Jean Frenkel

Faisceau d'une sous-variété analytique

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. nº 16, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A16_0>

FAISCEAU D'UNE SOUS-VARIÉTÉ ANALYTIQUE

(Exposé de Jean Frenkel, 5-5-52).

Contrairement à l'exposé précédent (15), on supposera dans celui-ci, d'une manière essentielle, qu'il s'agit de fonctions analytiques sur le corps complexe, et de variétés analytiques-complexes.

1. Le faisceau d'une sous-variété analytique.

Soit E une variété analytique-complexe (au sens de 1), et soit V une sous-variété analytique de E (au sens de 12, n° 4). Pour chaque point $x \in E$, soit V_x le germe de sous-variété défini par V au point x (germe éventuellement vide). Soit $\mathcal{F}_x$ l'idéal du germe V_x: c'est, dans l'anneau des fonctions holomorphes au point x, l'idéal formé des germes de fonctions qui s'annulent sur le germe V_x. La collection des idéaux $\mathcal{F}_x$ satisfait visiblement à la condition (C) de l'exposé 15 (p. 3), et définit donc un sous-faisceau analytique du faisceau $\mathcal{O}(E)$. On l'appelle le faisceau de la sous-variété analytique V; on le notera $\mathcal{F}(V)$.

Le but de cet exposé est de démontrer le

Théorème. Le faisceau $\mathcal{F}(V)$ d'une sous-variété analytique est un faisceau cohérent. (Pour la définition d'un faisceau cohérent voir 15, n° 4.)

On doit montrer que, pour tout point $a \in E$, il existe un ouvert U contenant a et un système fini d'éléments $u_i \in \mathcal{O}_U$ tel que, pour tout point $b \in U$, les u_i engendrent l'idéal $\mathcal{F}_b(V)$. Or V_a est réunion d'une famille finie de germes irréductibles. Il existe donc un voisinage ouvert A de a et des sous-variétés analytiques W^k dans A, telles que:

1) $V \cap A = \bigcup_k W^k$;

2) pour tout k, le germe $(W^k)_a$ est irréductible.

La condition (1) entraîne que, dans l'ouvert A,

$$\mathcal{F}(V \cap A) = \bigcap_k \mathcal{F}(W^k) .$$

Or on sait que l'intersection d'un nombre fini de faisceaux cohérents est un faisceau cohérent (exposé 15, coroll. 1, p. 9). Pour prouver que $\mathcal{F}(V \cap A)$ est cohérent, il suffira donc de montrer que chacun des faisceaux $\mathcal{F}(W^k)$ est cohérent.

En définitive, on est ramené à démontrer le théorème dans le cas où le germe V_a défini par V au point a est irréductible, c'est-à-dire dans le cas où l'idéal $\mathcal{F}_a(V)$ est premier. Nous ferons désormais cette hypothèse, et nous montrerons que, s'il en est ainsi, le faisceau $\mathcal{F}(V)$ est cohérent au point a.

2. Démonstration du théorème.

Soit S un système fini de générateurs de l'idéal premier $\mathcal{F}_a(V)$. Dans un voisinage de a, V est l'ensemble des zéros communs aux fonctions de S. Pour tout point b voisin de a, soit S_b l'idéal de $\mathcal{O}_b$ engendré par S; on a $S_a = \mathcal{F}_a(V)$ et $S_b \subset \mathcal{F}_b(V)$. Il s'agit de montrer que $S_b = \mathcal{F}_b(V)$ si b est assez voisin de a; cela prouvera entièrement le théorème.

Tout d'abord, si $b \notin V$, il existe une fonction de S non nulle en b, donc $S_b = \mathcal{F}_b(V) = \mathcal{O}_b$. Il suffira donc de montrer ceci: pour tout point $b \in V$ assez voisin de a, toute $f \in \mathcal{O}_b$ qui s'annule sur V_b appartient à S_b. Tel va être l'objet des développements qui suivent.

On utilisera la théorie exposée dans 14. Le théorème 3 de 14 dit qu'on peut choisir: au voisinage de a des coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ (nulles au point a); un polynôme $P(x_{p+1}; x_1, \ldots, x_p)$ en x_{p+1} distingué et irréductible à l'origine; des polynômes $Q_i(x_{p+1}; x_1, \ldots, x_p)$ en x_{p+1} de degrés strictement inférieurs au degré de P (pour $p+2 \leq i \leq n$) et que V, dans un voisinage de a, est l'adhérence de l'ensemble des solutions du système d'équations

$$P = 0, \qquad P'x_i - Q_i = 0 \qquad (p+2 \leq i \leq n)$$

pour lesquelles $P' \neq 0$. En outre, on sait que les x_i $(p+2 \leq i \leq n)$ sont racines de polynômes unitaires $R_i(x_i; x_1, \ldots, x_p)$. Les fonctions

$$P, \quad P'x_i - Q_i, \quad R_i$$

appartiennent évidemment à l'idéal $\mathfrak{p} = F_a(V)$, et par suite <u>appartiennent à</u> S_b <u>en tout point</u> b <u>assez voisin de</u> a.

Soit $\mathcal{E}$ l'"espace des paramètres" de la sous-variété analytique $P(x_{p+1}; x_1, \ldots, x_p) = 0$ dans l'espace $(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1})$. On a vu en 14 (th. 8) qu'on a un isomorphisme $\overline{f}$ de $\mathcal{E}$ sur un voisinage de a dans l'espace des paramètres de V. Cet isomorphisme $\overline{f}$ associe à un point de $\mathcal{E}$, de coordonnées $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}$, un point de l'espace des paramètres de V qui a mêmes coordonnées $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}$ et pour lequel $x_{p+2}, \ldots, x_n$ satisfont aux équations $P'x_i - Q_i = 0$.

Soit $b = (b_1, \ldots, b_n)$ un point de V, voisin de a. Les diverses composantes irréductibles de V au point b (c'est-à-dire les divers points de l'espace des paramètres de V qui ont pour coordonnées $b_1, \ldots, b_n$) sont les images par $\overline{f}$, de points de $\mathcal{E}$ qui ont tous pour coordonnées $b_1, \ldots, b_{p+1}$. Ils correspondent à certains facteurs irréductibles du polynome P au point $b_1, \ldots, b_{p+1}$ (il peut en exister d'autres). Soit F leur produit. On a ainsi, au voisinage de b,

$$P = FG ,$$

et le polynôme G ne s'annule identiquement sur aucune composante irreductible de V au point b.

Après ces préliminaires, nous allons pouvoir montrer la proposition annoncée, à savoir: si une $f \in \mathcal{O}_b$ s'annule sur V au voisinage de $b \in V$, on a $f \in S_b$. Prouvons-le d'abord pour la fonction F, qui effectivement s'annule sur V au voisinage de b. On sait déjà que $FG = P$ appartient à S_b. L'idéal S_b est intersection d'une famille finie d'idéaux <u>primaires</u> $\mathfrak{I}_m$, dont les variétés sont les composantes irréductibles de V au point b; si l'on avait $F \notin \mathfrak{I}_m$, une puissance de G serait dans $\mathfrak{I}_m$, donc G s'annulerait identiquement sur une composante irréductible de V au point b, ce qui n'est pas. Ainsi $F \in \mathfrak{I}_m$ pour tout indice m, et par suite $F \in S_b$.

Soit maintenant f un élément quelconque de $\mathcal{O}_b$. Modulo les polynômes unitaires P et R_i (qui sont dans S_b), f est congrue a un polynôme $T(x_{p+1}, \ldots, x_n)$ à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_p$. Il existe un entier k tel que $P'^k T$ soit congru, modulo les $(P'x_i - Q_i)$ qui sont dans S_b, à un polynôme $\Pi(x_{p+1})$ à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_p$. Enfin, modulo F (qui est dans S_b), Π est congru à un polynôme H de degré strictement inférieur au degré de F. Ainsi $P'^k f$ est congru, modulo S_b, au polynôme $H(x_{p+1})$ à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_p$ au point $b_1, \ldots, b_p$.

Supposons alors que f s'annule identiquement sur V au voisinage du point $b \in V$. Je dis que H est identiquement nul. En effet, pour chaque système $(x_1, \ldots, x_p)$ voisin de $(b_1, \ldots, b_p)$ et qui n'annule p s le discriminant Δ du polynôme P, le polynôme F a ses racines distinctes, et comme H s'annule pour chacune d'elles, ses coefficients sont nuls. Ainsi les coefficients de H sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_p$, holomorphes au voisinage de $(b_1, \ldots, b_p)$ et nulles pour $\Delta(x_1, \ldots, x_p) \neq 0$, donc identiquement nulles. Puisque H est identiquement nul, on a

(1) $$P'^k f \in S_b \ .$$

Or P'^k n'appartient pas à l'idéal <u>premier</u> S_a. Alors, le corollaire 2 de l'exposé 15 (p. 9) montre que la relation (1) entraîne $f \in S_b$, dès que b est assez voisin de a. Ceci achève la démonstration.

Bibliographie

H. CARTAN, <u>Bull. Soc. Math. de France</u>, 78 (1950), pp. 29-64; Voir théorème 2, pages 42-45.