H. CARTAN

Étude des germes de sous-variétés analytiques

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. nº 14, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A14_0>

ETUDE DES GERMES DE SOUS-VARIÉTÉS ANALYTIQUES

(Exposé de H. Cartan, 21-4-52)

1. Le "Nullstellensatz."

Plaçons-nous à l'origine dans l'espace C^n (coordonnés complexes $x_1, \ldots, x_n$). Soit V un germe de sous-variété analytique à l'origine; d'après le th. 2 de 12, V est irréductible si et seulement si l'idéal $\mathcal{I}(V)$ des fonctions (holomorphes à l'origine) qui s'annulent sur V est premier. On va voir maintenant que tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de l'anneau $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n)$ est l'idéal associé à un germe de variété irréductible (nécessairement unique d'après l'assertion 2), page 3 de 12.

Théorème 1. Soit $V(\mathfrak{p})$ le germe de sous-variété associé à un idéal premiere $\mathfrak{p}$ de l'anneau $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n)$ (c'est-à-dire l'ensemble des zéros communs aux fonctions de $\mathfrak{p}$). Alors tout élément de $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n)$ qui s'annule sur $V(\mathfrak{p})$ appartient a $\mathfrak{p}$.

(Il en résulte que l'idéal associé à $V(\mathfrak{p})$ est $\mathfrak{p}$.)

Démonstration: désignons par B l'anneau $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n)$, et par A l'anneau quotient $B/\mathfrak{p}$, qui est un anneau d'intégrité. On va définir sur A une structure d'anneau analytique (13, déf. 5): ε se définit d'une manière évidente, puisque, dans B, ε est nul sur les éléments de $\mathfrak{p}$ (on écarte le cas trivial où $\mathfrak{p} = B$). Soient de plus des éléments $b_1, \ldots, b_k$ de B, et h une fonction de k arguments, holomorphe au point $\varepsilon(b_1), \ldots, \varepsilon(b_k)$; la classe modulo $\mathfrak{p}$ de l'élément $h(b_1, \ldots, b_k) \in B$ ne change pas si on remplace les b_i par des b'_i respectivement congrus modulo $\mathfrak{p}$. En effet, c'est vrai si h est un polynôme, et toute fonction h est limite uniforme (dans un voisinage du point $(\varepsilon(b_i))$) de polynômes; l'assertion résulte alors du fait que l'idéal $\mathfrak{p}$ est fermé pour la convergence uniforme dans un voisinage fixe le l'origine (cf. 11, th.5). Ainsi l'on sait, dans l'anneau A, définir $h(a_1, \ldots, a_k)$ lorsque

h est une fonction holomorphe au voisinage du point $\varepsilon(a_1),\ldots, \varepsilon(a_k)$. Il est immédiat que les conditions (Γ) de l'exposé 13 (p. 6) sont vérifiées. On a donc bien défini sur A une structure d'anneau analytique.

Cet anneau analytique satisfait aux hypothèses du théorème 3 de 13. En effet, soit V le sous-espace vectoriel de A engendré par les images, dans A, des éléments $x_1,\ldots, x_n$ de l'anneau $\mathcal{H}(x_1,\ldots, x_n) = B$; le sous-anneau analytique $[V]$ engendré par V est évidemment A tout entier.

Soit $\overline{A}$ la clôture intégrale de A. D'après le th. 3 de 13, la structure analytique de A se prolonge d'une seule manière à $\overline{A}$, et l'anneau analytique $\overline{A}$ est isomorphe à l'anneau $\mathcal{O}$ des fonctions holomorphes sur un germe G d'espace analytique; G est unique à une isomorphie près. On va étudier les rapports existant entre ce germe G et le germe de sous-variété $V(\mathfrak{p})$ défini par l'idéal $\mathfrak{p}$.

Il existe une application analytique f de G dans C^n, et une seule, telle que, pour tout élément $g \in \mathcal{H}(x_1,\ldots, x_n)$ (g est donc une application $C^n \to C$), la composée $g\circ f\colon G \to C$ soit la fonction, sur le germe G, qui est canoniquement associée à l'élément de A, image de g par l'homomorphisme $B \to A$. La démonstration est évidente: on trouve les n composantes de f en considérant, sur G, les fonctions associées aux classes, dans A, des fonctions $x_1,\ldots, x_n \in \mathcal{H}(x_1,\ldots, x_n)$; ceci détermine f, et le fait que cette application f satisfait aux conditions voulues résulte du fait que l'isomorphisme de A sur l'anneau $\mathcal{O}$ des fonction holomorphes sur G, respecte les relations analytiques.

Pour que la fonction $g \in \mathcal{H}(x_1,\ldots, x_n$ appartienne à l'idéal $\mathfrak{p}$, il faut et il suffit qu'elle s'annule sur l'image $f(G)$. En effet, cette dernière condition exprime que $g\circ f = 0$, c'est-à-dire que l'image de g dans $A = B/\mathfrak{p}$ est nulle.

Ce résultat fondamental entraîne d'abord que $f(G) \subset V(\mathfrak{p})$ (il s'agit d'inclusion dans le sens des germes. On verra plus loin que, en fait, $f(G)$ est identique à $V(\mathfrak{p})$; pour le moment, il nous suffit de conclure: si g s'annule sur $V(\mathfrak{p})$, a fortiori g s'annule sur $f(G)$, c'est-à-dire appartient à $\mathfrak{p}$. Ceci achève la démonstration du théorème.

Du théorème 1 on déduit un "Nullstellensatz" tout à fait pareil à celui de Hilbert pour les anneaux de polynômes:

Théorème 2 (Nullstellensatz). Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de $\mathcal{H}(x_1,\ldots, x_n)$. Il existe un entier ρ jouissant de la propriété suivante: si une $g \in \mathcal{H}(x_1,\ldots, x_n)$ s'annule sur la variété $V(\mathfrak{J})$, alors g^ρ appartient à $\mathfrak{J}$.

La démonstration est classique: $\mathfrak{J}$ est intersection d'une famille finie d'idéaux primaires $\mathfrak{J}_\alpha$, puisque $\mathcal{H}(x_1,\ldots, x_n)$ est un anneau noethérien (11, th. 2). Soit $\mathfrak{p}_\alpha$ l'idéal premier associé à l'idéal primaire $\mathfrak{J}_\alpha$; soit ρ_α un entier tel que $g \in \mathfrak{p}_\alpha$ entraîne $g^{\rho_\alpha} \in \mathfrak{J}_\alpha$. Désignons par ρ le plus grand des ρ_α. Si g s'annule sur $V(\mathfrak{J})$, qui est l'intersection des $V(\mathfrak{J}_\alpha) = V(\mathfrak{p}_\alpha)$, g s'annule sur $V(\mathfrak{p}_\alpha)$, donc (th. 1) $g \in \mathfrak{p}_\alpha$, donc $g^\rho \in \mathfrak{J}_\alpha$, et par suite $g^\rho \in \mathfrak{J}$.

2. Extension aux idéaux d'un anneau de fonctions holomorphes sur un germe d'espace analytique.

Soit, au lieu de l'anneau $\mathcal{H}(x_1,\ldots, x_n)$, l'anneau A des fonctions holomorphes sur un germe l'espace analytique. D'après 13 (cor. du th. 3, p. 15), A est intégralement clos, et isomorphe à un quotient d'un anneau $\mathcal{H}(x_1,\ldots, x_n)$ par un idéal premier $\mathfrak{q}$ de cet anneau. Les idéaux de A ont donc la forme $\mathfrak{J}/\mathfrak{q}$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal de $\mathcal{H}(x_1,\ldots, x_n)$ contenant $\mathfrak{q}$; pour que $\mathfrak{J}/\mathfrak{q}$ soit premier, il faut et il suffit que $\mathfrak{J}$ soit premier.

Appliquons à l'idéal premier $\mathfrak{q}$ les résultats du n° 1. On trouve une application analytique f du germe G dans l'espace $\mathbf{C}^n$, telle que les fonctions holomorphes sur le germe G soient de la forme $g\circ f$, où $g\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ est un élément de $\mathcal{H}(x_1,\ldots, x_n)$. Les zéros communs aux éléments de $\mathfrak{J}/\mathfrak{q}$ constituent un germe dans G, qui n'est autre que l'image réciproque f^{-1} du germe de variété $V(\mathfrak{J})$ dans $\mathbf{C}^n$. Pour que

$g \circ f$ s'annule sur le germe de $\mathfrak{J}/\mathfrak{q}$ dans G, il faut et il suffit que g s'annule sur $V(\mathfrak{J})$ dans C^n.

De là il suit que les théorèmes 1 et 2 s'étendent aux idéaux de l'anneau A et aux germes de sous-variétés du germe G.

3. Un lemme sur les idéaux premiers de $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n)$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n)$. Pour définir le germe $V(\mathfrak{p})$, on procède comme suit: soit S un système fini de générateurs de l'idéal $\mathfrak{p}$. Les éléments g_k de S sont des fonctions holomorphes dans tout un voisinage de l'origine; l'ensemble V des zéros communs à ces fonctions est une sous-variété analytique dans un voisinage de l'origine; $V(\mathfrak{p})$ est alors la classe de V dans la relation d'équivalence (entre parties de C^n) définie par le filtre des voisinages de l'origine. De plus, en chaque point a assez voisin de l'origine 0, les fonctions de S engendrent un idéal dans l'anneau des fonctions holomorphes au point a; nous désignerons cet idéal par S_a. Ainsi, $S_0 = \mathfrak{p}$.

Nous utiliserons une proposition, qui sera démontrée seulement dans l'exposé 15 (qui est logiquement indépendant de celui-ci):

Proposition. Si une fonction g, holomorphe au voisinage de l'origine 0, n'appartient pas à l'idéal premier $\mathfrak{p}$ au point 0, chaque point a suffisamment voisin de 0 jouit de la propriété suivante: si h est holomorphe au point a, et si hg appartient à l'idéal S_a, alors h appartient à S_a.

Ceci étant admis, on va démontrer le:

Lemme 1. Si une fonction g, holomorphe au voisinage de 0, n'appartient pas à l'idéal premier $\mathfrak{p}$ à l'origine 0, l'ensemble des points de V où g est $\neq 0$ est dense dans V, tout au moins dans un voisinage assez petit de l'origine.

On veut montrer que si a est un point de V assez voisin de 0, et si g est identiquement nulle sur V au voisinage de a, alors g appartient à $\mathfrak{p}$. Or, d'après le th. 2, il existe un entier ρ tel que $g^\rho \in S_a$. Raisonnons par l'absurde: si g n'appartenait pas à $\mathfrak{p}$, on aurait, en appliquant à la fonction $h = g^{\rho-1}$ la proposition ci-dessus, $g^{\rho-1} \in S_a$; par récurrence, il vient finalement $1 \in S_a$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $a \in V$.

4. Description du germe de sous-variété $V(\mathfrak{p})$.

Reprenons l'étude faite au n° 1. A l'anneau $A = \mathcal{H}(x_1,\ldots, x_n)/\mathfrak{p}$, on a associé un germe G d'espace analytique et une application analytique f de G dans $\mathbf{C}^n$; et on a montré que $f(G) \subset V(\mathfrak{p})$. On va maintenant prouver que $f(G) = V(\mathfrak{p})$; il faut bien préciser ce que cela signifie: G est défini par un espace analytique E et un point privilégié c de cet espace, f est définie dans un voisinage de c, et il s'agit de montrer que l'image de f couvre tous le points de V suffisamment voisins de l'origine.

Reportons-nous à la démonstration du th. 3 de 13. On voit qu'on peut faire sur les variables $x_1,\ldots, x_n$ une substitution linéaire de manière à réaliser les conditions suivantes: en notant ξ_i l'image de $x_i \in \mathcal{H}(x_1,\ldots, x_n)$ dans $A = \mathcal{H}(x_1,\ldots, x_n)/\mathfrak{p}$, les éléments $\xi_1,\ldots, \xi_p$ constituent la base d'un sous-espace vectoriel de A, qui est à la fois générateur et analytiquement libre, et un outre l'adjonction de ξ_{p+1} au corps des fractions de $\mathcal{H}(\xi_1,\ldots, \xi_p) \approx \mathcal{H}(x_1,\ldots, x_p)$ donne le corps des fractions de A. Soit $P(\xi_{p+1}; \xi_1,\ldots, \xi_p)$ le polynôme minimal de ξ_{p+1}; alors l'équation

$$(1) \qquad P(x_{p+1}; x_1,\ldots, x_p) = 0$$

définit le germe G (qui n'est autre que l'espace des paramètres de la variété principale définie par (1) dans l'espace $(x_1,\ldots, x_{p+1})$). Avec ces notations, si y est un point de G, c'est-à-dire une composante irréductible de la variété (1) en l'un de ses points voisins de l'origine, $f(y) \in \mathbf{C}^n$ a pour coordonnées les coordonnées $x_1,\ldots, x_p, x_{p+1}$ de ce point, et les valeurs en ce point des fonctions $\xi_{p+2},\ldots, \xi_n$ sur le germe défini par (1). On sait (13, prop. 2 page 11) qu'il existe des polynômes $Q_i(x_{p+1})$, à coefficients holomorphes en $x_1,\ldots, x_p$, tels que

$$(2) \qquad P'(x_{p+1})\xi_i = Q_i(x_{p+1}) \qquad (p+2 \leq i \leq n) \text{ en tout point de } G.$$

Le polynôme $P(x_{p+1}; x_1,\dots, x_p)$ appartient à l'idéal $\mathfrak{p}$, et sa dérivée P' ne lui appartient pas (puisqu'en général les racines de P sont distinctes, P étant irréductible). En vertu du lemme (n° 3), l'ensemble des points de $V(\mathfrak{p})$ où $P' \neq 0$ est dense dans $V(\mathfrak{p})$, tout au moins dans un voisinage convenable de l'origine. Ainsi, dans un voisinage de l'origine, $V(\mathfrak{p})$ est l'adhérence de l'ensemble des points de $V(\mathfrak{p})$ où $P'(x_{p+1}; x_1,\dots, x_p) \neq 0$. On va montrer que ces points de $V(\mathfrak{p})$ appartiennent à l'image $f(g)$; de là résultera que si U est un voisinage compact du point privilégié de G, $f(U)$, qui est un sous-ensemble fermé de $V(\mathfrak{p})$, et dense au voisinage de 0 dans $V(\mathfrak{p})$, contient tout un voisinage de 0 dans $V(\mathfrak{p})$; ce qu'on voulait démontrer.

Il reste donc seulement à prouver que tout point de $V(\mathfrak{p})$, voisin de 0, et tel que $P'(x_{p+1}; x_1,\dots, x_p) \neq 0$, est l'image par f d'un point de G, voisin de son point privilégié. Or il existe un point de G, et un seul, ayant les coordonnées $x_1,\dots, x_p, x_{p+1}$; en ce point, ξ_i $(p+2 \leq i \leq n)$ a pour valeur $Q_i(x_{p+1})/P'(x_{p+1})$; d'autre part, le point considéré de $V(\mathfrak{p})$ possède les mêmes coordonnées $x_1,\dots, x_{p+1}$, et ses coordonnées x_i (pour $i \geq p+2$) annulent $P'(x_{p+1})x_i - Q_i(x_{p+1})$, puisque ces fonctions appartiennent à l'idéal $\mathfrak{p}$. Il en résulte que le point de $V(\mathfrak{p})$ est bien l'image par f du point y de G. Ceci achève la démonstration.

Résumons les résultats obtenus:

Théorème 3. Soit, dans l'espace $(x_1,\dots, x_n)$, une sous-variété analytique V au voisinage de l'origine, passant par l'origine, et irréductible en ce point. On peut faire une substitution linéaire sur les coordonnées $x_1,\dots, x_n$, trouver un polynôme $P(x_{p+1}; x_1,\dots, x_p)$ distingué et irréductible, et des polynômes $Q_i(x_{p+1}; x_1,\dots, x_p)$ de degrés strictement inférieurs au degré de P (pour $p+2 \leq i \leq n$), de manière que V coïncide, dans un voisinage de l'origine, avec l'adhérence de l'ensemble des solutions du système d'équations

$$P(x_{p+1}; x_1,\dots, x_p) = 0,$$
$$P'(x_{p+1}; x_1,\dots, x_p)x_i = Q_i(x_{p+1}; x_1,\dots, x_p) \qquad (p+2 \leq i \leq n)$$

pour lesquelles P' est $\neq 0$. (On notera que ce système peut avoir des solutions qui n'appartiennent pas à V.)

Ces résultats sont classiques, et souvent invoqués, mais il est difficile d'en trouver une démonstration complète dans la littérature.

Remarque: dans l'ensemble des points de G où $P' \neq 0$, l'application f de G dans $V(\mathfrak{p})$ est biunivoque. En effet, un tel point de G est caractérisé par les valeurs des fonctions $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}$.

5. Dimension d'un germe de sous-variété; sa structure topologique.

Définition: on appelle dimension du germe de sous-variété $V(\mathfrak{p})$ la dimension du noyau G qui lui est canoniquement associé. C'est aussi le nombre d'éléments d'un système de l'anneau $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n)/\mathfrak{p}$, qui soit analytiquement libre et engendre un sous-anneau analytique tel que tout élément de $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n)/\mathfrak{p}$ soit algébrique sur ce sous-anneau.

En tout point de $V(\mathfrak{p})$ où $P' \neq 0$ (avec les notations du th. 3), $V(\mathfrak{p})$ est une variété analytique-complexe (au sens strict) de dimension p, ce qui justifie la terminologie; l'ensemble des points où $P' \neq 0$ est un ouvert partout dense dans $V(\mathfrak{p})$. Ces points sont des points réguliers de la variété $V(\mathfrak{p})$, dans le sens suivant: on peut, en un tel point, choisir les coordonnées locales de l'espace ambiant, de manière que $V(\mathfrak{p})$ devienne une variété linéaire complexe. Il n'est pas très difficile de montrer que, pour tout point régulier de $V(\mathfrak{p})$ assez voisin de l'origine, il existe une manière de représenter $V(\mathfrak{p})$ au voisinage de l'origine (à la manière du th. 3) pour laquelle le P' correspondant est $\neq 0$ au point envisagé. L'ensemble des points irréguliers est donc une sous-variété analytique à l'origine. On va voir que la dimension de cette sous-variété est strictement plus petite que celle de $V(\mathfrak{p})$. En étudiant les composantes irréductibles de la sous-variété des points irréguliers, on retombera sur un processus analogue: chacune de ces composantes a un ensemble de points "réguliers" qui est une véritable variété analytique-complexe de dimension $< p$, et puis il reste l'ensemble des points irréguliers de chaque composante de la sous-variété des points irréguliers de $V(\mathfrak{p})$. Il résulte de là que, au voisinage de l'origine, $V(\mathfrak{p})$ contient une suite de sous-espaces $V_{k-1}, \dots, V_0$ dont chacun contient le suivant et est fermé dans le précédent, la dimension (topologique) de V_k étant au plus $2k$, et que les $V_k - V_{k-1}$ sont des variétés topologiques de dimension (topologique) $2k$, éventuellement vides.

On a admis que la dimension d'une vraie sous-variété de $V(\mathfrak{p})$ est strictement plus petite que celle de $V(\mathfrak{p})$; plus exactement, que chaque composante irréductible a une dimension strictement inférieure à la dimension de $V(\mathfrak{p})$. Cela résulte du:

Théorème 4. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{H}(x_1, \dots, x_n)$, et soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier contenant $\mathfrak{p}$ et $\neq \mathfrak{p}$. La dimension de la variété $V(\mathfrak{q})$ est strictement plus petite que la dimension de $V(\mathfrak{p})$.

En effet, l'anneau $\mathcal{H}(x_1, \dots, x_n)/\mathfrak{q}$ est un quotient A' de l'anneau $\mathcal{H}(x_1, \dots, x_n)/\mathfrak{p} = A$. Soit V un sous-espace vectoriel générateur et analytiquement libre de l'anneau A; la dimension d'un tel sous-espace vectoriel est justement la dimension p de $V(\mathfrak{p})$. Il suffit donc de montrer que l'image de V dans A' n'est pas analytiquement libre. Supposons le contraire: le corps des fractions de A est engendré par l'adjonction d'une racine ζ d'un polynôme unitaire P, à coefficients dans le sous-anneau $[V]$, et irréductible sur le corps des fractions K de $[V]$. L'image de ζ dans A' satisfera à la même équation, et P sera encore irréductible sur l'image de K, qui est isomorphe à K. Il en résulte que l'homomorphisme $A \to A'$ est un isomorphisme. Donc $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, contrairement à l'hypothèse.

6. Image d'un germe d'espace analytique par une application analytique dans C^n.

Théorème 5. Soient G un germe d'espace analytique, c son point privilégié, $A(G)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur G, I l'idéal des fonctions nulles au point c. Soient $f_1, \dots, f_n$ des éléments de I, et soit $f\colon G \to C^n$ l'application analytique qu'ils définissent. Alors:

1) l'idéal $\mathfrak{p}$ des $g \in \mathcal{H}(x_1,\ldots,x_n)$ qui s'annulent sur l'image $f(G)$ est premier, et $f(G) \subset V(\mathfrak{p})$.

2) si le sous-espace vectoriel V engendré par les f_i est "générateur" pour l'anneau $A(G)$ (cf. 13, p. 13), on a $f(G) = V(\mathfrak{p})$.

3) Pour que $A(G)$ soit contenu dans le corps des fractions du sous-anneau analytique engendré par les f_i, il faut et il suffit que l'application f soit biunivoque dans un ouvert partout dense de G.

Démonstration de 1): dire que $g \subset \mathfrak{p}$, c'est dire que $g \circ f = 0$, c'est-à-dire que la fonction $g(f_1,\ldots, f_n) \in A(G)$ est nulle. Donc $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n)/\mathfrak{p}$ est isomorphe au sous-anneau analytique B de $A(G)$ engendré par les f_i; comme B est un anneau d'intégrité, $\mathfrak{p}$ est premier. Il est évident que $f(G) \subset V(\mathfrak{p})$.

Démonstration de 2): l'hypothèse faite sur les f_i signifie que le corps des fractions de $A(G)$ s'obtient par adjonction d'un unique élément ζ au corps des fractions de B. On peut prendre ζ dans I, donc entier sur B. Soit $P(\zeta)$ le polynôme minimal de ζ (à coefficients dans le corps des fractions de B); on peut supposer que P a ses coefficients dans B, soit $P(\zeta; f_1,\ldots, f_n) = 0$. D'autre part, faisons sur les f_i une substitution linéaire de manière que $f_1,\ldots, f_k$ soient analytiquement indépendants, les autres f_i étant entiers algébriques sur le sous-anneau analytique engendré par $f_1,\ldots, f_k$; ce sous-anneau est isomorphe à $\mathcal{H}(x_1,\ldots, x_k)$. Alors ζ est entier algébrique sur ce sous-anneau, d'où une équation $R(\zeta; f_1,\ldots, f_k) = 0$, R étant un polynôme distingué irréductible.

Soit A' le sous-anneau analytique de $A(G)$ engendré par $f_1,\ldots, f_n$ et ζ. Soit $h\colon G \to \mathbf{C}^{n+1}$ l'application définie par les fonctions $f_1,\ldots, f_n$, ζ de l'anneau $A(G)$, et soit $\mathfrak{q}$ l'idéal des fonctions de $\mathcal{H}(x_1,\ldots, x_n, z)$ qui s'annulent sur $h(G)$. D'après la partie 1) du théorème, $\mathfrak{q}$ est premier. Il résulte de la démonstration du th. 1 que $h(G) = V(\mathfrak{q})$. Pour conclure que $f(G) = V(\mathfrak{p})$, il suffit de montrer que tout point $(x_1,\ldots, x_n) \in V(\mathfrak{p})$, suffisamment voisin de l'origine, est la projection d'au moins un point $(x_1,\dots, x_n, z) \in V(\mathfrak{q})$, z étant voisin de zéro. En fait, les p solutions (distinctes ou non) de l'équation $P(z; x_1,\dots, x_n)$ conviennent; elles tendent bien vers zéro avec $x_1,\dots, x_n$, car elles satisfont à $R(z; x_1,\dots, x_k) = 0$.

Démonstration de 3): soit $\Delta(x_1,\dots, x_n)$ le discriminant de P; la fonction $\Delta(f_1,\dots, f_n)$ sur G n'est pas identiquement nulle, donc $\Delta(x_1,\dots,x_n)$ ne s'annule pas identiquement sur $V(\mathfrak{p})$. Les points de $V(\mathfrak{p})$ qui n'appartiennent pas à la sous-variété définie par l'équation $\Delta(x_1,\dots, x_n) = 0$ sont donc couverts exactement p fois par l'image $f(G)$. Ce sont les images d'un ouvert partout dense de G. Cela étant, pour que $A(G)$ soit dans le corps des fractions de B, il faut et il suffit que ζ soit dans ce corps, c'est-à-dire que $p = 1$. S'il en est ainsi, l'application f est biunivoque dans l'ensemble des points de G où $\Delta(f_1,\dots, f_n) \neq 0$. Réciproquement, si f est biunivoque dans un ouvert partout dense de G, on a nécessairement $p = 1$.

Le théorème 5 est ainsi démontré.

7. Caractérisation des sous-espaces vectoriels générateurs d'un anneau de fonctions holomorphes sur un germe.

Théorème 6. Soit G un germe d'espace analytique (de point privilégié c), et soit $A(G)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur G, I l'idéal des fonctions nulles en c. Pour que le sous-espace vectoriel engendré par des éléments $f_1,\dots, f_n$ de I soit générateur pour l'anneau $A(G)$, il faut et il suffit que les fonctions f_i n'aient pas d'autre zéro commun que c (tout au moins dans un voisinage de c; autrement dit, la condition exprime que c est un zéro commun isolé).

Démonstration: la condition est nécessaire. Soit en effet V le sous-espace vectoriel engendré par les f_i. Si V est générateur, V contient un sous-espace vectoriel W qui est générateur et analytiquement libre (13, lemme, p. 14). Par une substitution linéaire, on peut supposer que $f_1,\dots, f_k$ constituent une base de W ; alors le sous-anneau analytique engendré par $f_1, \ldots, f_k$ est isomorphe à $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_k)$, et le germe G peut être défini par une équation $P(z; x_1, \ldots, x_k) = 0$, P étant un polynôme distingué irréductible. Les fonctions $f_1, \ldots, f_k$ sur G s'identifient à $x_1, \ldots, x_k$, qui n'ont pas d'autre zéro commun que l'origine (point privilégié de G).

Montrons que la condition est suffisante. Considérons un sous-espace vectoriel W de I qui soit générateur et contienne V. Pour prouver que V est lui-même générateur, il suffit de démontrer le lemme suivant:

Lemme 2. Soient G un germe d'espace analytique, c son point privilégié, $A(G)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur G, I l'idéal des fonctions nulles en c. Si le sous-espace vectoriel engendré par des éléments $f_1, \ldots, f_n$ de I est générateur, et si $f_2, \ldots, f_n$ n'ont pas d'autre zéro commun que c, alors f_1 est entier algébrique sur le sous-anneau analytique engendré par $f_2, \ldots, f_n$.

Démonstration du lemme 2. Appliquons le théorème 5 à $f_1, f_2, \ldots, f_n$. L'idéal $\mathfrak{p}$ des fonctions holomorphes $g(x_1, \ldots, x_n)$ telles que $g(f_1, \ldots, f_n) = 0$ est premier, et $V(\mathfrak{p}) = f(G)$, en notant f l'application $G \to \mathbb{C}^n$ définie par les fonctions f_i. Soit $\mathfrak{J}$ l'idéal engendré par $\mathfrak{p}, x_2, \ldots, x_n$. La variété $V(\mathfrak{J})$ est l'intersection de $V(\mathfrak{p})$ avec $x_2 = \cdots = x_n = 0$; donc $V(\mathfrak{J})$ est l'image, par f, de l'ensemble des points de G où $f_2, \ldots, f_n$ sont nuls, c'est-à-dire de l'unique point c. Bref, la variété $V(\mathfrak{J})$ est réduite à l'origine. Appliquons le théorème 2 à la fonction x_1, qui s'annule sur $V(\mathfrak{J})$: on a, pour un entier ρ convenable, $(x_1)^\rho \in \mathfrak{J}$, d'où

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1)^\rho - \sum_{2 \leq i \leq n} a_i x_i \in \mathfrak{p}$$

(les a_i désignent des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$ holomorphes à l'origine). Puisque $F(x_1, 0, \ldots, 0)$ n'est pas identiquement nulle, F est (exposé 10) équivalente à un polynôme distingué en x_1, soit $P(x_1; x_2, \ldots, x_n)$. Dans l'anneau $A(G)$, on a $P(f_1; f_2, \ldots, f_n) = 0$, ce qui démontre le lemme.

On peut appliquer le théorème 6 au théorème 5. On obtient le résultat suivant: si des fonctions f_i holomorphes sur le germe G s'annulent au point privilégié c et n'ont pas d'autre zéro commun, elles prennent, au voisinage de c, tout système de valeurs $(a_1, \ldots, a_n)$ voisin de zéro et satisfaisant aux relations $g(a_1, \ldots, a_n) = 0$ (g parcourant l'idéal des fonctions holomorphes telles que $g(f_1, \ldots, f_n)$ soit identiquement nulle sur G).

8. Application aux systèmes d'équations et aux transformations analytiques.

Voici une série de conséquences faciles des théorème 5 et 6.

Soit G un germe d'espace analytique, de dimension n (par exemple, l'espace C^n avec l'origine pour point privilégié). Soit, sur G, un système de m fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_m$, nulles au point privilégié c, et sans zéro commun autre que c. Alors $m \geq n$; pour que $m > n$, il faut et il suffit qu'il existe au moins une relation $g(f_1, \ldots, f_m) = 0$, g holomorphe à l'origine et non identiquement nulle.

En effet, le système $(f_1, \ldots, f_m)$ est générateur, d'après le théorème 6. La dimension de l'espace vectoriel qu'il engendre est donc au moins égale à la dimension n du germe G, ce qui prouve $m \geq n$. Dire qu'il n'existe aucune relation $g(F_1, \ldots, f_m) = 0$, c'est dire que $f_1, \ldots, f_m$ constituent une base du sous-espace V qu'ils engendrent, et que V est analytiquement libre, donc que la dimension de V est n.

Soit G un germe d'espace analytique de dimension n, et soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions holomorphes sur G, nulles au point privilégié c, et définissant une application biunivoque f de G dans C^n. Alors f applique biunivoquement un voisinage de c sur un voisinage de 0 dans C^n, et l'application réciproque est analytique.

En effet, les f_i n'ont pas d'autre zéro commun que c; donc, d'après un résultat précédent, elles sont analytiquement indépendantes (puisque leur nombre est égal à la dimension de G). D'après le théorème 5, l'image de f couvre un voisinage de l'origine dans C^n, et $A(G)$ est contenu dans le corps des fractions du sous-anneau analytique engendré par les f_i. Ceci veut dire que $A(G)$ est la clôture intégrale de ce sous-anneau, lequel est isomorphe à $\mathcal{H}(x_1,\ldots, x_n)$, intégralement clos. Ainsi l'application f définit un isomorphisme de l'anneau du germe $\mathbf{C}^n$ (avec l'origine comme point privilégié) sur $A(G)$; ceci implique que f est un isomorphisme de $A(G)$ sur le germe $\mathbf{C}^n$. (Cf. exposé 13, théorème 1.)

Cas particulier: si n fonctions f_i de n variables, holomorphes à l'origine, définissent une application biunivoque d'un voisinage de l'origine, leur jacobien est $\neq 0$ à l'origine (considérer l'application réciproque, dont l'existence vient d'être démontrée).

Soit maintenant, dans l'espace $\mathbf{C}^n$, une sous-variété analytique V au voisinage de l'origine, passant par l'origine et irréductible en ce point. Soit p sa dimension. Si une fonction h holomorphe au voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^n$, et nulle à l'origine, n'est pas identiquement nulle sur V au voisinage de 0, les points de V où $f = 0$ constituent des sous-variétés irréductibles à l'origine et la dimension de chacune de ces sous-variétés est $p-1$.

En effet, soit W l'une quelconque des composantes irréductibles. Soit a un point régulier de W, voisin de l'origine, et n'appartenant à aucune autre composante irréductible; et soit q la dimension de W. On sait que $q < p$ (th. 4). Soit $g_1,\ldots, g_q$ un système de fonctions holomorphes au point a (dans l'espace ambiant), constituant sur W un système de coordonnées locales. Les équations $h = 0$, $g_1 = 0,\ldots, g_q = 0$ sur V (au voisinage de a) ont la solution isolée a. D'après ce qu'on a vu au début de ce n° 8, cela implique que le nombre $q+1$ de ces fonctions est $\geq p$. Ainsi, $q \geq p-1$ et $q < p$, donc $q = p-1$.

Une conséquence immédiate du résultat précédent est ceci; l'ensemble des points de V (de dimension p à l'origine) où s'annulent simultanément r fonctions holomorphes de l'espace ambiant (nulles à l'origine) est la réunion de sous-variétés irréductibles à l'origine, dont chacune a une dimension au moins égale à $p - r$.

9. L'espace $\mathcal{F}_B$ des germes de sous-variétés irréductibles.

Soit B une variété analytique-complexe (abstraite). En 12, (page 6) on a défini l'espace $\mathcal{E}_B$ des germes de sous-variétés principales irréductibles de B. On peut donner une définition analogue pour l'espace $\mathcal{F}_B$ des germes de sous-variétés irréductibles (principales ou non). Un point de $\mathcal{F}_B$ est un couple formé d'un point $b \in B$ et d'un germe de sous-variété irréductible au point b. Dans $\mathcal{F}_B$, on définit une topologie par des ouverts en procédant exactement comme on l'a fait pour $\mathcal{E}_B$. On a une application canonique continue ψ de $\mathcal{F}_B$ sur B; l'image réciproque ψ^{-1} d'un point de B est un ensemble discret. On définit les points réguliers de $\mathcal{F}_B$ (on sait déjà ce que c'est qu'un point régulier d'une sous-variété analytique); l'ensemble $\mathcal{F}_B^0$ des points réguliers de $\mathcal{F}_B$ est un ouvert partout dense, c'est une variété analytique-complexe (mais ses composantes connexes peuvent avoir des dimensions distinctes).

Soient U un ouvert de B, et V une sous-variété analytique dans U (cette notion a été définie dans 12, p. 1). On note $\mathcal{F}(V)$ l'image réciproque $\psi^{-1}(V) \subset \mathcal{F}_B$; c'est un ouvert de $\mathcal{F}_B$. L'espace topologique $\mathcal{F}(V)$ s'appelle l'espace des paramètres de la sous-variété V.

Théorème 7. L'espace topologique $\mathcal{F}_B$ est séparé.

En effet, dans le cas contraire, il existerait 2 points distincts de $\mathcal{F}_B$ tel que tout voisinage de l'un ait une intersection non vide avec tout voisinage de l'autre. Cette intersection contiendrait des points réguliers de $\mathcal{F}_B$. Pour prouver le théorème 7, il suffit donc de montrer ceci: soient deux sous-variétés analytiques V et V' dans un voisinage de l'origine 0 de $\mathbf{C}^n$, contenant le point 0, et telles que les germes qu'elles définissent en 0 soient irréductibles; s'il existe des points $a \in V$ arbitrairement voisins de 0, tels que V et V' définissent le même germe (régulier) au point a, alors V et V' définissent le même germe au point 0. Ceci résulte, à son tour, du lemme plus général que voici:

<u>Lemme</u> 3. Soient V et V' deux sous-variétés analytiques au voisinage de l'origine 0 de C^n et contenant 0. Supposons V irréductible au point 0. S'il existe des points $a \in V$ arbitrairement voisins de 0 et jouissant de la propriété que V est contenue dans V' au voisinage de a, alors V est contenue dans V' au voisinage de 0.

Voici pourquoi. V' est, au voisinage de 0, l'ensemble des zéros communs à une famille finie de fonctions holomorphes f_i. L'hypothèse faite implique que les f_i s'annulent sur V au voisinage de $a \in V$. Dès que a est assez voisin de 0, ceci implique que chaque f_i a'annule sur V au voisinage de 0 (en vertu du lemme 1).

On montre, comme en 12, que l'espace $\mathcal{F}_B$ est <u>localement compact</u>, et que si V est une sous-variété analytique dans un ouvert $U \subset B$, la restriction de ψ à l'espace des paramètres $\mathcal{F}(V)$ est une application <u>propre</u> de $\mathcal{F}(V)$ dans U. Réciproquement, si un ensemble ouvert E de $\mathcal{F}_B$ et un ouvert U de B sont tels que $\psi(E) \subset U$ et que la restriction de ψ à E soit une application propre de E dans U, E est l'espace des paramètres d'une sous-variété analytique dans U. Une sous-variété analytique dans un ouvert U est dite <u>réductible dans</u> U s'il existe deux sous-variétés analytiques V_1 et V_2 dans U, distinctes de V, et dont V soit la réunion. Le théorème 5 de 12 est valable: pour qu'une sous-variété V dans un ouvert U soit <u>irréductible dans</u> U, il faut et il suffit que l'espace des paramètres $\mathcal{F}(V)$ soit <u>connexe</u>.

De là on déduit la décomposition d'une sous-variété (dans un ouvert U) en composantes irréductibles (dans U). Il faut toutefois avoir prouvé que <u>l'espace</u> $\mathcal{F}_B$ est localement <u>connexe</u>. D'une façon précise (cf. th. 6 de 12) : tout point de $\mathcal{F}_B$ possède un système fondamental de voisinages dont l'intersection avec la variété $\mathcal{F}_B^0$ des points <u>réguliers</u> est connexe. La démonstration est comme dans 12, grâce au th. 3 du présent exposé 14, lequel montre que l'ensemble des points réguliers voisins d'un point $a \in \mathcal{F}_B$ contient un sous-ensemble ouvert partout dense, isomorphe à l'ensemble des solutions d'une équation $P(z; x_1, \dots, x_k) = 0$ pour lesquelles $P' \neq 0$.

On démontre facilement un théorème analogue au théorème 7 de 12 .

10. Structure analytique de l'espace $\mathcal{F}_B$.

Soit V une sous-variété analytique de C^n au voisinage de l'origine, passant par l'origine, et définissant un germe irréductible à l'origine. Soit p sa dimension. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de $H(x_1, \ldots, x_n)$ associé à ce germe. On a, au n°1, associé canoniquement à l'idéal $\mathfrak{p}$ un germe d'espace analytique; il peut être défini par l'espace des parametres G d'une sous-variété principale

$$P(x_{p+1}; x_1, \ldots, x_p) = 0 \quad \text{irréductible à l'origine,}$$

et par le point privilégié $c \in G$ correspondant à l'origine. De plus, on a défini une application analytique $f\colon\ G \to C^n$, et on a montré au n° 4 que f applique G sur un voisinage de l'origine dans la sous-variété V; enfin, la restriction de f à l'ensemble des points où $P' \neq 0$ est biunivoque. Ces résultats se complètent par le:

Théorème 8. Avec les notations précédentes, l'application f se décompose d'une seule manière

$$f = \psi \circ \overline{f}\ , \tag{3}$$

ψ désignant l'application canonique de l'espace des paramètres $\mathcal{F}(V)$ sur V, et $\overline{f}$ une application continue de G dans $\mathcal{F}(V)$; en outre, $\overline{f}$ est un homéomorphisme de G sur un voisinage de l'origine dans $\mathcal{F}(V)$.

Démonstration: tout d'abord, en chaque point a de G, f définit une application d'un voisinage de a sur un voisinage du point $f(a)$ dans une sous-variété analytique W_a de C^n, irréductible au point $f(a)$ (cf. th. 3). La dimension de W_a est celle de G, c'est-à-dire p. Puisque $W_a \subset V$, le germe défini au point $f(a)$ par W_a est l'un des germes irréductibles de V en ce point, c'est-à-dire est un point de l'espace des paramètres $\mathcal{F}(V)$. Soit $\overline{f}(a)$ ce point de $\mathcal{F}(V)$: ceci définit une application $\overline{f}$ satisfaisant à (3), et elle est continue d'après la définition de la topologie de $\mathcal{F}(V)$. L'unicité de la décomposition (3) est évidente, car $\overline{f}$ est définie sans ambiguïté dans l'ensemble des points où $P' \neq 0$, ensemble qui est partout dense dans G.

Il reste à montrer que $\overline{f}$ est un homéomorphisme de G sur un voisinage de l'origine dans $\mathcal{F}(V)$. D'abord, l'image de $\overline{f}$ contient les points où $P' \neq 0$, c'est-à-dire un sous-ensemble ouvert partout dense de V (dans un voisinage de l'origine). Comme $\overline{f}$ transforme un voisinage compact de c dans G, en un compact, l'image de ce voisinage est fermée dans $\mathcal{F}(V)$, et c'est donc un voisinage de l'origine dans $\mathcal{F}(V)$. Il ne reste qu'à prouver que $\overline{f}$ est biunivoque (ce qui impliquera que $\overline{f}$ est bicontinue sur un voisinage compact de c dans G); or cela résulte du fait que la restriction de $\overline{f}$ à l'ensemble des points où $P' \neq 0$ est biunivoque.

Le théorème 8 permet d'identifier un voisinage de c dans G à un voisinage de l'origine dans l'espace des paramètres de V; on peut dire que le germe d'espace analytique associé à un idéal premier sert à <u>paramétrer</u> le germe de sous-variété irréductible défini par cet idéal premier. En même temps, on peut transporter à l'espace des paramètres $\mathcal{F}(V)$, au voisinage de l'origine, la <u>structure d'espace analytique général</u> de G. (Cf. 13, n° 2.)

De là résulte que si B est une variété analytique-complexe, l'espace $\mathcal{F}_B$ des germes de sous-varietes irréductibles (aux différents points de B) est muni d'une <u>structure d'espace analytique général</u>. On a donc la notion de <u>fonction holomorphe dans un ouvert de</u> $\mathcal{F}_B$. En particulier, si V est une sous-variété analytique dans un ouvert U de B, on a la notion de fonction holomorphe sur l'espace des paramètres $\mathcal{F}(V)$; par abus de langage, on dira aussi fonction holomorphe <u>sur</u> V (mais il faut prendre garde qu'une telle fonction peut prendre des valeurs différentes en deux composantes irréductibles distinctes d'un même point de V). Pour qu'une fonction définie sur $\mathcal{F}(v)$ soit holomorphe, il faut et il suffit qu'elle soit continue, et que sa restriction aux points réguliers de V soit holomorphe (au sens ordinaire d'une fonction holomorphe sur une véritable variété analytique-complexe).

Etant données deux sous-variétés analytiques V et V', on a aussi la notion d'application analytique de $\mathcal{F}(V)$ dans $\mathcal{F}(V')$.

Définition: On dit que V et V' sont équivalentes s'il existe un isomorphisme analytique de $\mathcal{F}(V)$ sur $\mathcal{F}(V')$. On dit que V, en un ses points a, est équivalente à V' au point $a' \in V'$, s'il existe un voisinage ouvert de a et un voisinage ouvert de a' qui sont équivalents. Il est évident que pour que deux germes de sous-variétés soient équivalents, il faut et il suffit que les noyaux associés soient isomorphes.

Théorème 9. Tout germe de sous-variété analytique est équivalent à un germe de sous-variété normale.

Mais il faut d'abord dire ce qu'on entend par "sous-variété V de C^n normale en un de ses points a où elle est irréductible": cela signifie, par définition, que l'anneau des fonctions holomorphes sur le germe défini par V au point a est induit par l'anneau des fonctions holomorphes de l'espace ambiant. Condition équivalente: si A est l'anneau des fonctions holomorphes dans l'espace ambiant au point a, et si $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier du germe de la sous-variété en a, l'anneau quotient $A/\mathfrak{p}$ est intégralement clos.

Avec ces définitions, le théorème 9 est une conséquence immédiate de la Remarque de la p. 11 de l'exposé 13.

Nous ne développerons pas ici les propriétés des sous-varietes normales en un point; signalons sans démonstration qu'au voisinage d'un point où V est irréductible et normale, la sous-variété des points irréguliers (cf. n° 5) est de dimension au plus $p-2$, en désignant par p la dimension de V.