)$; notons que $i(\Omega) = \Sigma_k\, i(\overline{\omega_k})i(\omega_k)$. Ceci conduit à expliciter les $i(\omega_k)$. Exprimons une forme α de type (q, r) comme combinaison de formes

$$\omega_{j_1}\cdot\omega_{j_2}\cdots\omega_{j_q}\cdot\overline{\omega_{k_1}}\cdot\overline{\omega_{k_2}}\cdots\overline{\omega_{k_r}}\ .$$

Alors $i(\omega_k)$ donne 0 si k est distinct de $j_1, j_2, \ldots, j_q$; si $k = j_1$, $i(\omega_k)$ transforme le produit précédent en $2\omega_{j_2}\cdots\omega_{j_q}\cdot\overline{\omega_{k_1}}\cdots\overline{\omega_{k_r}}$ (on enlève le facteur ω_k, supposé en tête, et on multiplie par 2). Même résultat pour $i(\overline{\omega_k})$ (on suppose aussi que $\overline{\omega_k}$ a été amené en tête).

Calculs explicites dans le cas où V est l'espace $\mathbb{C}^m$, muni du $ds^2 = \Sigma_k\, dz_k d\overline{z_k}$.

Soit τ_k l'opérateur que consiste à remplacer chaque coefficient (de la forme supposée exprimée à l'aide des produits des dz_k et des $d\overline{z_k}$), par le coefficient de dz_k dans sa différentielle totale (opération que l'on note en général $\frac{\partial}{dz_k}$ pour ce coefficient). Soit de même $\overline{\tau_k}$ l'opérateur analogue, qui consiste à prendre $\frac{\partial}{\partial\overline{z_k}}$ des coefficients de la forme envisagée. Il est immédiat que τ_k et $-\overline{\tau_k}$ sont transposés. On a évidemment (en posant $\omega_k = dz_k$, $\overline{\omega_k} = d\overline{z_k}$):

$$d' = \sum_k e(\omega_k)\tau_k, \qquad d'' = \sum_k e(\overline{\omega_k})\overline{\tau_k} \quad .$$

Transposons:

$$\partial' = -\sum_k \overline{\tau_k}\, i(\omega_k), \qquad \partial'' = -\sum_k \tau_k\, i(\overline{\omega_k}) \quad . \tag{8}$$

Par exemple, on a

$$\partial\Big(\sum_k a_k dz_k + b_k d\overline{z_k}\Big) = -2\sum_k \left(\frac{\partial a_k}{\partial\overline{z_k}} + \frac{\partial b_k}{\partial z_k}\right) \quad .$$

On a en outre les <u>formules fondamentales</u>:

$$i(\Omega)d' - d'i(\Omega) = -2\partial'' \tag{9}$$

$$i(\Omega)d'' - d''i(\Omega) = 2\partial' \tag{10}$$

(où Ω est la forme définie par (7)).

Démontrons ces formules: on remplace $i(\Omega)$ par $\Sigma_k\, i(\overline{\omega_k})i(\omega_k)$, et on utilise les relations évidentes

$$i(\omega_k)d + d\, i(\omega_k) = 2\tau_k, \qquad i(\overline{\omega_k})d + d\, i(\overline{\omega_k}) = 2\overline{\tau_k} \;;$$

il vient alors

$$i(\overline{\omega_k})i(\omega_k)d - d\, i(\overline{\omega_k})i(\omega_k) = 2(i(\overline{\omega_k})\tau_k - \overline{\tau}_k i(\omega_k));$$

d'ailleurs τ_k et $i(\overline{\omega_k})$ commutent. En sommant par rapport à k, il vient

$$i(\Omega)d - d\, i(\Omega) = 2(\partial' - \partial'');$$

en séparant les composantes de types différents, ceci donne les deux relations (9) et (10) à démontrer.

D'autres relations seront établies dans le n° suivant, pour le cas général des métriques "kählériennes," dont $\Sigma_k\, dz_k d\overline{z}_k$ n'est qu'un cas particulier.

6. Variétés kählériennes.

Etant donnée une métrique hermitienne sur une V analytique complexe, il n'existe pas, en général, de coordonnées complexes normales en un point P de V, c'est-à-dire un système de coordonnées locales (complexes) $z_1,\dots,z_m$ telles que le ds^2 soit $\Sigma_k\, dz_k \overline{dz}_k$ aux infiniment petits du second ordre près, au point P. Cherchons à quelle condition un tel système de coordonnées locales existe en P. Ecrivons, au voisinage de P, le ds^2 sous la forme $\Sigma_k\, \omega_k \overline{\omega}_k$ (les ω_k constituant une base pour les formes de type $(1, 0)$). Il s'agit de trouver des formes θ_k de type $(1, 0)$, égales aux ω_k au point P, de manière que $ds^2 = \Sigma_k\, \theta_k \overline{\theta}_k$ au second ordre près, et que $d\theta_k = 0$ au point P. Or prenons des coordonnées locales z_k nulles en P et telles que $\omega_k = dz_k$ au point P; et cherchons des constantes a_{ijk} et b_{ijk} telles que, si l'on prend

$$\theta_i = \omega_i - \sum_{j,k} a_{ijk}\, z_j \omega_k - \sum_{j,k} b_{ijk}\, \overline{z_j} \omega_k \quad ,$$

on ait $ds^2 = \Sigma_k\, \theta_k \overline{\theta}_k$ au second ordre près: il faut et il suffit que

$$a_{ijk} + \overline{b_{kji}} = 0 \quad . \tag{11}$$

Soit d'autre part à exprimer que $d\theta_i = 0$ au point P; pour cela, posons

$$d\omega_i = \tfrac{1}{2} \sum_{j,k} c_{ijk}\, \omega_j \cdot \omega_k + \sum_{j,k} c'_{ijk}\, \overline{\omega_j} \cdot \omega_k \qquad (c_{ijk} + c_{ikj} = 0) \ .$$

Alors $d\theta_i = 0$ si et seulement si, au point P, on a

$$a_{ijk} - a_{ikj} = c_{ijk} \ , \qquad b_{ijk} = c'_{ijk} \quad . \tag{12}$$

Ceci se résout d'une seule manière:

$$a_{ijk} = \tfrac{1}{2}(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij}) , \qquad b_{ijk} = c'_{ijk} \quad ;$$

si on reporte ces valeurs dans (11), il vient

$$c_{ijk} = \overline{c'_{jki}} - \overline{c'_{kji}} \qquad \text{(au point } P\text{):} \tag{13}$$

telle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait des coordonnées complexes normales au point P.

Or un calcul facile montre que c'est aussi la condition pour que $d\Omega = 0$ <u>au point</u> P. La métrique est dite <u>kählérienne</u> si la forme définie par la métrique satisfait à $d\Omega = 0$ partout; ceci exprime qu'en tout point il existe des systèmes de coordonnées complexes normales.

Pour une variété kählérienne (i.e., munie d'une métrique kählérienne), on peut, pour calculer ∂' et ∂'' en un point P, prendre des coordonnées normales z_k en ce point, puis appliquer les formules (8) établies dans le cas où $ds^2 = \Sigma_k dz_k \overline{dz}_k$, puisque le calcul ne fait intervenir que les éléments du premier ordre du ds^2. Pour la même raison, <u>les formules (9) et (10) sont valables en tout point d'une variété kählérienne</u>; or elles présentent ceci de remarquable, qu'elles sont écrites de manière à ne faire intervenir aucun choix de coordonnées locales. Elles se complètent par les formules

$$de(\Omega) - e(\Omega)d = 0, \qquad \partial i(\Omega) - i(\Omega)\partial = 0 \tag{14}$$

dont la première résulte du fait que $d\Omega = 0$, et la seconde s'obtient par transposition de la première.

Nous allons tirer quelques conséquences des relations fondamentales (9), (10) et (14), valables pour toute métrique kählérienne. (9) et (10) donnent aussitôt

$$d'\partial'' + \partial''d' = 0, \quad d''\partial' + \partial'd'' = 0 . \tag{15}$$

Puis on constate que $2(d'\partial' + \partial'd')$ et $2(d''\partial'' + \partial''d'')$ s'expriment tous deux par $d'i(\Omega)d'' - d''i(\Omega)d'' + d''d'i(\Omega) - i(\Omega)d'd''$; donc:

$$d'\partial' + \partial'd' = d''\partial'' + \partial''d'' , \tag{16}$$

ce qui, compte tenu de (15) et de l'expression de Δ, donne

$$\Delta = 2(d'\partial' + \partial'd') = 2(d''\partial'' + \partial''d'') . \tag{17}$$

En particulier, Δ <u>est de type</u> (0,0) et commute avec d', d'', ∂', ∂''. Pour qu'une forme soit harmonique, il faut et il suffit que ses composantes des divers types soient harmoniques.

Enfin, Δ commute avec $e(\Omega)$ et $i(\Omega)$: car il résulte de (9), (10) et (14) que

$$i(\Omega)\partial'd' = \partial'd'i(\Omega) - 2\partial'\partial'', \qquad i(\Omega)d'\partial' = d'\partial'i(\Omega) - 2\partial''\partial' ,$$

ce qui, compte tenu de $\partial'\partial'' + \partial''\partial' = 0$, donne bien

(18) $\quad i(\Omega)\Delta - \Delta i(\Omega) = 0$, et, en transposant, $e(\Omega)\Delta - \Delta e(\Omega) = 0$.

La dernière relation entraîne que, pour tout entier p, on a

(19) $\quad \Delta(\Omega^p) = 0$ (il s'agit de la puissance extérieure p-ième).

Ainsi la forme Ω^p (qui est $\neq 0$ si $p \leq m$) est harmonique.

La formule (17) prouve ceci: si $d''\alpha = 0$ et $\partial''\alpha = 0$, alors α est harmonique. Par exemple, toute forme holomorphe est harmonique: car d'' est nul pour une telle forme, et ∂'' aussi pour une raison de type. En outre: toute forme holomorphe α satisfait à $\partial\alpha = 0$, car $\partial'\alpha = 0$ en vertu de (10).

Tous les résultats précédents ont un caractère local. Passons aux propriétés globales d'une variété kählérienne, que nous supposerons compacte. Toute forme holomorphe (partout définie) est fermée, puisqu'harmonique. Les formes holomorphes de degré p ne sont autres que les formes harmoniques de type $(p, 0)$. L'espace $\mathcal{H}_1$ des formes harmoniques est somme directe de ses composantes des divers types; donc le p-ième nombre de Betti b_p de V est somme des $b_{q,r}$, dimensions (complexes) des espaces de formes harmoniques de type (q, r), pour tous les couples d'entiers (q, r) tels que $q+r = p$. On peut voir que les entiers $b_{q,r}$ sont des invariants de la structure analytique complexe (ils ne dépendent pas de la métrique kählérienne choisie). D'ailleurs $b_{q,r} = b_{r,q}$ (changer chaque forme en sa conjuguée); donc le nombre de Betti b_p est pair si p est impair. Ceci est notamment le cas pour $p = 1$: le premier nombre de Betti est le double de la dimension (complexe) de l'espace des 1-formes holomorphes (fermées), qu'on appelle aussi "différentielles de première espèce" (ce sont les différentielles des fonctions holomorphes, localement uniformes, qui, par tout lacet, se reproduisent augmentées d'une constante).

Les nombres de Betti b_p des dimensions paires $\leq 2m$ sont tous $\neq 0$, comme le prouve l'existence de la forme harmonique Ω^q $(q = p/2)$. Pour d'autres précisions sur les nombres de Betti, voir les Notes d'Eckmann-Guggenheimer). Notons enfin que la formule de la fin du §3 donne, pour une variété kählérienne compacte,

$$\omega = H\omega + 2d'\partial'G\omega + 2\partial'd'G\omega = H\omega + 2d''\partial''G\omega + 2\partial''d''G\omega \ .$$

G commute avec d', d'', ∂', ∂''. Le projecteur $\omega \to H\omega$ (qui est compatible avec la bigraduation définie par le type) est un opérateur d'homotopie, non seulement pour l'opérateur d, mais aussi pour chacun des opérateurs d' et d'' (et aussi pour ∂, ∂' et ∂''). Ainsi: la variété V a même cohomologie pour d', et pour d'', que pour d.

7. Exemples de variétés kählériennes.

Tout d'abord, évidemment, l'espace C^m muni du $ds^2 = \Sigma_k\, dz_k\overline{dz}_k$. Une variété, quotient de C^m par un sous-groupe discret Γ du groupe des translations de C^m, possède une métrique kählérienne, induite par celle de C^m. D'une manière générale, soit une V kählérienne, et soit Γ un groupe proprement discontinu d'automorphismes analytiques de V, qui conservent la métrique kahlérienne de V; alors il y a une metrique kahlérienne induite sur la variété quotient de V par Γ. Tout revêtement d'une variété kählérienne est une variété kählérienne.

Il existe une métrique kählérienne sur l'espace projectif complexe de dimension (complexe) m: celui-ci étant identifié à un quotient de la sphère $\Sigma_k\, z_k\overline{z_k} = 1$ de l'espace C^{m+1}, considérons, sur cette sphere, la métrique induite par $\Sigma_k\, dz_k d\overline{z_k} - \Sigma_{j,k}\, z_j\overline{z_k}d\overline{z_j}dz_k$; elle est kählérienne, et invariante par le groupe par lequel il faut passer au quotient pour obtenir l'espace projectif. D'où une métrique kählérienne sur l'espace projectif.

Toute variété analytique, localement "plongée" (d'une manière analytique-complexe) dans une variété kählérienne V, est kählérienne: prendre la métrique induite. En particulier, toute variété algébrique, plongée localement sans singularité dans l'espace projectif, est kählérienne.

Bibliographie

W. HODGE, Harmonic integrals, Cambridge (1941); Differential forms on a Kähler Manifold Proc. Cambridge Phil. Soc., 47 (1951) p. 504-517.

BIDAL et DE RHAM, Les formes différentielles harmoniques, Comm. Math. Helv., 19 (1946) p. 1-49.

DE RHAM, Sur la théorie des formes différentielles harmoniques, Annales de Grenoble, 22 (1946) p. 135-154; Harmonic integrals, Cours miméographié, Institute for Advanced Study, Princeton ,(1950).

A. WEIL, Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe, Comm. Math. Helv., 20 (1947) p. 110-116.

ECKMANN et GUGGENHEIMER, Comptes Rendus, 229 (1949) p. 464, 489, et 503.