H. Cartan

# La notion d'espace analytique général et de fonction holomorphe sur un tel espace

*Séminaire Henri Cartan*, tome 4 (1951-1952), exp. n° 13, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A13_0>

# LA NOTION D'ESPACE ANALYTIQUE GÉNÉRAL ET DE FONCTION HOLOMORPHE SUR UN TEL ESPACE

(Exposés de H. Cartan, 24 et 31 mars 1952)

Dans tout cet exposé, il s'agit de fonctions analytiques sur le corps complexe $\mathbf{C}$.

## 1. Généralisation de la notion de fonction holomorphe.

Soit $B$ une variété analytique-complexe de dimension (complexe) $n$. Dans 12, on a défini l'espace topologique $\mathcal{E}_B$, dont les points sont les couples formés d'un point $x \in B$ et d'un germe de sous-variété principale non vide au point $x$. (N.B: on appellera désormais "germe de sous-variété analytique au point $x$" ce qui, dans 12, page 2, était appelé "variété analytique au point $x$." Le "germe" est donc un élément de l'ensemble $\mathcal{P}_x$, quotient de l'ensemble des parties de $B$ par la relation d'équivalence définie par le point $x$: deux parties sont équivalentes au point $x$ si elles ont même intersection avec un voisinage convenable de $x$.) Dans 12, on a démontré quelques propriétés importantes de l'espace $\mathcal{E}_B$. On a défini l'ensemble $\mathcal{E}_B^0$ des points "réguliers": c'est une variété analytique-complexe de dimension $n-1$, partout dense dans $\mathcal{E}_B$.

Définition 1. Soit $U$ un ouvert de $\mathcal{E}_B$. On appelle fonction holomorphe dans $U$ toute fonction $f$ (à valeurs scalaires), définie et continue dans $U$, et dont la restriction à $U \cap \mathcal{E}_B^0$ est holomorphe (au sens habituel).

Cette définition s'applique notamment si $U$ est l'"espace des paramètres" d'une sous-variété principale dans un ouvert de $B$.

Définition 2. Soient $B$ et $B'$ deux variétés analytiques-complexes, $U$ un ouvert de $\mathcal{E}_B$, $U'$ un ouvert de $\mathcal{E}_{B'}$. Une application $f$ de $U$ dans $U'$ est dite analytique si elle est continue et si, pour tout ouvert $V' \subset U'$ et toute fonction (scalaire) $g$ "holomorphe" dans $V'$, la fonction composée $g \circ f$ est "holomorphe" dans $f^{-1}(V')$.

Pour qu'une application continue $f$ de $U$ dans $U'$ soit analytique, il faut et il suffit que sa restriction à l'ensemble des points réguliers de $U$ soit analytique.

La notion d'analyticité a un caractère local: pour que $f$ soit analytique dans $U$, il faut et il suffit que tout point de $U$ possède un voisinage ouvert tel que la restriction de $f$ à ce voisinage soit analytique.

Lorsque $U'$ se compose uniquement de points réguliers, la condition pour que $f$ soit analytique est que chaque point de $U$ possède un voisinage ouvert $V$ tel que les coordonnées locales (dans $U'$) du point $f(x)$ soient des fonctions "holomorphes" du point $x \in V$.

Transitivité: Soient $U$ un ouvert de $\mathcal{E}_B$, $U'$ un ouvert de $\mathcal{E}_{B'}$, $U''$ un ouvert de $\mathcal{E}_{B''}$. La composée d'une application analytique de $U$ dans $U'$ et d'une application analytique de $U'$ dans $U''$, est une application analytique de $U$ dans $U''$: c'est trivial d'après la définition.

Définition 3. Etant donnés un ouvert $U$ de $\mathcal{E}_B$ et un ouvert $U'$ de $\mathcal{E}_{B'}$, on appelle isomorphisme de $U$ sur $U'$ un homéomorphisme $f$ de $U$ sur $U'$, tel que $f$ et l'application réciproque $f^{-1}$ soient "analytiques" (au sens de la déf. 2). On dit que $U$ et $U'$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de $U$ sur $U'$.

Si $U$ est isomorphe à $U'$, et $U'$ isomorphe à $U''$, alors $U$ est isomorphe a $U''$. L'isomorphisme définit donc une relation d'équivalence entre ouverts des espaces $\mathcal{E}_B$.

Proposition 1. Si $f$ est un isomorphisme de $U \subset \mathcal{E}_B$ sur $U' \subset \mathcal{E}_{B'}$, tout point régulier de $U$ (sauf ceux d'une sous-variété principale de $U \cap \mathcal{E}_B^0$) est appliqué par $f$ dans un point régulier de $U'$.

En effet, soit $a'$ un point de $U'$, c'est-à-dire un point $b' \in B'$ et un germe de sous-variété principale en $b'$, définie par une équation $P = 0$, $P$ étant un polynôme distingué irréductible (pour un choix des coordonnés locales en $b'$). Soit $\Delta$ le discriminant de $P$; $\Delta$ induit, dans un voisinage $V'$ de $a'$ ($V' \subset U'$), une fonction holomorphe (notée encore $\Delta$), et les points de $V'$ où $\Delta \neq 0$ sont réguliers (il peut exister d'autres points réguliers, mais peu importe). La fonction $\Delta \circ f$ est holomorphe dans $f^{-1}(V')$, et elle n'est pas identiquement nulle (sinon $\Delta = \Delta \circ f \circ f^{-1}$ serait identiquement nulle dans $V'$). Les points réguliers de $f^{-1}(V')$ où $\Delta \circ f = 0$ constituent une sous-variété principale dans $V'$. Ceci prouve la proposition.

Corollaire: si $U$ et $U'$ sont isomorphes, leurs dimensions sont égales (on appelle "dimension" de $U$ la dimension complexe de la variété analytique-complexe $U \cap \mathcal{E}_B^0$).

Remarque: la notion de point régulier n'est pas invariante par isomorphisme. Par exemple, prenons $n = 2$; prenons pour $B$ l'espace $\mathbf{C}^2$ (deux coordonnées complexes $x$ et $y$), et pour ouvert $U$ la sous-variété principale $y = 0$; prenons pour $B'$ l'espace $\mathbf{C}^2$ (deux coordonnées $x'$ et $y'$), et pour ouvert $U'$ la sous-variété principale $x'^3 = y'^2$. La transformation qui, au point $(x, 0)$ de $U$, associe le point $x' = x^2$, $y' = x^3$ de $U'$, est un isomorphisme analytique de $U$ sur $U'$, et le point $x = y = 0$, qui est régulier, est transformé en $x' = y' = 0$ qui ne l'est pas.

Définition 4. On dit qu'un point $x \in \mathcal{E}_B$ est absolument régulier s'il possède un voisinage ouvert isomorphe à un ouvert de l'espace numérique $\mathbf{C}^{n-1}$.

Tout point régulier est absolument régulier, mais la réciproque est inexacte, comme le montre l'exemple ci-dessus.

2. La notion d'espace analytique-complexe général.

On va généraliser la notion de variété analytique-complexe (définie, l'Exp. 1, p. 10). Un espace analytique-complexe général (ou, plus brièvement, espace analytique général) est un espace topologique séparé $E$, muni d'un recouvrement par des ouverts $E_i$ et d'homéomorphismes $\varphi_i$ de $E_i$ sur un ouvert $U_i$ d'un espace $\mathcal{E}_{B_i}$, de manière que soit satisfaite la condition suivante: chaque fois que $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un isomorphisme (au sens de la déf. 3) de $\varphi_i(E_i \cap E_j)$ sur $\varphi_j(E_i \cap E_j)$.

Etant donné un point x de E, chacun des $E_i$ qui contient x définit un système de "coordonnées locales" liées par une relation irréductible $f = 0$ (il faut prendre garde que 2 points arbitrairement voisins de x peuvent avoir les mêmes coordonnées locales tout en étant distincts).

La déf. 4 conduit à la notion de point absolument régulier d'un espace analytique général E (par contre, il n'y a pas de notion de "point régulier"). Les points absolument réguliers forment un ouvert partout dense dans E, et cet ouvert est muni d'une structure de variété analytique-complexe (au sens de l'exposé 1).

Un espace analytique général E est localement connexe. D'une façon précise, il résulte du th. 6 de 12 que chaque point de E possède un système fondamental de voisinages ouverts dont l'intersection avec l'ensemble des points absolument réguliers est connexe. Les composantes connexes d'un espace analytique général sont des ouverts, donc sont des espaces analytiques généraux. La dimension d'un espace analytique général connexe est la dimension (complexe) de la variété formée de ses points absolument réguliers, variété qui est connexe.

On a la notion de fonction holomorphe (a valeurs scalaires) sur un espace analytique général E; en effet, la notion de fonction holomorphe dans un ouvert U d'un $\mathcal{E}_B$ est invariante par isomorphisme. Plus généralement, étant donnés deux espaces analytiques généraux E et E', on a la notion d'application analytique de E dans E'. La composée de 2 applications analytiques est une application analytique. Un isomorphisme de E sur E' est un homéomorphisme f tel que f et $f^{-1}$ soient analytiques. L'isomorphisme définit une relation d'équivalence entre espaces analytiques généraux. La dimension d'un espace analytique général connexe est invariante par isomorphisme. (Cf. coroll. de la prop. 1.)

Si B est une variété analytique-complexe, l'espace $\mathcal{E}_B$ est évidemment un espace analytique général. On verra, dans l'exposé suivant, qu'il en est de même, plus généralement, de l'espace $\mathcal{F}_B$: espace des germes de sous-varietes analytiques (non vides), principales ou non.

3. <u>Fonctions holomorphes sur un germe d'espace analytique général</u>.

Un <u>germe</u> d'espace analytique général est défini par la donnée d'un espace anal. gén. $E$ et d'un $a \in E$. Deux germes $(E, a)$ et $(E', a')$ sont équivalents s'il existe un isomorphisme d'un ouvert $U$ contenant $a$ sur un ouvert $U'$ contenant $a'$, cet isomorphisme envoyant $a$ en $a'$. Tout germe d'espace analytique général est donc équivalent à un germe $(U, a)$, où $U$ est un ouvert d'un $\mathcal{E}_B$.

Soit $(E, a)$ un tel germe. Pour chaque ouvert $U$ de $E$ contenant $a$, considérons l'anneau $A(U)$ des fonctions holomorphes (scalaires) dans $U$. La limite inductive $A$ des $A(U)$ s'appelle l'<u>anneau des fonctions holomorphes sur le germe</u> $(E, a)$. Toute fonction holomorphe sur le germe est donc définie par une fonction holomorphe dans un ouvert contenant $a$; une fonction $f$ définie dans un ouvert $U$ et une fonction $f'$ définie dans un ouvert $U'$ sont identifiées si elles coïncident dans tout un voisinage de $a$.

L'anneau $A$ des fonctions holomorphes sur un germe est un <u>anneau d'intégrité</u> (anneau commutatif avec élément unité, sans diviseur de zéro). En effet, si $f$ et $g$ sont des fonctions holomorphes sur le germe, et si leur produit $fg$ est identiquement nul au voisinage de $a$, l'une au moins est identiquement nulle au voisinage de $a$ (conséquence du fait que $E$ est localement connexe, et du th. 7 de 12).

$\mathbf{C}$ désignant toujours le corps des nombres complexes, on a deux homomorphismes d'anneaux $\varphi$ et $\varepsilon$:

$$\mathbf{C} \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{C}$$

dont le composé est l'identité: $\varphi$ associe à chaque $c \in \mathbf{C}$ la fonction constante égale à $c$; $\varepsilon$ associe à chaque fonction holomorphe sur le germe $(E, a)$ sa valeur au point $a$. (La donnée de deux tels homomorphismes $\varphi$ et $\varepsilon$ définit sur l'anneau $A$ ce qu'on appelle une structure de <u>$\mathbf{C}$-algebre augmentée</u>.)

On peut, dans certaines conditions, définir une fonction holomorphe d'éléments de $A$. D'une façon précise, associons à chaque système fini

$(f_1,\dots, f_k)$ d'éléments de A, l'anneau H des fonctions de k variables complexes, holomorphes au point $\varepsilon(f_1),\dots, \varepsilon(f_k)$. Si $h \in H$, la fonction composée $h(f_1,\dots, f_k)$ est une fonction holomorphe sur le germe, donc un élément de A. Ainsi, $f_1,\dots, f_k$ étant donnés, on a une application $h \to h(f_1,\dots, f_k)$ de l'anneau H dans l'anneau A, qui est visiblement un homomorphisme d'anneaux satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(\Gamma)\ \left\{\begin{array}{l}
\varepsilon(h(f_1,\dots, f_k)) = h(\varepsilon(f_1),\dots, \varepsilon(f_k))\,; \\
h(\varphi(c_1),\dots, \varphi(c_k)) = \varphi(h(c_1,\dots, c_k))\,; \\
\text{si } h \text{ est une constante } \lambda,\ h(f_1,\dots, f_k) \text{ est la constante } \varphi(\lambda) \\
\text{si la fonction } h(x_1,\dots, x_k) \text{ est la i-ième coordonnée } x_i, \\
\qquad h(f_1,\dots, f_k) \text{ est égale à } f_i\ ; \\
\text{si } h \text{ est une fonction composée } g(u_1,\dots, u_m), \text{ alors} \\
\qquad h(f_1,\dots, f_k) = g(u_1(f_1,\dots, f_k),\dots, u_m(f_1,\dots, f_k)).
\end{array}\right.$$

Définition 5. On appellera anneau analytique un anneau d'intégrité A muni de deux homomorphismes $\varphi$ et $\varepsilon$ comme ci-dessus (tels que $\varepsilon\circ\varphi$ soit l'identité), et dans lequel sont définies les fonctions holomorphes d'éléments de A dans les circonstances expliquées ci-dessus, de maniere que soient satisfaites les conditions $(\Gamma)$.

Dans un anneau analytique, les éléments non inversibles sont les a tels que $\varepsilon(a) = 0$. En effet, si $\varepsilon(a) = 0$, a n'est pas inversible; réciproquement, si $\varepsilon(a) \neq 0$, montrons que a est inversible: on a alors $a = \varphi(c) + a'$, avec $c \neq 0$ et $\varepsilon(a') = 0$. Considérons la fonction h d'une variable x, holomorphe à l'origine

$$h(x) = \sum_{p\geq 0} (-1)^p\, x^p/c^{p+1} \quad .$$

D'après les hypothèses faites sur A, $h(a')$ est défini comme élément de A, et le produit $a\cdot h(a')$ est $\varphi(1)$, c'est-à-dire l'élément unité de l'anneau A.

On voit qu'un anneau analytique est un anneau local (anneau dans lequel les éléments non inversibles forment un idéal). Cet idéal I est le noyau de l'homomorphisme $\varepsilon$.

Soient donnes deux anneaux analytiques $A$ et $A'$. Un <u>homomorphisme</u> $F$ de $A$ dans $A'$ est une application qui est un homomorphisme pour les structures d'anneau, compatible en outre avec les applications $\varphi$, $\varepsilon$ et $\varphi'$, $\varepsilon'$, et tel enfin que si $h$ est une fonction holomorphe de $k$ variables au point $\varepsilon(a_1), \ldots, \varepsilon(a_k)$ (les $a_i$ étant dans $A$), on ait

$$h(F(a_1), \ldots, F(a_k)) = F(H(a_1, \ldots, a_k)).$$

En particulier, on a la notion d'<u>isomorphisme</u> de deux anneaux analytiques.

Revenons aux germes d'espaces analytiques généraux. Soient $(E, a)$ et $(E', a')$ deux tels germes, $A$ et $A'$ les anneaux associés. Il est clair qu'une application analytique de $(E, a)$ dans $(E', a')$ (envoyant $a$ en $a'$) définit un homomorphisme de l'anneau analytique $A'$ dans l'anneau analytique $A$. En particulier, un isomorphisme de $(E, a)$ sur $(E', a')$ définit un isomorphisme de l'anneau $A'$ sur l'anneau $A$.

<u>Théorème</u> 1. Soient $(E, a)$ et $(E', a')$ deux germes d'espaces analytiques généraux, $A$ l'anneau des fonctions holomorphes sur $(E, a)$, $A'$ l'anneau des fonctions holomorphes sur $(E', a')$. Si $F$ est un isomorphisme de l'anneau analytique $A'$ sur l'anneau analytique $A$, il existe un isomorphisme du germe $(E, a)$ sur le germe $(E', a')$, et un seul, qui donne naissance à $F$.

Ce théorème prouve que l'isomorphie des anneaux analytiques associés aux germes $(E, a)$ et $(E', a')$ est nécessaire et suffisante pour l'isomorphie de ces germes.

Démonstration: cherchons une application analytique $\Phi$ de $E$ dans $E'$, définie au voisinage de $a$, et envoyant $a$ en $a'$, de manière que, pour toute $f$ holomorphe dans $E'$ au voisinage de $a'$, on ait

(1) $$F(f) = f \circ \Phi \text{ au voisinage de } a.$$

Une fois prouvée l'existence et l'unicité d'une telle $\Phi$, on pourra raisonner de même pour l'isomorphisme réciproque $F^{-1}$, ce qui donnera un $\Phi'$; et $\Phi' \circ \Phi$ sera l'application identique de $(E, a)$, $\Phi \circ \Phi'$ sera l'application identique de $(E', a')$; donc $\Phi$ sera bien un isomorphisme.

Représentons E comme "espace des paramètres" $\mathcal{E}(V)$ de la sous-variété principale $V$ définie, au voisinage de l'origine dans l'espace $(z, x_1,\ldots, x_k)$, par une équation

$$P(z; x_1,\ldots, x_k) = 0 ,$$

où P est un polynôme distingué irréductible. Soit $\rho$ l'application canonique de $\mathcal{E}(V)$ sur $V$. Les coordonnées $z, x_1,\ldots, x_k$ de l'espace ambiant de $V$ sont des fonctions holomorphes dans $E'$, nulles au point $a'$, qui définissent l'application canonique $\rho$ de $\mathcal{E}(V)$ dans le sous-ensemble $V$ de l'espace ambiant. Les fonctions transformées de $z, x_1,\ldots, x_k$ par l'homomorphisme $F$ sont holomorphes dans $E$, nulles au point $a$; elles appliquent $E$ dans la sous-variété $V$. Si on applique la condition (1) en y remplaçant successivement $f$ par $z, x_1,\ldots, x_k$, on trouve que l'application composée $\rho\circ\Phi$ est connue, et que c'est une application analytique. Ceci détermine sans ambiguïté la valeur de $\Phi$ aux points $b \in E$ tels que $\rho(\Phi(b))$ soit un point de $V$ où le discriminant $\Delta$ du polynôme $P$ est $\neq 0$. Or ces points sont ceux où la fonction $F(\Delta)$, qui est holomorphe et non identiquement nulle sur $E$, est nulle. Ainsi $\Phi$ est définie et analytique aux points $b$ de $E$ où $F(\Delta) \neq 0$; en ces points, (1) est alors vérifiée pour toute $f$ holomorphe sur $E'$ (voir n° 5).

Il reste à vérifier que $\Phi$ se prolonge par continuité aux autres points de $E$ (voisins de $a$), la relation (1) étant alors remplie par passage à la limite. Or la fonction $\rho\circ\Phi$ se prolonge par continuité; donc, si un point $b$ de $E$ tend vers $b_0$, $\Phi(b)$ ne peut avoir pour points d'accumulation que ceux de l'image réciproque $\rho^{-1}$ de $\rho(\Phi(b_0))$, qui sont en nombre fini. Il résulte du th. 6 de 12 (locale connexion) que $\Phi(b)$ a un limite. Ceci achève la démonstration.

4. Structure de l'anneau les fonctions holomorphes sur un germe d'espace analytique général.

Supposons ce germe défini par une équation

$$P(z; x_1,\ldots, x_k) = 0,$$

$P$ étant un polynôme distingué en $z$, irréductible à l'origine. Ainsi le germe $(E, a)$ est défini par l'espace $E = \mathcal{E}(V)$, $V$ désignant la sous-variété d'équation $P = 0$, et $a$ étant l'origine. Soit $p$ le degré du polynôme $P$.

L'anneau $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_k)$ des fonctions holomorphes à l'origine est un anneau d'intégrité; soit $K$ son corps des fractions (fonctions méromorphes à l'origine). Le polynôme irréductible $P(z)$, à coefficients dans $K$, permet de faire l'adjonction à $K$ d'une racine $\zeta$ de $P$: soit $K(\zeta)$ le corps ainsi obtenu. Dans ce corps on a la notion d'élément entier sur l'anneau $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_k)$: c'est un élément de $K(\zeta)$ qui est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_k)$, polynôme qu'on peut supposer irréductible parce que l'anneau $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_k)$ est factoriel (11, th. 1). Il est clair que $\zeta$ est un tel entier.

Les éléments de $K(\zeta)$ entiers sur $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_k)$ constituent un anneau d'intégrité $\mathcal{O}$, qui contient $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_k)$, et est intégralement clos (i.e., si un élément du corps des fractions, qui ici est $K(\zeta)$, est entier sur $\mathcal{O}$, il l'est déjà dans $\mathcal{O}$).

D'après un théorème classique, tout élément $\alpha \in \mathcal{O}$ a la forme $Q(\zeta)/P'(\zeta)$, où $Q$ est un polynôme de degré $p-1$ au plus, à coefficients dans $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_k)$; un tel $Q$ est unique.

Rappelons rapidement la démonstration: pour $\beta \in K(\zeta)$, soit $\mathrm{Tr}(\beta)$ la somme des conjugués de $\beta$ par rapport à $K$. Si $\alpha \in \mathcal{O}$, $\mathrm{Tr}(\zeta^h\alpha)$ est entier, donc est dans $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_k)$, soit $\mathrm{Tr}(\zeta^h\alpha) = u_h$ pour $h = 0, \ldots, p-1$. On a

$$\frac{P(z)}{z-\zeta} = z^{p-1} + b_1(\zeta)z^{p-2} + \cdots + b_{p-1}(\zeta) ,$$

les $b_i(\zeta)$ étant des polynômes de degrés $\leq p-1$, à coefficients dans $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_k)$. Dans cette relation, remplaçons $z$ successivement par $\zeta$ et ses conjugués, puis sommons; il vient

$$\alpha P'(\zeta) = u_{p-1} + b_1(\zeta)u_{p-2} + \cdots + b_{p-1}(\zeta) ,$$

et le second membre est un polynôme $Q(\zeta)$ de degré $\leq p-1$. L'unicité de $Q$ est évidente, car si $Q(\zeta) = 0$, $Q$ étant de degré $\leq p-1$, $Q$ est identiquement nul, puisque le polynôme minimal $P$ de $\zeta$ est de degré $p$.

Les éléments de $K(\zeta)$ qui ont la forme $\frac{Q(\zeta)}{P'(\zeta)}$ forment un module (libre) de type fini sur l'anneau noethérien $\mathcal{H}(x_1,\ldots, x_k)$. L'anneau $\mathcal{A}$ est un sous-module de ce module, donc est aussi un module de type fini sur $\mathcal{H}(x_1,\ldots, x_k)$. Tout sous-module de $\mathcal{A}$, comme module sur $\mathcal{H}(x_1,\ldots, x_k)$ est de type fini, et a fortiori est de type fini comme $\mathcal{A}$-module: ceci prouve que $\mathcal{A}$ est un anneau noethérien.

Théorème 2. L'anneau $\mathcal{A}$ précédemment défini est canoniquement isomorphe à l'anneau $A$ des fonctions holomorphes sur le germe d'espace analytique défini par l'équation $P(z, x_1,\ldots, x_k) = 0$ à l'origine.

Définissons une application $\alpha \to f_\alpha$ de l'anneau $\mathcal{A}$ dans l'anneau $A$: chaque $\alpha \in \mathcal{A}$ s'écrit $Q(\zeta)/P'(\zeta)$, $Q$ étant de degré $\leq p-1$; la fonction $Q(z)/P'(z)$ est holomorphe aux points réguliers de $\mathcal{E}(V)$ où $P'(z) \neq 0$, et elle se prolonge par continuité à tous les autres points de $\mathcal{E}(V)$. En effet, si $\alpha$ est racine d'un polynôme unitaire $R(\alpha)$, on a $R(Q(z)/P'(z)) = 0$ sur l'espace $\mathcal{E}(V)$, donc, lorsqu' un point $M$ de $\mathcal{E}(V)$ tend vers un point $M_0$, $Q(z)/P'(z)$ ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs d'accumulation; de là on conclut que $Q(z)/P'(z)$ a une limite, en vertu du th. 6 de 12. Ainsi $Q/P'$ définit une fonction holomorphe sur $\mathcal{E}(V)$ au voisinage de l'origine. C'est cette fonction $f_\alpha \in A$ que nous associerons à l'entier algébrique $\alpha \in \mathcal{A}$. On va montrer que l'application $\alpha \to f_\alpha$ est un isomorphisme de l'anneau $\mathcal{A}$ sur l'anneau $A$. Tout d'abord, cette application est évidemment $C$-linéaire. Elle est biunivoque, car si la fonction $Q(z)/P'(z)$ est identiquement nulle, $Q(z)$ est nul aux points où $P'(z) \neq 0$, points qui sont en nombre égal à $p$; donc les coefficients de $Q(z)$ sont nuls en tout point où le discriminant $\Delta(x_1,\ldots, x_k)$ est $\neq 0$, et aussi aux autres points par continuité. Il en résulte que l'élément $Q(\zeta)/P'(\zeta) = \alpha$ est nul. L'application $\alpha \to f_\alpha$ applique $\mathcal{A}$ sur $A$; en effet, un raisonnement analogue à celui du bas de la page 9 montre que toute fonction $f$ holomorphe sur $\mathcal{E}(V)$ satisfait à une relation de la forme $P'(z)f = Q(z)$, $Q$ etant un polynôme de degré $\leq p-1$, et à une relation

$R(f;\, x_1, \ldots, x_k) = 0$, $R$ étant un polynôme unitaire (voir prop.2, page 11). Enfin, l'application $\alpha \to f_\alpha$ est multiplicative: car si l'on a $f = Q_2(z)/Q_1(z)$ aux points où $Q_1(z) \neq 0$, on a $\alpha = Q_2(\zeta)/Q_1(\zeta)$ et réciproquement.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.

Remarque: l'isomorphisme de $\mathfrak{A}$ sur $A$ prouve que $A$, comme module sur le sous-anneau $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_k)$, est engendré par un nombre fini d'éléments, qu'on peut supposer nuls à l'origine. Tout élément de $A$ s'écrit donc comme fonction holomorphe $h(y_1, \ldots, y_m)$, $h$ étant une fonction de $m$ variables holomorphe à l'origine, et les $y_i$ étant des éléments de $A$ appartenant à l'idéal $I$ (noyau de l'homomorphisme $\varepsilon$; cf. ci-dessus, p. 6). Ainsi $A$ est isomorphe à un quotient de l'anneau des fonctions holomorphes (à l'origine) de $m$ variables, par un idéal $\mathfrak{p}$ qui est nécessairement premier (puisque $A$ est un anneau d'intégrité). Rappelons d'autre part que $A$ est intégralement clos.

5. Quelques compléments.

Au cours de la démonstration du théorème 2, p. 10, on a eu besoin du résultat suivant:

Proposition 2. Soit $V$ la sous-variété analytique d'équation

$P(z;\, x_1, \ldots, x_k) = 0$ ($P$ polynôme distingué à l'origine, de degré $p$.

Si $f$ est holomorphe sur $\mathcal{E}(V)$ au voisinage de l'origine, il existe un polynôme unitaire $R$, à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_k$, tel que $R(f) = 0$. De plus, le produit $P'(z)f$ est égal à un polynôme $Q(z)$ (à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_k$), de degré $\leq p-1$ en $z$.

Soit un point $(x_1, \ldots, x_k)$ voisin de l'origine, et tel que le discriminant $\Delta(x_1, \ldots, x_k)$ de $P(z)$ soit $\neq 0$. L'équation $P(z) = 0$ a alors $p$ racines distinctes, auxquelles correspondent $p$ valeurs de $f$. Les fonctions symétriques élémentaires de ces $p$ valeurs sont des fonctions holomorphes de $x_1, \ldots, x_k$, bornées, aux points où $\Delta \neq 0$; donc elles se prolongent aux points où $\Delta = 0$. Ainsi $f$ est racine d'un polynôme unitaire R à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_k$, et ceci démontre la première partie de la proposition.

De même, si un point $(x_1, \ldots, x_k)$ n'annule pas $\Delta$, considérons la somme des valeurs de $z^h f$ aux p points de V ayant ces coordonnées $x_1, \ldots, x_k$. Ce sont des fonctions $u_h(x_1, \ldots, x_k)$, holomorphes même aux points où $\Delta = 0$. En raisonnant comme au bas de la page 9, on en conclut que $P'(z)f$ est un polynôme $Q(z)$ de degré $\leq p-1$, à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_k$.

Nous sommes en mesure d'achever un raisonnement de la fin du n° 3: il s'agit de prouver que si la relation (1) $F(f) = f\circ\Phi$ est vérifiée lorsque f est l'une quelconque des fonctions $z, x_1, \ldots, x_k$, (1) est vérifiée pour toute fonction holomorphe sur $E' = \mathcal{E}(V)$, au voisinage du point a' pris pour origine. Or (1) est vérifiée si f est une fonction holomorphe de $x_1, \ldots, x_k$, puisque F est un isomorphisme pour les structures d'anneau analytique. Donc (1) est vraie si f est un polynôme en z, à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_k$. Soit maintenant f une fonction holomorphe quelconque sur le germe (E', a'). En vertu de la prop. 2 ci-dessus, on a $P'(z)f - Q(z) = 0$, Q étant un polynôme; puisque F est un homomorphisme d'anneaux, on a donc

$$F(P'(z))\cdot F(f) = F(Q(z)), \text{ d'où } F(P'(z))\cdot(F(f) - f\circ\Phi) = 0,$$

et comme l'anneau étudié est un anneau d'intégrité, on conclut bien

$$F(f) - f\circ\Phi = 0.$$

Remarque finale: avec les notations du th. 2, l'isomorphisme de A sur $\mathcal{A}$ définit sur $\mathcal{A}$ une structure d'anneau analytique. En fait, cette structure est entièrement déterminée par la structure d'anneau analytique du sous-anneau $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, formé des fonctions holomorphes en $x_1, \ldots, x_k$. En effet: tout d'abord, l'homomorphisme $\varepsilon$ est uniquement déterminé par la condition de s'annuler sur les éléments non inversibles de l'anneau $\mathcal{A}$. D'autre part, si on a des éléments $\alpha_i$ de $\mathcal{A}$, et si h est une fonction holomorphe au voisinage du point $(\varepsilon(\alpha_i))$, l'élément $h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$

est bien déterminé par la connaissance des $\alpha_i$; car, par division, on détermine un <u>polynôme</u> par rapport aux $\alpha_i$ (à coeff. holomorphes en $x_1, \ldots, x_k$) qui est égal, dans l'anneau $\mathcal{A}$, à $h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$: cela tient à ce que chaque $\alpha_i$ annule un polynôme unitaire à coeff. holomorphes en $x_1, \ldots, x_k$ (d'après la prop. 2).

6. <u>Un théorème fondamental sur les anneaux analytiques.</u>

Soit $A$ un anneau analytique (déf. 5, p. 6). Soit $I$ l'idéal des éléments non inversibles; pour tout sous-espace vectoriel $V$ de $I$ (il s'agit d'espace vectoriel sur le corps $C$ des scalaires), soit $[V]$ le sous-anneau analytique de $A$ engendré par $V$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $A$ qui s'écrivent comme fonction holomorphe d'éléments de $V$.

<u>Théorème</u> 3. Soit $A$ un anneau analytique jouissant de la propriété suivante: l'idéal $I$ contient un sous-espace vectoriel $V$ <u>de dimension finie</u>, tel que $A$ soit contenu dans la <u>clôture intégrale</u> du sous-anneau analytique $[V]$ engendré par $V$. Soit $\bar{A}$ cette clôture intégrale, qui est aussi la clôture intégrale de $A$. Alors la structure d'anneau analytique de $A$ se prolonge d'une seule manière en une structure d'anneau analytique sur $\bar{A}$, et il existe un germe d'espace analytique général $(E, a)$ tel que $\bar{A}$ soit isomorphe (comme anneau analytique) à l'anneau des fonctions holomorphes sur ce germe. Un tel germe est unique à une isomorphie près.

L'unicité du germe résulte du théorème 1. Pour démontrer son existence, introduisons la notion de sous-espace <u>générateur</u> $V$: un sous-espace vectoriel $V$ de l'idéal $I$ est dit générateur si $A$ est contenu dans l'anneau des entiers d'une extension algébrique finie de l'anneau $[V]$. Les hypothèses du th. 3 impliquent l'existence d'un sous-espace générateur de dimension finie. D'autre part, un sous-espace $V$ sera dit <u>analytiquement libre</u> si pour toute fonction holomorphe (a l'origine) $h$ telle que $h(a_1, \ldots, a_n) = 0$ dans $A$ (avec $a_i \in V$), les $a_i$ sont linéairement dépendants, ou bien $h$ est identiquement nulle. Montrons le

<u>Lemme</u>. Tout sous-espace générateur de dimension finie contient un sous-espace générateur analytiquement libre.

En effet, soit $V$ un sous-espace générateur de dimension finie. Si $V$ n'est pas analytiquement libre, il existe un système fini d'éléments $a_1,\ldots, a_n$, constituant une base de $V$, et une fonction $h$ de $n$ variables, holomorphe à l'origine et non identiquement nulle, telle que $h(a_1,\ldots, a_n) = 0$. D'après le théorème de Weierstrass (cf. prop. 4 et th. 1 bis de l'exposé 10), on peut choisir une autre base de $V$ (que nous appellerons encore $a_1,\ldots, a_n$), de manière que l'on ait une relation

$$P(a_n; a_1,\ldots, a_{n-1}) = 0,$$

$P$ étant un polynôme distingué en $a_n$ (à coefficients holomorphes en $a_1,\ldots, a_{n-1}$, appartenant tous, sauf celui de la plus haute puissance de $a_n$, à l'idéal $I$). Donc l'élément $a_n$ est entier algébrique sur l'anneau $[V']$, en notant $V'$ le sous-espace vectoriel de $I$ engendré par $a_1,\ldots, a_{n-1}$. Ainsi le sous-espace $V'$ est engendrant. Si $V'$ est analytiquement libre, le théorème est démontré; sinon, on recommence sur $V'$ ce qui a été fait sur $V$. Ces opérations ont une fin, car les dimensions des espaces vectoriels vont en décroissant. On arrive donc nécessairement à un sous-espace engendrant et analytiquement libre.

Le lemme étant ainsi prouvé, soit $(a_1,\ldots, a_k)$ une base d'un espace $V$ engendrant et analytiquement libre. Le sous-anneau $[V]$ est isomorphe à l'anneau $\mathcal{H}(x_1,\ldots, x_k)$, auquel nous l'identifierons. Ainsi $A$ est contenu dans l'anneau des entiers d'une extension algébrique finie de $\mathcal{H}(x_1,\ldots, x_k)$. D'après le "théorème de l'élément primitif," cette extension peut être obtenue par adjonction d'un unique élément $\zeta$, qu'on peut supposer dans $I$; $\zeta$ sera racine d'un polynôme irréductible $P(z)$, à coefficients dans $\mathcal{H}(x_1,\ldots, x_k)$; $P$ est un polynôme distingué.

On voit que la clôture intégrale $\bar{A}$ s'identifie à l'anneau noté $\mathcal{Q}$ au n° 4, anneau qui (en vertu du th. 2) est isomorphe à l'anneau des fonctions holomorphes sur le germe défini par l'équation

$$P(z; x_1,\ldots, x_k) = 0.$$

Cet isomorphisme de $\bar{A}$ sur $\mathcal{A}$ permet de transporter à $\bar{A}$ la structure d'<u>anneau analytique</u> de $\mathcal{A}$; elle prolonge la structure d'anneau analytique de $A$. C'est, sur $\bar{A}$, la seule structure d'anneau analytique prolongeant celle de $A$; car l'image de $A$ dans $\mathcal{A}$ contient le sous-anneau analytique $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_k)$, et on a vu (p. 12, "remarque finale") qu'il existe sur $\mathcal{A}$ une seule structure analytique prolongeant celle de $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_k)$.

Ainsi le théorème 3 est entièrement démontré.

On observera que l'entier $k$ est égal à la <u>dimension</u> du germe d'espace analytique associé à l'anneau $A$. C'est un invariant de l'anneau analytique $A$, analogue au "degré de transcendance" pour un anneau d'intégrité ordinaire.

<u>Corollaire du théorème</u> 3. Pour qu'un anneau analytique $A$ soit isomorphe à l'anneau (analytique) des fonctions holomorphes sur un germe d'espace analytique, il faut et il suffit que $A$ soit intégralement clos, et que l'idéal $I$ des éléments non inversibles contienne un sous-espace vectoriel $V$, de dimension finie, tel que $A = [V]$.

En effet, ces conditions sont suffisantes, en vertu du théorème 3; elle sont nécessaires, d'après la remarque finale du n° 4.

7. <u>Exemples simples de germes d'espaces analytiques</u>.

<u>Tous les germes de dimension un sont isomorphes</u>. En effet, un tel germe peut être défini par une équation $P(z; x) = 0$, $P$ étant un polynôme en $z$, distingué et irréductible. Soit $p$ le degré de $P$; il est immédiat que si l'on pose $x = y^p$, $z$ s'exprime comme fonction holomorphe $f(y)$ à l'origine. Si à la variable $y$ on associe le point $x = y^p$, $z = f(y)$, on définit un isomorphisme du germe défini par $C$ (variable $y$, au voisinage de l'origine) sur le germe défini, dans l'espace $(x, z)$, par l'équation $P(z; x) = 0$.

Le germe de <u>dimension</u> 2, défini par l'équation

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad \text{dans l'espace de 3 variables } x, y, z,$$

<u>n'est pas isomorphe</u> au germe défini par l'espace $C^2$ (avec l'origine pour

point privilégie). En effet, dans la représentation paramétrique classique $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$, chaque point du germe (sauf l'origine) est obtenu deux fois, pour $(u, v)$ et pour $(-u, -v)$. Ceci met en évidence une propriète topologique du germe muni de son point privilégie (l'origine $x = y = z = 0$): si on enlève le point privilégié, le groupe d'homologie de dimension un a un élément non nul d'ordre 2. Or cette propriété topologique n'appartient pas à l'espace $C^2$ privé de l'origine. A côté de cette démonstration topologique, en voici une algébrique, qui consiste à montrer que l'anneau $A$ des fonctions holomorphes sur le germe $z^2 = x^2 + y^2$ n'est pas isomorphe (comme anneau analytique) à l'anneau $\mathcal{H}(u', v')$ des fonctions holomorphes de deux variables au voisinage de l'origine. En effet, par la représentation paramétrique, les fonctions holomorphes sur le germe s'expriment comme fonctions holomorphes de $u$ et $v$, invariantes par symétrie; $A$ est donc isomorphe au sous-anneau (analytique) de $\mathcal{H}(u, v)$, formé des séries convergentes dont tous les termes sont de degré pair. Ce sous-anneau n'est pas analytiquement isomorphe à $\mathcal{H}(u', v')$, sinon il serait analytiquement engendré par 2 éléments; en particulier, tout polynôme homogène de degré 2 en $u$ et $v$ serait combinaison linéaire de 2 tels polynômes, ce qui est absurde, puisque les polynômes homogènes de degré 2 forment un espace vectoriel ayant une base formée de 3 éléments $u^2$, $uv$, $v^2$.

Note. Les questions abordées dans cet Exposé 13, ainsi que dans le suivant, étaient loin d'avoir atteint un état satisfaisant lorsque ce Séminaire a été fait en 1952. Ces questions sont d'ailleurs reprises dans le Séminaire 1953-54, sous une forme qu'on espère meilleure.