H. Cartan

Faisceaux analytiques sur les variétés de Stein

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. n° 18, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A18_0>

FAISCEAUX ANALYTIQUES
SUR LES VARIÉTÉS DE STEIN

(Exposé de H. Cartan, 19-5-52,
rédigé en Octobre 1952).

Après les 3 exposés préparatoires 15, 16, et 17, voici maintenant les résultats globaux de la théorie des idéaux de fonctions analytiques. Par rapport à ceux exposés dans le mémoire cité de H. Cartan (Bull. Soc. Math., 1950), ils sont plus complets et présentés autrement: ces changements et améliorations sont dus, pour une bonne part, à J. P. Serre.

1. Généralisation de la notion de faisceau analytique cohérent.

Dans 15, on a seulement considéré des faisceaux sur une variété analytique-complexe E; désormais, on envisagera aussi des faisceaux sur un sous-espace X de E (par exemple, sur un sous-espace compact X). Un tel X porte une structure analytique-complexe; d'une façon précise, on a le faisceau $\mathcal{O}(X)$ qui associe à chaque point $x \in X$ l'anneau $\mathcal{O}_x$ des fonctions holomorphes au point x (holomorphes dans la variété ambiante E). D'autre part, on ne se bornera pas à considérer des sous-faisceaux de $\mathcal{O}^q(X)$; la notion de faisceau analytique cohérent va être définie en toute généralité.

Lorsqu'on remplace la considération de la variété E par celle d'un sous-espace X de E, la définition de faisceau analytique donnée dans 15 se transpose sans changement, ainsi que celle de sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}^q(X)$. La proposition 1 et la proposition 3 de 15 restent valables sans modification. Seule la proposition 2 (15, p. 5) est à modifier: pour qu'un sous-faisceau analytique $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}^q(X)$ soit cohérent, il faut et il suffit que chaque point $x \in X$ possède, dans la variété ambiante E, un voisinage ouvert U dans lequel on a un sous-module de $\mathcal{O}_U^q$ qui engendre $\mathcal{F}_y$ en tout point $y \in U \cap X$. Mais, même si X est compact, on ignore si un sous-module arbitraire $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{O}_X^q$ engendre un faisceau cohérent sur

X; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\mathfrak{M}$ contienne un sous-module de type fini qui engendre, en chaque point $y \in X$, le même sous-module de $\mathcal{O}_y^q$ que $\mathfrak{M}$. (C'est un problème non résolu de savoir si cette condition est toujours vérifiée lorsque X est compact.)

Proposition 1. Soit $\mathcal{F}$ un sous-faisceau analytique de $\mathcal{O}^q(X)$. Pour que $\mathcal{F}$ soit cohérent, il faut et il suffit que tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel que le faisceau induit par $\mathcal{F}$ sur U soit isomorphe à un faisceau quotient de la forme $\mathcal{O}^p(U)/\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ étant un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}^p(U)$.

La condition est suffisante, en vertu de la proposition 3 de 15. Montrons qu'elle est nécessaire. Si $\mathcal{F}$ est cohérent, alors, d'après la définition 3 (15, p. 5), x possède un voisinage ouvert U dans lequel on a système de p éléments $u_i \in \mathcal{O}_U^q$, tel que pour tout point $y \in U$, le sous-module de $\mathcal{O}_y^q$ engendré par les u_i soit précisément $\mathcal{F}_y$. Soit $\mathcal{R}$ le faisceau des relations entre les u_i dans U: il associe à chaque $y \in U$ le sous-module $\mathcal{R}_y(u_1, \ldots, u_p)$ du module $\mathcal{O}_y^p$. D'après le théorème d'Oka (15, p. 6), le faisceau $\mathcal{R}$ est cohérent dans U. Ceci établit la proposition.

La proposition 1 justifie la généralisation suivante de la notion de faisceau cohérent:

Définition 1. Un faisceau analytique $\mathcal{R}$ sur X est cohérent si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel que la restriction de $\mathcal{F}$ à U soit isomorphe (comme faisceau analytique) à un faisceau quotient $\mathcal{O}^p(U)/\mathcal{R}$, où p est un entier convenable, et $\mathcal{R}$ un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}^p(U)$.

Exemple. Le faisceau Ω des formes différentielles holomorphes est un faisceau analytique cohérent. En effet, tout point x possède un voisinage ouvert U dans lequel existe un système de coordonnées complexes locales; chaque forme différentielle, en un point $x \in U$, est alors définie par ses coefficients; d'où un isomorphisme du faisceau induit par Ω sur U, et du faisceau $\mathcal{O}^p(U)$, p désignant la dimension de l'espace des formes différentielles holomorphes au point x.

On verra plus tard d'autres exemples intéressants de faisceaux cohérents, non globalement isomorphes à un sous-faisceau d'un $\mathcal{O}^q(X)$.

2. Propriétés générales des faisceaux cohérents.

Proposition 2. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. Soient donnés des éléments $u_i \in H^0(X, \mathcal{F})$ en nombre fini p (c'est-a-dire des sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de X). Alors le faisceau des relations entre les u_i est un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}^p(X)$. (Généralisation du théorème d'Oka.)

En effet, soit $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x, et des $v_j \in H^0(U, \mathcal{F})$ en nombre fini, qui engendrent $H^0(U, \mathcal{F})$ et sont tels que le faisceau des relations entre les v_j soit cohérent: ceci n'est qu'une autre façon de formuler la définition 1 d'un faisceau cohérent. On a, au point x, $u_i = \Sigma_j a_i^j v_j$, les a_i^j étant holomorphes au point x. On peut supposer U assez petit pour que les a_i^j soient holomorphes dans U et que la relation précédente ait lieu dans U. Pour tout point $y \in U$, cherchons à quelles conditions doivent satisfaire des $c^i \in \mathcal{O}_y$ pour que $\Sigma_i c^i u_i = 0$ au point y. Il vient $\Sigma_j(\Sigma_i c^i a_i^j) v_j = 0$. Ceci exprime que le système des fonctions $\Sigma_i a_i^j c^i$ $(j = 1,2,\ldots)$ appartient au module des relations $\mathcal{R}_y(v_1, v_2,\ldots)$. Or par hypothèse, ce dernier est engendré par des systèmes (b_k^j) $(k = 1,2,\ldots)$ holomorphes dans U, tout au moins si on a pris U assez petit. Alors la condition trouvée pour les c^i exprime l'existence de fonctions $c'^k \in \mathcal{O}_y$ telles que

$$\sum_i c^i a_i^j + \sum_k c'^k b_k^j = 0 \quad \text{pour tout } j.$$

Ainsi le système des c^i et des c'^k doit appartenir au module des relations $\mathcal{R}_y(a_i, b_k)$, faisceau qui est cohérent d'après le théorème d'Oka. Quant au faisceau des systèmes (c^i), il est isomorphe à un quotient du précédent, donc il est cohérent (15, prop. 3).

Corollaire. Pour qu'un sous-faisceau analytique $\mathcal{G}'$ d'un faisceau analytique cohérent $\mathcal{G}$ soit cohérent, il faut et il suffit que chaque point x possède un voisinage ouvert U tel qu'il existe une famille finie d'éléments $u_i \in H^0(U, \mathcal{G})$ engendrant $\mathcal{G}'_y$ en chaque point y de U.

<u>Proposition</u> 3. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux analytiques cohérents sur X, et soit φ un homomorphisme analytique: $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Alors l'<u>image</u>, le <u>noyau</u> et le <u>conoyau</u> de φ sont des faisceaux analytiques cohérents.

Soit $x \in X$. Il existe un ouvert U contenant x, et des $u_i \in H^0(U, \mathcal{F})$, en nombre fini p, qui $\mathcal{O}_y$-engendrent $\mathcal{F}_y$ en tout point $y \in U$. On va se placer dans U pour démontrer la proposition.

1° <u>l'image</u> $\mathcal{I}$ de φ est un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{G}$. En effet, φ définit un homomorphisme $H^0(U, \mathcal{F}) \to H^0(U, \mathcal{G})$. L'image par φ du faisceau $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ est le sous-faisceau de $\mathcal{G}$ engendré par les images $u'_i \in H^0(U, \mathcal{G})$ des u_i; donc c'est un faisceau cohérent (coroll. de la prop. 2).

2° <u>le noyau</u> $\mathcal{N}$ de φ est cohérent. En effet, considérons en chaque point $y \in U$ les systèmes de p fonctions holomorphes c^i telles que $\Sigma_i\, c^i \varphi_y(u_i) = 0$ dans $\mathcal{G}_y$. Ils forment un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}^p(U)$, d'après la proposition 2. L'application $(c^i) \to \Sigma_i\, c^i u_i$ de ce faisceau dans $\mathcal{F}$ a pour image le noyau $\mathcal{N}$. Donc $\mathcal{N}$ est cohérent, d'après 1°.

3° <u>le conoyau</u> $\mathcal{C}$ de φ est cohérent. En effet, c'est $\mathcal{G}/\varphi(\mathcal{F})$, et $\varphi(\mathcal{F})$ est engendré par un nombre fini d'éléments $u'_i \in H^0(U, \mathcal{G})$. Il existe un ouvert V contenant x, et des $v_j \in H^0(V, \mathcal{G})$ (en nombre q) qui engendrent $\mathcal{G}_y$ en tout point $y \in V$; et on peut supposer $V \subset U$. Le faisceau $\mathcal{R}$ des relations entre les v_j est cohérent (prop. 2), et, dans V, on a $\mathcal{G} \approx \mathcal{O}^q(V)/\mathcal{R}$. Choisissons dans $\mathcal{O}^q(V)$ des représentants u''_i des u'_i; ils engendrent, dans $\mathcal{O}^q(V)$, un sous-faisceau cohérent $\mathcal{S}$. Alors le conoyau $\mathcal{G}/\varphi(\mathcal{F})$ est isomorphe à $\mathcal{O}^q(V)/(\mathcal{R} + \mathcal{S})$, donc est un faisceau analytique cohérent.

3. <u>Faisceau cohérent sur une sous-variété plongée</u>.

Soit E une variété analytique-complexe, et soit V une sous-variété analytique plongée dans E sans singularité (i.e., en tout point de V il existe un système de coordonnées locales de la variété ambiante E, telle que V soit définie en égalant à zéro certaines de ces coordonnées locales). Soit x un point de V; il faut distinguer entre l'anneau $\mathcal{O}_x$ des germes de fonctions holomorphes dans V au point x et l'anneau $\mathcal{E}_x$ des germes de fonctions holomorphes dans E au point x. On a un homomorphisme naturel de $\mathcal{E}_x$ sur $\mathcal{O}_x$, dont le noyau est l'idéal de $\mathcal{E}_x$ formé des germes de fonctions qui s'annulent sur V.

Soit alors X une partie de E; $X \cap V$ est une partie de V. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur $X \cap V$; pour un tel faisceau, il faut distinguer entre la notion de faisceau V-analytique (définie en chaque point $x \in X \cap V$ par la donnée sur $\mathcal{F}_n$ d'une structure de $\mathcal{O}_x$-module), et la structure de faisceau E-analytique (définie en chaque point $x \in X \cap V$ par la donnée sur $\mathcal{F}_x$ d'une structure de $\mathcal{E}_x$-module). Tout structure de faisceau V-analytique définit canoniquement une structure de faisceau E-analytique, grâce à l'homomorphisme naturel $\mathcal{E}_x \to \mathcal{O}_x$.

D'autre part, puisque $X \cap V$ est un sous-espace fermé de X, on sait que tout faisceau $\mathcal{F}$ sur $X \cap V$ définit un faisceau $\mathcal{F}'$ et un seul, sur X, tel que $\mathcal{F}'$ induise $\mathcal{F}$ sur $X \cap V$ et induise zéro en tout point de X non situé sur V (voir séminaire 1950-51, exposé 17, Prop. 1).

<u>Proposition</u> 4. Avec les notations précédentes, supposons que $\mathcal{F}$ soit un faisceau V-analytique cohérent sur $X \cap V$. Alors $\mathcal{F}'$ est un faisceau E-analytique cohérent sur X.

<u>Démonstration</u>: tout d'abord la structure de faisceau V-analytique de $\mathcal{F}$ définit sans ambiguité une structure de faisceau E-analytique sur $\mathcal{F}'$ (cette dernière a déjà été définie en un point de $X \cap V$; en un point x de X hors de V, la structure E-analytique est triviale puisque $\mathcal{F}'_x$ est nul). Supposons que $\mathcal{F}$ soit cohérent; et montrons que $\mathcal{F}'$ est E-analytique cohérent en tout point $x \in X \cap V$ (c'est évident en un point de X non situé sur V). Or il existe un ouvert U <u>de</u> V qui contient x, un entier q, et un sous-faisceau V-analytique cohérent $\mathcal{R}$ de $\mathcal{O}^q(X \cap U)$, tels que le quotient $\mathcal{O}^q(X \cap U)/\mathcal{R}$ soit isomorphe au faisceau induit par $\mathcal{F}$ dans $X \cap U$. Il existe donc un nombre fini de systèmes de q fonctions V-holomorphes au voisinage de x, qui engendrent $\mathcal{R}_y$ en tout point $y \in X \cap V$ assez voisin

de x. Ces fonctions sont induites sur V, au voisinage de x, par des fonctions E-holomorphes; on a donc un ouvert U' de E contenant x, et un sous-faisceau E-analytique cohérent $\mathfrak{R}'$ de $\mathcal{E}^q(X \cap U')$, tel que le faisceau induit par $\mathfrak{R}'$ sur $X \cap U' \cap U$ soit un sous-faisceau de $\mathcal{E}^q(X \cap U' \cap U)$ dont l'image canonique dans $\mathcal{O}^q(X \cap U' \cap U)$ soit justement $\mathfrak{R}$. On peut évidemment supposer U' assez petit pour que $U' \cap V$ soit contenu dans U.

D'autre part, soit $\mathfrak{W}$ le sous-faisceau E-analytique de $\mathcal{O}^q(U')$ qui attache à chaque point $y \in U'$ le sous-module $\mathfrak{W}_y$ de $\mathcal{O}_y^q$ formé des systèmes de q fonctions nulles sur V au voisinage de y (on a donc $\mathfrak{W}_y = \mathcal{O}_y^q$ si $y \notin V$). D'après le théorème fondamental de 16 (d'ailleurs évident dans le cas particulier envisagé ici), $\mathfrak{W}$ est un faisceau E-analytique cohérent. Il est immédiat que le faisceau $\mathcal{O}^q(U')/(\mathfrak{R}' + \mathfrak{W})$, qui est E-analytique cohérent (d'après la déf. 1), induit $\mathcal{F}$ sur $X \cap U' \cap V$, et zéro en tout point de $X \cap U'$ non situé sur V. Autrement dit, ce faisceau cohérent induit sur $X \cap U'$ le même faisceau que $\mathcal{F}'$; par suite $\mathcal{F}'$ est cohérent, et la démonstration est achevée.

4. Enoncé des théorèmes fondamentaux.

Ils vont s'appliquer aux variétés de Stein et à certains sous-ensembles compacts de ces variétés. La définition des variétés de Stein a été donnée en 9 (définition 2, page 5). Elle fait intervenir trois conditions (α'), (β) et (γ) imposées aux fonctions holomorphes sur une telle variété. On a aussi considéré une condition (α), plus forte que (α'), qui exprime que la H-enveloppe de tout compact est compacte. En fait, il résultera de la théorie qui va suivre que les conditions (α) et (α') sont équivalentes modulo les conditions (β) et (γ); autrement dit, les variétés de Stein ne seront finalement autres que les variétés analytiques complexes qui satisfont à (α), (β) et (γ).

Rappelons encore que la H-enveloppe (ou plus simplement l'enveloppe) d'un compact K d'une variété analytique-complexe E se compose de l'ensemble (fermé) des points $x \in E$ tels que

$$|f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)| \text{ pour toute } f \text{ holomorphe dans } E.$$

Voici l'énoncé des deux théorèmes fondamentaux:

Théorème A. Soit X une variété de Stein, ou un compact d'une variété de Stein identique à son enveloppe. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. Alors, pour tout point $x \in X$, l'image, dans le $\mathcal{O}_x$-module $\mathcal{F}_x$, du module des sections $H^0(X, \mathcal{F})$, engendre $\mathcal{F}_x$ pour sa structure de module sur $\mathcal{O}_x$.

Commentaire: il n'est pas question, bien entendu, de vouloir prolonger au-dessus de tout X n'importe quelle section de $\mathcal{F}$ donnée seulement au voisinage de x. Mais le théorème affirme que toute section de $\mathcal{F}$, au-dessus d'un voisinage de x si petit soit-il, est combinaison linéaire (à coefficients holomorphes au point x) de sections prolongeables au-dessus de X tout entier.

Théorème B. Soit X une variété de Stein, ou un compact d'une variété de Stein identique à son enveloppe. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. Alors les modules de cohomologie $H^q(X, \mathcal{F})$ sont nuls pour tout entier $q \geq 1$.

La démonstration complète des théorèmes A et B sera donnée dans l'exposé suivant. En voici dès maintenant les grandes lignes: on prouvera d'abord ces théorèmes pour les "cubes" compacts de l'espace numérique complexe C^n (par récurrence sur la dimension réelle des cubes), et, plus généralement, pour les polycylindres compacts simplement connexes (pour leur définition, voir 17, page 1). Soit ensuite X un polycylindre compact simplement connexe de C^n (par exemple un produit de disques compacts dans les plans des n variables complexes), et soit V une sous-variété analytique plongée sans singularité dans un voisinage de X; la proposition 4 entraîne que les théorèmes A et B sont vrais pour $X \cap V$ (en tant que compact de la variété V) du moment qu'ils sont vrais pour X. De là on déduira que les théorèmes A et B sont vrais pour tout compact K d'une variété de Stein, tel que K soit identique à son enveloppe. Enfin, soit E une variété de Stein; elle est réunion d'une suite croissante de compacts K_p dont chacun est identique à son enveloppe; il restera à faire un "passage à la limite" convenable, pour obtenir les théorèmes A et B pour la variété E.

5. Premières conséquences des théorèmes fondamentaux.

Avant de démontrer les théorèmes A et B, il sera utile, pour effectuer certaines récurrences dans la démonstration, d'en avoir préalablement déduit quelques conséquences. D'une façon précise, soit X une variété analytique-complexe, ou un fermé d'une telle variété, et supposons que les théorèmes A et B soient vrais pour X. On en tire les conséquences suivantes:

Corollaire 1. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X, et soit une famille finie d'éléments $u_i \in H^0(X, \mathcal{F})$. Si $x \in X$, le module des relations entre les u_i au point x est $\mathcal{O}_x$-engendré par le module des relations (à coefficients holomorphes dans X) existant entre les u_i dans X tout entier.

En effet, soit $\mathcal{R}$ le faisceau des relations entre les u_i. C'est un faisceau cohérent, d'après la prop. 2. Appliquons-lui le théorème A: $\mathcal{R}_x$ est $\mathcal{O}_x$-engendré par $H^0(X, \mathcal{R})$, et ce dernier module est le module des relations entre les u_i, à coefficients holomorphes dans X.

Corollaire 2. Soit $\mathcal{G}$ un faisceau quelconque sur X, et soit $\mathcal{F}$ un sous-faisceau de $\mathcal{G}$; supposons que $\mathcal{F}$ soit muni d'une structure de faisceau analytique cohérent. Alors l'homomorphisme canonique

$$H^0(X, \mathcal{G}) \to H^0(X, \mathcal{G}/\mathcal{F})$$

applique le premier module sur le second (en d'autres termes: toute section de $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ au-dessus de X, peut se "remonter" en une section de $\mathcal{G}$ au-dessus de X).

Ce corollaire résulte aussitôt de la suite exacte de cohomologie (cf. Séminaire 1950-51, exposé 16):

$$H^0(X, \mathcal{G}) \to H^0(X, \mathcal{G}/\mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F}) ,$$

et du fait que $H^1(X, \mathcal{F})$ est nul d'après le théorème B.

Ce corollaire a de nombreuses conséquences intéressantes. Nous en expliciterons deux dès maintenant:

<u>Corollaire</u> 3. Supposons $H^1(X, \mathcal{R}) = 0$ pour tout sous-faisceau cohérent $\mathcal{R}$ de $\mathcal{O}^q(X)$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. Si des éléments $u_i \in H^0(X, \mathcal{F})$, en nombre fini, engendrent le $\mathcal{O}_x$-module $\mathcal{F}_x$ en chaque point $x \in X$, ils engendrent $H^0(X, \mathcal{F})$ pour sa structure de module sur l'anneau $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes dans X.

Soit p le nombre des éléments u_i. Considérons le faisceau $\mathcal{O}^p(X)$, qui associe à chaque point $x \in X$ le module des suites de p fonctions $c_1, \ldots, c_p$ holomorphes en x. Soit φ_x l'homomorphisme $\mathcal{O}_x^p \to \mathcal{F}_x$ qui transforme $(c_1, \ldots, c_p)$ dans $\Sigma_i\, c_i u_i$. L'hypothèse de l'énonce implique que φ_x est un homomorphisme de $\mathcal{O}_x^p$ <u>sur</u> $\mathcal{F}_x$. La collection des φ_x définit un homomorphisme de faisceaux φ: $\mathcal{O}^p(X) \to \mathcal{F}$. Soit $\mathcal{R}$ le noyau de φ; on a $\mathcal{F} \approx \mathcal{O}^p(X)/\mathcal{R}$, et $\mathcal{R}$ est un faisceau cohérent (d'après la prop. 2). D'autre part, φ définit un homomorphisme des modules de sections

$$\Phi:\ H^0(X, \mathcal{O}^p(X)) \to H^0(X, \mathcal{F})$$

qui, à chaque suite de fonctions $c_1, \ldots, c_p$ holomorphes dans X, associe l'élément $\Sigma_i\, c_i u_i$ de $H^0(X, \mathcal{F})$. D'après le corollaire 2, Φ est un homomorphisme <u>sur</u>; et ceci prouve le corollaire 3.

A titre d'exemple, prenons pour $\mathcal{F}$ le faisceau $\mathcal{O}(X)$ des fonctions holomorphes. Les u_i ne sont autre chose que des fonctions holomorphes dans X; l'hypothèse du corollaire 3 exprime que ces fonctions u_i (supposées en nombre fini) n'ont aucun zéro commun dans X. La conclusion est qu'elles engendrent le module de toutes les fonctions holomorphes dans X, et en particulier la constante un. D'où une identité

$$\sum_i c_i u_i = 1 \quad \text{dans} \quad X$$

(chaque fois que les u_i en nombre fini n'ont pas de zéro commun; les coefficients c_i sont holomorphes dans X).

<u>Corollaire</u> 4. Supposons $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{F}$. Plaçons-nous dans les hypothèses de la proposition 4: E est une variété analytique-complexe, V une sous-variété analytique plongée sans

singularité dans E, X une partie de E (éventuellement, $X = E$), et supposons le théorème B valable pour X. Alors toute fonction V-holomorphe sur $V \cap X$ est induite par une fonction E-holomorphe sur X.

En effet, soit $\mathcal{V}$ le faisceau de la sous-variété V, dans X; c'est un faisceau cohérent (exposé 16). Soit $\mathcal{F}$ le faisceau des fonctions holomorphes dans X; le faisceau quotient $\mathcal{F}/\mathcal{V}$ s'identifie au faisceau des fonctions V-holomorphes sur X, parce que V est plongée dans E sans singularité. D'après le corollaire 2, toute section de $\mathcal{F}/\mathcal{V}$ au-dessus de X est l'image d'une section de $\mathcal{F}$: ceci établit le corollaire 4.

Remarques au sujet du corollaire 3: soit X pour lequel sont vrais les théorèmes A et B, et supposons X compact. Il est immédiat (par le théorème de Borel-Lebesgue) que $H^0(X, \mathcal{F})$ contient une famille finie d'éléments u_i qui $\mathcal{O}_x$-engendrent $\mathcal{F}_x$, pour tout point x, — du moins si $\mathcal{F}$ est analytique cohérent. D'après le corollaire 3, ces u_i engendrent $H^0(X, \mathcal{F})$ pour sa structure de module sur l'anneau des fonctions holomorphes dans X. Ainsi: si $\mathcal{F}$ est cohérent sur X compact (et si les théorèmes A et B sont vrais pour X), alors le module $H^0(X, \mathcal{F})$ est engendré par un nombre fini d'éléments. De plus, tout sous-module M de $H^0(X, \mathcal{F})$ qui jouit de la propriété d'engendrer $\mathcal{F}_x$ en chaque point $x \in X$, est nécessairement identique à $H^0(X, \mathcal{F})$ tout entier: car M contient un sous-module M' de type fini, jouissant de la même propriété; et le corollaire 3 dit que $M' = H^0(X, \mathcal{F})$, d'où a fortiori $M = H^0(X, \mathcal{F})$.