SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

**Faisceaux analytiques sur les variétés de Stein : démonstration
des théorèmes fondamentaux**

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. n° 19, p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A19_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1951-1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

1951-52

FAISCEAUX ANALYTIQUES SUR LES VARIÉTÉS
DE STEIN:
DEMONSTRATION DES THÉORÈMES FONDAMENTAUX
(Exposé de H. Cartan, 9-6-52,
rédigé en octobre 1952).

1. Une proposition préliminaire.

Proposition 1. Soit K un compact d'une variété analytique complexe E . Pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur K , il existe un faisceau analytique cohérent $\mathcal{G}$ sur un voisinage V de K , et un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur le faisceau induit par $\mathcal{G}$ sur K .

La proposition 1 vaut, plus généralement, si K est un fermé de E , lorsque la variété E est paracompacte (c'est-à-dire si chaque composante connexe de E est réunion dénombrable de compacts). Nous nous bornerons ici à faire la démonstration dans le cas où K est compact.

On peut dire brièvement que tout faisceau analytique cohérent sur K peut être prolongé en un faisceau analytique cohérent sur un voisinage de K . Dans chaque cas particulier, la proposition 1 sera assez évidente, à cause de la définition spécifique du faisceau envisagé. Dans le cas général, la démonstration de la proposition 1, sans présenter de difficulté fondamentale, est assez délicate. Nous allons la faire précéder de plusieurs lemmes.

Lemme 1. Soient X un sous-ensemble quelconque d'une variété analytique complexe E , $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux analytiques cohérents sur X , et soient f et g deux homomorphismes analytiques $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$. L'ensemble des points $x \in X$ où $f_x = g_x$ est ouvert dans X .

Démonstration: en remplaçant f par $f - g$ et g par 0 , on se ramène au cas où g est nul. Soit alors $x \in X$; il existe un nombre fini de sections u_i de $\mathcal{F}$ au-dessus d'un voisinage de x , qui engendrent $\mathcal{F}_y$ en tout point y voisin de x . Pour que $f_y = 0$ en un point y , il faut

et il suffit que $f_y(u_i) = 0$ pour tout i . Or, pour chaque u_i , l'ensemble des y tels que $f_y(u_i) = 0$ est ouvert (propriété générale des homomorphismes de faisceaux quelconques).

Lemme 2. Soient E une variété analytique complexe, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux analytiques cohérents dans E . Soit donné, en un point $x \in E$, un $\mathcal{O}_x$ -homomorphisme $f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$. Alors il existe un ouvert U contenant x , et un homomorphisme analytique $g: \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{G}_U$ des faisceaux induits par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur U , tel que $g_x = f_x$. (On peut dire qu'on a prolongé l'homomorphisme de modules f_x en un homomorphisme de faisceaux dans un voisinage de x).

Démonstration: dans un voisinage convenable du point x , $\mathcal{F}$ est engendré par un nombre fini de sections u_i , et le faisceau des relations entre les u_i est engendré par un nombre fini de systèmes de fonctions holomorphes (a_k^i) ($k = 1, 2, \dots$). On a donc

$$(1) \quad \sum_i a_k^i u_i = 0 \text{ au voisinage de } x, \text{ pour tout } k.$$

De même, dans un voisinage convenable de x , $\mathcal{G}$ est engendré par un nombre fini de sections v_j .

Considérons l'homomorphisme $f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$. Chacun des $f_x(u_i)$ peut s'écrire (de plusieurs manières) comme combinaison linéaire $\sum_j \lambda_i^j v_j$, à coefficients λ_i^j holomorphes au voisinage de x . La relation (1) entraîne

$$(2) \quad \sum_{i,j} a_k^i \lambda_i^j v_j = 0 \text{ dans un voisinage de } x.$$

Plaçons-nous alors en un point y assez voisin de x . Les u_i engendrent $\mathcal{F}_y$; si à $u_i \in \mathcal{F}_y$ on associe $\sum_j \lambda_i^j v_j \in \mathcal{G}_y$, on définit un homomorphisme analytique f_y de $\mathcal{F}_y$ dans $\mathcal{G}_y$: en effet, soient a^i des fonctions holomorphes au point y et telles que $\sum_i a^i u_i = 0$; montrons qu'on a bien $\sum_{i,j} a^i \lambda_i^j v_j = 0$ dans $\mathcal{G}_y$. Or on a $a^i = \sum_k \alpha^k a_k^i$, les α^k étant holomorphes en y , donc $\sum_{i,j} a^i \lambda_i^j v_j = \sum_k (\sum_{i,j} a_k^i \lambda_i^j v_j) \alpha^k$, qui est nul d'après (2). Cela étant, la collection des homomorphismes f_y relatifs aux points y d'un voisinage convenable U de x , définit bien un homomorphisme du faisceau $\mathcal{F}_U$ (induit par $\mathcal{F}$ dans U) dans le faisceau $\mathcal{G}_U$ (induit par $\mathcal{G}$ dans U).

Lemme 3. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux analytiques cohérents dans une variété analytique complexe E . Soient $\mathcal{F}_K$ et $\mathcal{G}_K$ les faisceaux qu'ils induisent sur un compact K , et soit f un homomorphisme analytique de $\mathcal{F}_K$ dans $\mathcal{G}_K$. Alors il existe un voisinage V de K et un homomorphisme analytique $\mathcal{F}_V \rightarrow \mathcal{G}_V$ qui prolonge f .

N. B. Ce lemme vaut, plus généralement, lorsque K est un fermé, réunion dénombrable de compacts. Nous ferons la démonstration en supposant K compact.

Démonstration: d'après le lemme 2, tout point $x \in K$ possède un voisinage ouvert W tel qu'il existe un homomorphisme analytique $g: \mathcal{F}_W \rightarrow \mathcal{G}_W$ des faisceaux induits dans W , homomorphisme qui se réduise à f_x au point x . D'après le lemme 1, on peut choisir W assez petit pour que $g_y = f_y$ en tout point $y \in K \cap W$. Puisque K est compact, on peut recouvrir K avec un nombre fini d'ouverts W_i pour chacun desquels existe un homomorphisme analytique $g^i: \mathcal{F}_{W_i} \rightarrow \mathcal{G}_{W_i}$ tel que $(g^i)_x = f_x$ en tout point $x \in K \cap W_i$. Il existe des ouverts V_i recouvrant K , tels que leurs adhérences $\bar{V}_i$ soient contenues respectivement dans les W_i . Soit A la réunion des $\bar{V}_i$; c'est un voisinage de K . Pour chaque point $x \in A$, considérons tous les indices i tels que $x \in \bar{V}_i$, et les homomorphismes $(g^i)_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ correspondant à ces valeurs de i . L'ensemble des $x \in A$ tels que tous ces homomorphismes soient égaux est ouvert dans A , d'après le lemme 1. Comme cet ensemble contient K , c'est un voisinage V de K . En un point $x \in V$, soit g_x la valeur commune des homomorphismes $(g^i)_x$; la collection des g_x définit un homomorphisme analytique de $\mathcal{F}_V$ dans $\mathcal{G}_V$, et cet homomorphisme prolonge f .

Démonstration de la proposition 1. Dans les hypothèses de cette proposition, on peut associer à chaque point $x \in K$ un ouvert U contenant x , un faisceau analytique cohérent $\mathcal{G}$ sur U , et un isomorphisme du faisceau induit $\mathcal{G}_{K \cap U}$ sur le faisceau $\mathcal{F}_{K \cap U}$: cela résulte de la définition d'un faisceau analytique cohérent (cf. 18). Puisque K est compact, on peut recouvrir K avec un nombre fini d'ouverts U_i , dans chacun

desquels on a un faisceau analytique cohérent $\mathcal{G}^i$, avec un isomorphisme $g^i: (\mathcal{G}^i)_{K \cap U_i} \rightarrow \mathcal{F}_{K \cap U_i}$. Il existe des ouverts V_i recouvrant K , tels que $\bar{V}_i \subset U_i$. Pour tout couple (i, j) d'indices distincts, tels que $K \cap \bar{V}_i \cap \bar{V}_j = K_{ij}$ ne soit pas vide, on a un isomorphisme g^{ij} du faisceau induit sur K_{ij} par $\mathcal{G}^j$, sur le faisceau induit par $\mathcal{G}^i$, à savoir $(g^i)^{-1} \circ g^j$; et si $K \cap \bar{V}_i \cap \bar{V}_j \cap \bar{V}_k \neq \emptyset$, on a $g^{ij} \circ g^{jk} \circ g^{ki} = \text{identité}$.

D'après le lemme 3, K_{ij} possède un voisinage U_{ij} contenu dans $U_i \cap U_j$, et dans lequel existe un homomorphisme analytique f^{ij} du faisceau induit par $\mathcal{G}^j$, dans le faisceau induit par $\mathcal{G}^i$, f^{ij} prolongeant g^{ij} . Si $i = j$, on prend $U_{ii} = U_i$ et $f^{ii} = \text{identité}$. Soit A la réunion des $\bar{V}_i$; c 'est un voisinage de K . Tout point $x \in A$ assez voisin de K jouit des propriétés suivantes: quels que soient i et j (distincts ou non) tels que $x \in \bar{V}_i \cap \bar{V}_j$, on a $x \in U_{ij}$ (donc f^{ij} est définie en ce point); et quels que soient i, j, k tels que $x \in \bar{V}_i \cap \bar{V}_j \cap \bar{V}_k$, on a $f^{ij} f^{jk} f^{ki} = \text{identité}$.

Soit V un voisinage de K dont tous les points x jouissent de ces propriétés. V est réunion des $V \cap \bar{V}_i$; sur $V \cap \bar{V}_i$ on a le faisceau induit par $\mathcal{G}^i$, que nous noterons encore $\mathcal{G}^i$. Dans l'intersection de $V \cap \bar{V}_i$ et de $V \cap \bar{V}_j$, on a un isomorphisme f^{ij} des faisceaux induits par $\mathcal{G}^i$ et par $\mathcal{G}^j$. Dans l'intersection de $V \cap \bar{V}_i$, $V \cap \bar{V}_j$ et $V \cap \bar{V}_k$, ces isomorphismes satisfont à la condition de transitivité $f^{ij} f^{jk} f^{ki} = \text{identité}$. La collection des $\mathcal{G}^i$ et de ces isomorphismes définit donc sur V un faisceau analytique cohérent $\mathcal{G}$. Enfin, on a un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur le faisceau induit par $\mathcal{G}$ sur K : il est défini dans $K \cap \bar{V}_i$ par l'isomorphisme $(g^i)^{-1}$ du faisceau $\mathcal{F}_{K \cap V_i}$ sur $(\mathcal{G}^i)_{K \cap V_i}$. Ceci achève la démonstration de la proposition 1.

Voici une application de la proposition 1:

Proposition 2. Soient E une variété analytique complexe, et K un compact de E qui possède un système fondamental de voisinages compacts pour chacun desquels les théorèmes A et B (de 18) sont vrais. Alors les théorèmes A et B sont vrais pour K .

En effet, soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur K . D'après la proposition 1, on peut supposer que $\mathcal{F}$ existe dans un voisinage V de K . Soit K' un compact contenant K et contenu dans V , tel que le théorème A soit vrai pour K' . Alors le module des sections $H^0(K', \mathcal{F})$ engendre $\mathcal{F}_x$ pour sa structure de $\mathcal{O}_x$ -module, et ceci pour tout point $x \in K'$, et en particulier pour $x \in K$. A fortiori, $H^0(K, \mathcal{F})$ engendre $\mathcal{F}_x$ pour $x \in K$. Reste à prouver le théorème B, qui dit que $H^q(K, \mathcal{F}) = 0$ pour $q \geq 1$. Or $H^q(K, \mathcal{F})$ est la limite inductive des $H^q(K', \mathcal{F})$ relatifs aux voisinages fermés K' de K (ou aux voisinages ouverts de K): cela résulte de la proposition 1, car le groupe des sections d'un faisceau sur un fermé compact est limite inductive du groupe des sections de ce faisceau sur les voisinages de ce fermé); or les groupes de cohomologie $H^q(K, \mathcal{F})$ se calculent comme groupes d'homologie d'un complexe, formés de sections de faisceaux.

Remarque: la proposition 2 vaut, plus généralement, si K est un fermé possédant un système fondamental de voisinages ouverts qui sont des ouverts de Stein.

2. Démonstration des théorèmes A et B pour les cubes de $\mathbb{C}^n$.

L'espace numérique complexe $\mathbb{C}^n$ étant identifié à $\mathbb{R}^{2n}$, prenons dans chacun des $2n$ facteurs isomorphes à $\mathbb{R}$ un intervalle compact, éventuellement réduit à un point. Le produit de ces $2n$ intervalles est un cube (compact) X ; sa dimension (réelle) est égale au nombre des intervalles facteurs non réduits à un point.

Sur un tel cube X , on considère la structure analytique complexe définie par l'espace ambiant $\mathbb{C}^n = E$. On se propose de montrer que les théorèmes A et B (exposé 18) sont vrais pour un tel X . On démontrera le théorème A sous la forme suivante:

Théorème A'. Il existe un nombre fini d'éléments $u_i \in H^0(X, \mathcal{F})$ qui jouissent de la propriété suivante: pour tout point $x \in X$, le module $\mathcal{F}_x$ est $\mathcal{O}_x$ -engendré par les u_i .

Il est évident que le théorème A est équivalent au théorème A', en vertu de la compacité de X .

Les théorèmes A' et B vont être démontrés par récurrence sur la dimension (réelle) r du cube X . Ils sont trivialement vrais pour $r = 0$, car alors X est réduit à un seul point. Supposons-les vrais pour $r - 1$ ($r \geq 1$), et prouvons-les pour r .

Démonstration du théorème A': $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur X . On supposera $\mathcal{F}$ défini dans un voisinage de X (cf. prop. 1). X est produit d'un intervalle I et d'un cube de dimension $r - 1$ situé dans un $\mathbb{R}^{2n-1}$. Pour chaque $t \in I$, soit $X(t)$ la section du cube X : c'est un cube de $\mathbb{C}^n$, de dimension $r - 1$. D'après le théorème A' appliqué au cube $X(t)$, il existe un nombre fini de sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de $X(t)$, qui $\mathcal{O}_X$ -engendrent $\mathcal{F}_X$ en tout point $x \in X(t)$. Il est immédiat que ces sections se prolongent à un voisinage de $X(t)$, et $\mathcal{O}_X$ -engendrent $\mathcal{F}_X$ en tout point x d'un voisinage de $X(t)$. Puisque I est compact on peut recouvrir I avec un nombre fini d'intervalles fermés I_k , et trouver, pour chaque k , un nombre fini de sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de l'image réciproque X_k de I_k dans X , de manière que ces sections $\mathcal{O}_X$ -engendrent $\mathcal{F}_X$ en tout point $x \in X_k$. On peut supposer les intervalles I_k non empiétants. Pour démontrer le théorème A', il suffit de résoudre le problème élémentaire que voici:

Soient X' et X'' les points du cube X pour lesquels on a respectivement $t \leq t_0$ et $t \geq t_0$. Supposons connu un système fini d'éléments $u'_i \in H^0(X', \mathcal{F})$ (resp. un système fini d'éléments $v''_j \in H^0(X'', \mathcal{F})$), qui $\mathcal{O}_X$ -engendrent $\mathcal{F}_X$ en tout point $x \in X'$ (resp. en tout point $x \in X''$). Il s'agit de trouver un système fini d'éléments $w_k \in H^0(X, \mathcal{F})$ qui $\mathcal{O}_X$ -engendrent $\mathcal{F}_X$ en tout point $x \in X$. Or l'intersection $X' \cap X''$ est un cube de dimension $r - 1$. On peut lui appliquer les théorèmes A et B, et notamment le corollaire 3 (18, p. 9): les u'_i engendrent $H^0(X' \cap X'', \mathcal{F})$ pour sa structure de module sur l'anneau des fonctions holomorphes dans $X' \cap X''$; de même, les v''_j engendrent le même module. Appliquons alors le théorème 3 de 18 (p. 8): on trouve l'existence des w_k .

On observera que c'est ici le point précis de la démonstration où intervient de manière essentielle le théorème sur les matrices holomorphes inversibles (exp. 17, th. 1).

Démonstration du théorème B: $\mathcal{F}$ étant un faisceau analytique cohérent dans un voisinage du cube X de dimension r , on veut prouver que $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout entier $q \geq 1$. Pour cela, nous utiliserons des cochaînes pour le calcul de la cohomologie (par ex., les cochaînes d'Alexander-Spanier; cf. sém. 1950-51, 16, p. 8-9).

Soit γ un cocycle de degré $q \geq 1$; on veut montrer que γ est le cobord d'une cochaîne β de degré $q - 1$: $\gamma = d\beta$. Pour chaque $t \in I$, l'image de γ dans $H^q(X(t), \mathcal{F})$ est nulle, puisque le théorème B est vrai pour le cube $X(t)$ de dimension $r - 1$. Il existe donc une $(q-1)$ -cochaîne $\beta(t)$, au-dessus de l'espace X , tel que son cobord $d\beta(t)$ soit égal à γ au voisinage de $X(t)$; autrement dit, le "support" de $d\beta(t) - \gamma$ ne rencontre pas $X(t)$. En vertu de la compacité de I , on peut recouvrir I avec un nombre fini d'intervalles fermés I_k , et trouver, pour chaque I_k , une $(q-1)$ -cochaîne β_k telle que le support de $d\beta_k - \gamma$ ne rencontre pas l'ensemble X_k des points de X pour lesquels $t \in I_k$. Il s'agit maintenant de fabriquer une $(q-1)$ -cochaîne β telle que $d\beta - \gamma$ soit nul.

On est ramené au problème élémentaire que voici: soient X' (resp. X'') l'ensemble des points de X tels que $t \leq t_0$ (resp. $t \geq t_0$). Supposons connues deux cochaînes β' et β'' , de degré $q-1$, telles que $d\beta' = \gamma$ au-dessus de X' (resp. $d\beta'' = \gamma$ au-dessus de X''). Trouver une cochaîne β telle que $d\beta = \gamma$ dans X . Si $q \geq 2$, ce problème se résout aisément: on a en effet $d(\beta' - \beta'') = 0$ au-dessus de l'intersection $X' \cap X''$, qui est un cube de dimension $r-1$; d'après le théorème B (vrai pour ce cube), l'image de $\beta' - \beta''$ dans $H^{q-1}(X' \cap X'', \mathcal{F})$ est nulle, donc il existe une $(q-2)$ -cochaîne α de X , telle que $d\alpha = \beta' - \beta''$ au-dessus de $X' \cap X''$. La cochaîne égale à β' au-dessus de X' , et à $\beta'' + d\alpha$ au-dessus de X'' , est une cochaîne β telle que $d\beta = \gamma$ dans X .

Il reste à résoudre le problème élémentaire dans le cas $q = 1$.

On a encore $d(\beta' - \beta'') = 0$ au-dessus de $X' \cap X''$. Ceci exprime que $\beta' - \beta''$ est une section du faisceau $\mathcal{F}$ au-dessus de $X' \cap X''$, c'est-à-dire un élément de $H^0(X' \cap X'', \mathcal{F})$. Appliquons le théorème A' au cube X , ce qui est licite puisqu'on vient de démontrer A' pour un cube de dimension r : il existe un nombre fini de sections $u_i \in H^0(X, \mathcal{F})$, qui $\mathcal{O}_X$ -engendrent $\mathcal{F}_X$ en tout point $x \in X$. D'autre part, les théorèmes A et B sont vrais pour le cube $X' \cap X''$ de dimension $r-1$; le corollaire 3 (18, p. 9) est donc applicable à $X' \cap X''$. Il dit que les u_i engendrent $H^0(X' \cap X'', \mathcal{F})$ pour sa structure de module sur l'anneau des fonctions holomorphes dans $X' \cap X''$. On peut donc écrire, au voisinage de $X' \cap X''$,

$$\beta' - \beta'' = \sum_i \lambda_i u_i,$$

les λ_i étant holomorphes au voisinage de $X' \cap X''$. Mais, grâce à l'intégrale de Cauchy (utilisée par Cousin), on a

$$\lambda_i = \lambda_i' - \lambda_i'',$$

λ_i' étant holomorphe dans X' , et λ_i'' holomorphe dans X'' . Ainsi

$$\beta' - \sum_i \lambda_i' u_i = \beta'' - \sum_i \lambda_i'' u_i \text{ au voisinage de } X' \cap X''.$$

Ceci prouve qu'il existe une cochaîne β (de degré 0) égale à $\beta' - \sum_i \lambda_i' u_i$ au voisinage de X' , et à $\beta'' - \sum_i \lambda_i'' u_i$ au voisinage de X'' . On a bien $d\beta = \gamma$ dans X , car $d\beta = d\beta'$ au voisinage de X' , et $d\beta = d\beta''$ au voisinage de X'' . Le "problème élémentaire" est donc résolu. Et le théorème B est démontré pour tout cube de dimension r .

3. Démonstration des théorèmes A et B pour certains compacts d'une variété analytique-complexe.

Envisageons d'abord le cas où X est un produit de disques compacts, dans l'espace $\mathbb{C}^n$. Les théorèmes A et B sont vrais pour un tel X : on peut le voir de deux manières. La première méthode consiste à montrer, par récurrence sur l'entier r , qu'ils sont vrais pour l'intersection de X et d'un cube compact de dimension r ; la marche de la démonstration est exactement la même qu'au n° 2.

Une deuxième méthode consiste à se ramener à la proposition 2 du n° 1. On observe d'abord ceci:

Lemme 4. Si X est un produit de disques compacts, X possède un système fondamental de voisinages compacts qui sont isomorphes à des cubes ("isomorphes" pour la structure analytique complexe induite par l'espace ambiant $\mathbb{C}^n$).

En effet, X possède un système fondamental de voisinages ouverts, dont chacun est un produit de disques ouverts. Soit V l'un quelconque de ces voisinages; faisons une représentation conforme de chaque composante de V sur un carré ouvert; on obtient un isomorphisme analytique f de V sur un cube ouvert. Il existe un cube compact contenu dans $f(V)$ et contenant $f(X)$. Ceci prouve le lemme.

Le rapprochement du lemme 4 et de la proposition 2 montre aussitôt que les théorèmes A et B sont vrais pour X (produit de disques compacts).

Proposition 3. Soit X un produit de disques compacts, et soit V une variété analytique plongée (sans singularité) dans un voisinage de X . Les théorèmes A et B sont vrais pour le compact $V \cap X$ (muni de la structure analytique induite par celle de V).

En effet, comme on l'a déjà dit en 18 (p. 7), cela résulte de la proposition 4 de 18.

Proposition 4. Soit E une variété analytique-complexe satisfaisant aux deux conditions suivantes:

(β) les fonctions holomorphes dans E séparent les points de E ;

(γ) tout point de E possède un système de coordonnées locales (complexes) qui sont des fonctions holomorphes dans tout E .

Soit K un compact de E , identique à son "enveloppe" (i.e., pour tout point $x \notin K$, il existe une f holomorphe dans E , telle que $|f(x)| > \sup_{y \in K} |f(y)|$). Alors les théorèmes A et B sont vrais pour K (muni de la structure analytique induite par celle de E).

Remarque: les hypothèses (β) et (γ) sont deux des trois conditions qui expriment qu'une variété analytique-complexe est une variété de Stein.

Démonstration de la proposition 4: on a prouvé dans 9 (lemme, p.8-9) que K possède un système fondamental de voisinages ouverts, dont chacun est une "variété d'Oka-Weil," c'est-à-dire se plonge sans singularité dans un produit de disques ouverts (démonstration p. 9 de 9). Ceci prouve aussi que K possède un système fondamental de voisinages compacts, dont chacun L se plonge comme sous-variété (sans singularité) dans un produit de disques compacts. Les théorèmes A et B sont vrais pour un tel compact L , d'après la proposition 3 ci-dessus. Ils sont donc vrais pour K , en vertu de la proposition 2.

La proposition 4 peut être complétée comme suit:

Proposition 5. Dans les hypothèses de la proposition 4, supposons en outre qu'on ait un espace vectoriel $\mathcal{O}$ de fonctions holomorphes dans E , tel que pour tout $x \notin K$ il existe une $f \in \mathcal{O}$ telle que $|f(x)| > \sup_{y \in K} |f(y)|$. Alors toute fonction holomorphe au voisinage de K est limite de polynômes par rapport aux fonctions de $\mathcal{O}$, la convergence étant uniforme dans un voisinage de K . (Cf. Oka, Journ. Hiroshima 7 (1936), p. 115-130).

(Comparer à 9, lemme p. 9. Ce lemme avait alors été établi en admettant un théorème d'approximation (p. 7 de 9) qu'on démontre précisément ici.

Démonstration de la proposition 5: soit f une fonction holomorphe au voisinage de K ; f est holomorphe sur un voisinage compact L de K , qui se plonge comme sous-variété (sans singularité) dans un produit X de polydisques compacts d'un espace $\mathbb{C}^N$, et l'application de L dans $\mathbb{C}^N$ est définie par des fonctions de $\mathcal{O}$. En vertu du corollaire 4 (exposé 18), il existe une g holomorphe dans X qui induit f sur K . D'après un théorème classique, g est limite uniforme de polynômes par rapport aux coordonnées complexes de l'espace $\mathbb{C}^N$. Ces polynômes induisent sur L des polynômes par rapport à des fonctions de $\mathcal{O}$.

4. Cas des variétés de Stein: lemmes préparatoires.

Soit E une variété de Stein, c'est-à-dire une variété analytique-complexe qui soit réunion dénombrable de compacts et satisfasse aux conditions (β) , (γ) et (α') de l'exposé 9. Pour chaque compact K de E , notons $\hat{K}$ l'"enveloppe" de K . On peut, à chaque compact K , associer un ouvert V contenant K , et tel que $V \cap \hat{K}$ soit compact (c'est ce qu'exprime la condition (α')). Le compact $V \cap \hat{K} = X$ jouit des propriétés suivantes:

1) comme compact contenu dans la variété analytique complexe V , X est identique à son enveloppe. Donc, d'après la proposition 4, les théorèmes A et B sont vrais pour X .

2) toute fonction holomorphe dans X est limite uniforme de fonctions holomorphes dans E , comme cela résulte de la proposition 5 (appliquée à la variété V et à l'espace $\mathcal{O}$ des fonctions induites sur V par les fonctions holomorphes de E).

Cela étant, la variété de Stein E est réunion d'une suite croissante de compacts X_n du type précédent, et l'on peut supposer (ce que nous ferons) que chaque X_n est intérieur au suivant X_{n+1} .

Soit donné un faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur E . Pour chaque X_n , choisissons un système fini de générateurs $u_n^1, u_n^2, \dots$ du $\mathcal{O}_{X_n}$ -module $H^0(X_n, \mathcal{F})$. Un tel système existe, en vertu de la remarque de 18 (p. 10), puisque les théorèmes A et B sont vrais pour le compact X_n . De plus, pour tout point $x \in X_n$, $H^0(X_n, \mathcal{F})$ engendre $\mathcal{F}_x$ pour sa structure de $\mathcal{O}_x$ -module.

On va définir une semi-norme dans l'espace $\mathbb{C}$ -vectoriel $H^0(X_n, \mathcal{F})$: pour un $s \in H^0(X_n, \mathcal{F})$, la semi-norme $\|s\|_n$ sera la borne inférieure des nombres $t > 0$ tels qu'il existe des coefficients c_i holomorphes dans X_n et satisfaisant à $\sum_i c_i u_n^i = s$, $|c_i| \leq t$ dans X_n . Cette semi-norme dépend, bien entendu, du choix des générateurs u_n^i . Elle définit sur $H^0(X_n, \mathcal{F})$ une topologie, dont il serait facile de montrer qu'elle ne dépend pas du choix des générateurs u_n^i (nous n'aurons pas à nous servir de ce fait). Cette topologie n'est peut-être pas séparée: il est possible que $\|s\|_n = 0$ sans que s soit nul. Toutefois:

Lemme 5. Soit $s \in H^0(X_{n+1}, \mathcal{F})$ tel que $\|s\|_{n+1} = 0$. Alors l'élément de $H^0(X_n, \mathcal{F})$ induit par s est nul.

Démonstration: s peut s'écrire $\sum_i c_i u_{n+1}^i$, et les c_i , holomorphes dans X_{n+1} , sont limites (uniformément dans X_{n+1}) de fonctions holomorphes c'_i telles que $\sum_i c'_i u_{n+1}^i = 0$. En tout point $x \in X_n$, le système des c'_i appartient au module $\mathcal{R}_x$ des relations entre les u_{n+1}^i ; or on sait qu'un tel module est fermé pour la convergence uniforme des fonctions dans un voisinage fixe du point x (cf. exposé 11). Le système des c_i appartient donc à $\mathcal{R}_x$ en tout point $x \in X_n$, et par suite $\sum_i c_i u_{n+1}^i$ induit 0 dans $H^0(X_n, \mathcal{F})$.

L'application canonique $H^0(X_{n+1}, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X_n, \mathcal{F})$ est continue pour les semi-normes de ces deux espaces vectoriels. En effet, on a

$$u_{n+1}^j = \sum_i \lambda_i^j u_n^i,$$

les λ_i^j étant holomorphes dans X_n , donc bornées. Soit alors

$$s = \sum_j c_j u_{n+1}^j,$$

les c_j étant holomorphes dans X_{n+1} . La section induite par s sur X_n est

$$\sum_i \left(\sum_j c_j \lambda_i^j \right) u_n^i,$$

d'où

$$(3) \quad \|s\|_n \leq k_n \|s\|_{n+1}, \quad \text{avec} \quad k_n = \sup_i \left(\sum_j |\lambda_i^j| \right).$$

En particulier, considérons une suite d'éléments $s_p \in H^0(X_{n+1}, \mathcal{F})$ tel que $\sum_p \|s_p\|_{n+1} < \infty$. Il existe au moins une "somme" pour cette série dans $H^0(X_n, \mathcal{F})$, c'est-à-dire un $s \in H^0(X_n, \mathcal{F})$ tel que $\lim_{q \rightarrow \infty} \|s - \sum_{p \leq q} s_p\|_n = 0$. En effet, on a $s_p = \sum_j c_j^p u_{n+1}^j$, les c_j^p étant holomorphes dans X_{n+1} , avec $|c_j^p| \leq \|s_p\|_{n+1}$ dans X_{n+1} . Pour chaque j , la série de fonctions holomorphes $\sum_j c_j^p$ converge normalement dans X_{n+1} , donc sa somme est une fonction holomorphe dans X_n , soit c_j . Il est immédiat que l'élément $\sum_j c_j u_{n+1}^j$

de $H^0(X_n, \mathcal{F})$ est, dans l'espace $H^0(X_n, \mathcal{F})$ muni de sa semi-norme, une somme de la série $\sum_p s_p$. A priori, cette série peut avoir plusieurs sommes dans $H^0(X_n, \mathcal{F})$; si s et s' sont deux telles sommes, on a $\|s-s'\|_n = 0$, donc (lemme 5) s et s' induisent le même élément de $H^0(X_{n-1}, \mathcal{F})$. Finalement: à toute série $\sum_p s_p$ d'éléments de $H^0(X_{n+1}, \mathcal{F})$ telle que $\sum_p \|s_p\|_{n+1}$ converge, on peut associer une "somme" unique dans $H^0(X_{n-1}, \mathcal{F})$.

Lemme 6. Pour tout élément $s \in H^0(X_n, \mathcal{F})$ et tout nombre $t > 0$, il existe un $s' \in H^0(X_{n+1}, \mathcal{F})$ tel que $\|s - s'\|_n \leq t$.

Tout d'abord, $u_{n+1}^1, u_{n+1}^2, \dots$ engendrent le $\mathcal{O}_{X_n}$ -module $H^0(X_n, \mathcal{F})$; en effet, ils $\mathcal{O}_X$ -engendrent $\mathcal{F}_X$ en tout point $x \in X_n$, et l'on peut donc appliquer le corollaire 3 (18, p. 9). Ainsi

$$s = \sum_i a_i u_{n+1}^i,$$

les a_i étant holomorphes dans X_n . Or il existe des fonctions b_i holomorphes dans E et telles que $|a_i - b_i| \leq t$ dans X_n . Ceci prouve le lemme.

Lemme 7. Pour tout élément $s_n \in H^0(X_n, \mathcal{F})$ et tout nombre $t > 0$, il existe un $s' \in H^0(E, \mathcal{F})$ tel que $\|s' - s_n\|_n \leq t$.

D'après le lemme 6, il existe $s_{n+1} \in H^0(X_{n+1}, \mathcal{F})$ tel que $\|s_{n+1} - s_n\|_n \leq t/2$. De même, il existe $s_{n+2} \in H^0(X_{n+2}, \mathcal{F})$ tel que $\|s_{n+2} - s_{n+1}\|_{n+1} \leq t/(4k_n)$ (k_n est défini par (3)). D'une manière générale, supposons déjà défini $s_{n+p} \in H^0(X_{n+p}, \mathcal{F})$; il existe alors un $s_{n+p+1} \in H^0(X_{n+p+1}, \mathcal{F})$ tel que

$$\|s_{n+p+1} - s_{n+p}\|_{n+p} \leq 2^{-(p+1)} t / (k_n \cdots k_{n+p-1}).$$

Pour tout entier $q > 0$, on a, compte tenu de (3),

$$\|s_{n+q+p+1} - s_{n+q+p}\|_{n+q} \leq 2^{-(p+q+1)} t / (k_n \cdots k_{n+q-1}).$$

La série de terme général $s_{n+p+q+1} - s_{n+p+q}$ ($p = 1, 2, \dots$) d'éléments de $H^0(X_{n+q}, \mathcal{F})$ est telle que la série des semi-normes converge. D'après ce qu'on a expliqué plus haut, elle a donc une "somme" unique dans $H^0(X_{n+q-2}, \mathcal{F})$, soit σ_{n+q-2} . Posons $s'_{n+q-2} = \sigma_{n+q-2} + s_{n+q+1}$. C'est un élément de $H^0(X_{n+q-2}, \mathcal{F})$. Il est immédiat que s'_{n+q-1} induit s'_{n+q-2} sur X_{n+q-2} . Donc la collection des s'_{n+q-2} , lorsque q varie, définit une

section du faisceau $\mathcal{F}$ au-dessus de l'espace E tout entier. Si s' désigne cette section, on a

$$\|s' - s_n\|_n \leq \sum_{q \geq 0} \|s_{n+q+1} - s_{n+q}\|_n \leq t.$$

Ceci démontre le lemme 7.

5. Démonstration des théorèmes A et B pour les variétés de Stein.

Conservons les notations du numéro 4. Soit x un point de E , et soit à montrer que $H^0(E, \mathcal{F})$ engendre $\mathcal{F}_x$ pour sa structure de $\mathcal{O}_x$ -module (th. A). Soit n tel que x soit intérieur à X_n , et soit p le nombre des générateurs u_n^i de $H^0(X_n, \mathcal{F})$. Considérons les systèmes de p fonctions a_i , holomorphes au point x , telles que $\sum_i a_i u_n^i$ appartienne au sous-module de $\mathcal{F}_x$ engendré par $H^0(E, \mathcal{F})$. Ils forment un sous-module M de $\mathcal{O}_x^p$, et l'on veut précisément montrer que $M = \mathcal{O}_x^p$. Or on sait que si un élément de $\mathcal{O}_x^p$ est limite uniforme, dans un voisinage de x , d'éléments d'un sous-module M , il appartient à M (cf. exposé 11). Il suffit donc de montrer que tout système de p fonctions a_i holomorphes au voisinage de x est limite uniforme (dans un voisinage fixe de x , ne dépendant que du système des a_i) de systèmes (b_i) tels que $\sum_i b_i u_n^i$ soit induit par un élément de $H^0(E, \mathcal{F})$. Il suffit de faire cette démonstration quand tous les a_i sont nuls, sauf l'un d'eux égal à 1. Bref, il suffira de montrer ceci: chacun des éléments u_n^i ($i = 1, \dots, p$) est limite, au sens de la semi-norme de $H^0(X_n, \mathcal{F})$, d'éléments induits par des sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de E . Or c'est justement ce qu'affirme le lemme 7.

Passons à la démonstration du théorème B. Soit q un entier ≥ 1 , et soit à démontrer que $H^q(E, \mathcal{F}) = 0$. Soit γ un cocycle de degré q ; on cherche une cochaîne $\hat{\beta}$ de degré $q-1$ telle que $\gamma = d\hat{\beta}$.

Pour chaque X_n , on a $H^q(X_n, \mathcal{F}) = 0$. Il existe donc une cochaîne $\hat{\beta}_n$ au-dessus de X_n , telle que $\gamma = d\hat{\beta}_n$ au-dessus de X_n . Au-dessus de X_n , $\hat{\beta}_{n+1} - \hat{\beta}_n$ est un cocycle de degré $q-1$. Examinons d'abord le cas où $q \geq 2$. Alors, d'après le théorème B appliqué à X_n , on a, au-dessus de X_n , $\hat{\beta}_{n+1} - \hat{\beta}_n = d\hat{\alpha}_n$, $\hat{\alpha}_n$ étant une cochaîne de E , de degré $q-2$. On a

$d(\beta_{n+1} - d\alpha_n) = \gamma$ au-dessus de X_{n+1} , et $\beta_{n+1} - d\alpha_n$ coïncide avec β_n au-dessus de X_n . On peut donc modifier β_{n+1} , sans changer $d\beta_{n+1}$, de manière que β_{n+1} prolonge β_n . Alors la suite des β_n définit une cochaîne $\hat{\beta}$ sur E , et l'on a $d\hat{\beta} = \gamma$.

Il reste à examiner le cas où $q = 1$. Alors $\beta_{n+1} - \beta_n$ est une section s de $\mathcal{F}$ au-dessus de X_n . D'après le lemme 6, il existe une section s' de $\mathcal{F}$ au-dessus de X_{n+1} , telle que $\|s' - s\|_n \leq t$ arbitrairement petit. Autrement dit, on peut modifier β_{n+1} (sans changer $d\beta_{n+1}$) de manière que, au-dessus de X_n , la semi-norme de la section $\beta_{n+1} - \beta_n$ soit arbitrairement petite. En raisonnant comme dans le lemme 7, on pourra choisir $\beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \dots$ de manière que, pour chaque entier $r \geq 2$, la suite des sections $\beta_{n+p+r} - \beta_{n+r+1}$ ait pour "limite," lorsque $p \rightarrow \infty$, une section σ_{n+r-2} au-dessus de X_{n+r-2} . Posons $\beta'_{n+r-2} = \sigma_{n+r-2} + \beta_{n+r+1}$; c'est une cochaîne de degré 0 au-dessus de X_{n+r-2} . Il est clair que β'_{n+r-1} induit β'_{n+r-2} sur X_{n+r-2} . Donc la suite des β'_{n+r-2} , lorsque r tend vers l'infini, définit une cochaîne $\hat{\beta}'$, telle que $d\hat{\beta}' = \gamma$. Le théorème B est ainsi complètement démontré.

Remarque finale. On a prouvé les théorèmes A et B pour toutes les variétés de Stein, en ayant défini les variétés de Stein par les conditions (α') , (β) et (γ) . On verra dans le prochain exposé que, réciproquement, toute variété analytique complexe E pour laquelle le théorème B est vrai, satisfait à la condition (α) , plus restrictive que (α') . Donc, pour une variété E , réunion dénombrable de compacts, qui satisfait à (β) et (γ) , les conditions (α) et (α') sont équivalentes.