JEAN FRENKEL

Préliminaires à l'étude de l'anneau des fonctions analytiques à l'origine

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. n° 10, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A10_0>

PRELIMINAIRES A L'ETUDE
DE L'ANNEAU DES FONCTIONS ANALYTIQUES A L'ORIGINE
(d'après un exposé de Frenkel, 11-2-1952)

Cet exposé est consacré essentiellement au "Vorbereitungssatz" de Weierstrass, sous la forme que lui a donnée Späth, Journal de Crelle, 161 (1929), p. 95-100. On pourra consulter le livre de Bochner et Martin, Ch. IX (1932), t. 107.

1. Séries formelles.

Nous supposons connus les éléments de la théorie des séries formelles (Voir par ex. Bourbaki, Alg. Chap. IV). On notera ici $\mathcal{F}(x_1,\dots,x_n;\ \mathfrak{a})$ l'anneau des séries formelles en $x_1,\dots,x_n$ a coefficients dans un anneau $\mathfrak{a}$ (commutatif avec élément-unité). Toute série formelle peut s'écrire $\Sigma_{p\geq 0} A_p$, où A_p est un polynôme homogène en $x_1,\dots,x_n$ de degré p; A_0 s'appelle le "terme constant" de la série formelle A. On dit que A est d'ordre $\geq k$ si $A_p = 0$ pour $p < k$, d'ordre k si en outre $A_k \neq 0$. Pour que A soit inversible, il faut et il suffit que A_0 soit inversible dans $\mathfrak{a}$.

Si $\mathfrak{a}$ est un anneau d'intégrité, il en est de même de $\mathcal{F}(x_1,\dots,x_n;\ \mathfrak{a})$ En outre, l'ordre du produit de 2 elements $\neq 0$ est egal a la somme des ordres des facteurs.

On s'intéresse au cas où $\mathfrak{a}$ est un corps K; $\mathcal{F}(x_1,\dots,x_n;\ K)$ est un anneau d'intégrité. On a un isomorphisme canonique

$$F(x_1,\dots,x_n;\ K) \approx \mathcal{F}(x_n;\ \mathcal{F}(x_1,\dots,x_{n-1};\ K)).$$

Dans $\mathcal{F}(x_1,\dots,x_n;\ K)$, les éléments non-inversibles sont les éléments d'ordre ≥ 1; ils forment un idéal I (plus grand idéal non trivial). Les éléments de I^p sont les éléments d'ordre $\geq p$; l'intersection des I^p est réduite à $\{0\}$. Les I^p forment un système fondamental de voisinage de 0 dans une topologie (séparée); c'est la topologie "de la convergence simple" des coefficients, quand on munit K de la topologie discrète.

Dans le "théorème de préparation" (Vorbereitungssatz), on fait jouer un rôle particulier à l'une des variables, x_n par exemple (notée alors z). On se place donc dans l'anneau $\mathcal{F}(z;\ \mathfrak{a})$, avec $\mathfrak{a} = \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_{n-1};\ K)$. L'anneau $\mathfrak{a}$ remplit les conditions suivantes:

(I). $\mathfrak{a}$ <u>est un anneau d'intégrité; les éléments non-inversibles de</u> $\mathfrak{a}$ <u>forment un idéal</u> I; <u>l'intersection des</u> I^p <u>est</u> $\{0\}$; <u>l'anneau</u> $\mathfrak{a}$ <u>est complet pour la topologie définie par les</u> I^p (i.e., pour toute famille d'éléments $a_p \in \mathfrak{a}$, telle que $a_p \in I^p$, il existe un $a \in \mathfrak{a}$, nécessairement unique, tel que $a - \Sigma_{p<k}\, a_p \in I^k$ pour tout k; cet élément a se note $\Sigma_p\, a_p$).

2. <u>Le théorème de préparation abstrait.</u>

Dans tout ce numéro, nous considérons l'anneau $\mathcal{F}(z;\ \mathfrak{a})$ des séries formelles à une variable z, à coefficients dans un anneau $\mathfrak{a}$ <u>qui satisfait aux conditions</u> (I).

<u>Théorème</u> 1. <u>Soit donné un élément</u> $B(z) \in \mathcal{F}(z;\ \mathfrak{a})$:

$$B(z) = \sum_{k \geq 0} b_k z^k \qquad (b_k \in \mathfrak{a}),$$

<u>dont un coefficient au moins soit inversible</u> (<u>dans</u> $\mathfrak{a}$). <u>Soit</u> p <u>le plus petit des entiers</u> k <u>tels que</u> b_k <u>soit inversible</u>. <u>Alors, pour tout</u> $A(z) \in \mathcal{F}(z;\ \mathfrak{a})$ <u>existe un</u> $Q(z) \in \mathcal{F}(z;\ \mathfrak{a})$ <u>et un polynôme</u> $R(z)$ <u>de degré</u> $\leq p - 1$ <u>à coefficients dans</u> $\mathfrak{a}$, <u>tels que</u>

(1) $$A(z) = B(z)Q(z) + R(z) \qquad \text{(identité de la division).}$$

<u>En outre, il n'y a qu'un seul couple</u> (Q, R) <u>satisfaisant à ces conditions</u>.

<u>Démonstration</u>: on transforme d'abord le problème. Posons

$$B_1(z) = \sum_{0 \leq k < p} b_k z^k, \quad B_2(z) = \sum_{k \geq p} b_k z^{k-p} .$$

$B_2(z)$ possède un inverse dans $\mathcal{F}(z;\ \mathfrak{a})$; on a

$$B(z) = B_2(z)(z^p - C(z)) ,$$

où $C(z) = -B_1(z)/B_2(z)$ <u>a tous ses coefficients dans</u> I. Au lieu de $Q(z)$, prenons comme inconnue $S(z) = B_2(z)Q(z)$; la condition (1) devient

(2) $A(z) - (z^p - C(z))\cdot S(z)$ est un polynôme de degré $\leq p-1$.

On veut montrer que, $C(z)$ et $A(z)$ étant donnés, il existe un $S(z)$ et un seul satisfaisant à (2).

<u>Unicité</u>: si $S(z)$ est tel que $(z^p - C(z))\cdot S(z)$ soit un polynôme de degré $\leq p-1$, alors $S(z) = 0$. Car si tous les coefficients de $S(z)$ sont dans I^k, ils sont dans I^{k+1}: en effet, soit s_i l'un d'eux, et écrivons que le coefficient de z^{p+i} dans $(z^p - C(z))\cdot S(z)$ est nul; on trouve que $s_i \in I^{k+1}$.

<u>Existence</u>: on cherche des séries formelles $S^0(z)$, $S^1(z),\dots,$ $S^k(z),\dots$ satisfaisant aux relations

$$(3)\quad \begin{cases} z^pS^0(z) - A(z) & \text{est un polynôme de degré } p-1, \\ z^pS^{k+1}(z) - C(z)S^k(z) & \text{est un polynôme de degre } p-1, \text{ pour tout } k \geq 0. \end{cases}$$

Posons $A(z) = \Sigma_h\, a_h z^h$, $C(z) = \Sigma_h c_h z^h$, $S^k(z) = \Sigma_h\, s_h^k z^h$; les a_h et c_h sont donnés (et $c_h \in I$), les s_h^k sont des inconnues. Les relations (3) se résolvent comme suit:

$$(4)\qquad s_h^0 = a_{p+h}\ , \qquad s_h^{k+1} = \sum_{0\leq i\leq p+h} c_i s^k_{p-h-i} \quad \text{pour } k \geq 0.$$

Pour chaque h, on a $s_h^k \in I^k$ (vérification par récurrence sur k). On peut donc former $\Sigma_{k\geq 0}\, s_h^k = s_h$. Alors

$$S(z) = \sum_{h\geq 0} s_h z^h$$

satisfait à (2). Et le théorème est démontré.

<u>Remarque</u>: si on explicite les formules (4), on voit que chaque s_h^k est combinaison linéaire d'une nombre fini de a_i, avec des coefficients qui sont connus quand $C(z)$ est donné, c'est-à-dire quand le diviseur $B(z)$ est donné.

<u>Définition</u>. On appelle <u>polynôme distingué</u> (de degré p) un polynôme

$$z^p + \sum_{0\leq k<p} b_k z^k, \quad \text{où les } b_k \in I.$$

Si un polynôme $B(z)$ est distingué de degré p, il satisfait à l'hypothèse du théorème de préparation. Réciproquement:

Théorème 2. Toute série formelle $B(z)$ qui satisfait à l'hypothèse du théor. 1 est équivalente à un polynôme distingué. ("Équivalent" signifie qu'il n'en diffère que par un facteur inversible.)

En effet, dans le th. 1, prenons $A(z) = z^p$; il vient

$$z^p - R(z) = B(z)Q(z) .$$

Les coefficients de $R(z)$ sont dans I, parce que ceux de $B(z)$ sont dans I pour tout degré $\leq p-1$; donc le premier membre est un polynôme distingué. De plus, $Q(z)$ est inversible dans $\mathcal{F}(z; \mathfrak{a})$; il suffit de montrer que son terme constant q_0 est inversible dans $\mathfrak{a}$; or le produit $q_0 b_p$ a la forme $1 + u$, où $u \in I$, donc possède un inverse dans $\mathfrak{a}$.

C.Q.F.D.

Remarque: deux polynômes distingués de degrés différents ne sont jamais équivalents; deux polynômes distingués de même degré ne sont équivalents que s'ils sont identiques.

Le théorème 2 ramène, en principe, le problème de la division au cas où le diviseur est un polynôme distingué.

Nous énonçons deux propositions dont la démonstration est laissée au lecteur:

Proposition 1. Si $B(z)$ est un polynôme distingué, et $A(z)$ un polynôme quelconque, la relation (1) n'est autre que l'identité de la division des polynômes (à coefficients dans un anneau $\mathfrak{a}$, lorsque le diviseur est un polynôme "unitaire"); en particulier, $Q(z)$ est un polynôme. Si de plus le dividende $A(z)$ est un polynôme distingué, le quotient $Q(z)$ est un polynôme distingué.

Proposition 2. Toute série formelle qui divise un polynôme distingue est équivalente à un polynôme distingué; si un polynôme distingué $A(z)$ est le produit de deux séries formelles, il est aussi le produit des polynômes distingués respectivement équivalents à ces séries formelles.

3. Le théorème de préparation pour les séries formelles à n variables.

Tous les résultats du n° 2 s'appliquent au cas où $\mathfrak{a} = \mathcal{F}(x_1,\ldots, x_{n-1}; K)$. De plus, pour que $B(x_1,\ldots, x_{n-1}, z) \in \mathcal{F}(x_1,\ldots, x_{n-1}, z; K)$ satisfasse à la condition du théorème 1, il faut et il suffit que B contienne un terme de la forme $a_{0\ldots op}z^p$ dont le coefficient $a_{0\ldots op} \in K$ soit $\neq 0$.

Proposition 3. Etant donné un diviseur $B(x_1,\ldots, x_{n-1}, z)$ qui satisfait à cette condition, l'application K-linéaire

$$A(x_1,\ldots, x_{n-1}, z) \to Q(x_1,\ldots, x_{n-1}, z)$$

qui associe à tout dividende A le "quotient" Q de l'identité (1), est continue pour la topologie de la convergence simple des coefficients, et cela quel que soit le corps topologique K (pas seulement lorsque K est muni de la topologie discrète).

Il suffit de démontrer la même propriété pour l'application $A \to S$ de la démonstration du théorème 1. Or chaque coefficient de $S(x_1,\ldots, x_{n-1}, z)$ ne fait intervenir que les coefficients d'un nombre fini d'éléments $s_h^k \in \mathcal{F}(x_1,\ldots, x_{n-1}; K)$; d'autre part, chaque s_h^k est combinaison linéaire d'un nombre fini de coefficients a_i (cf. la remarque suivant le th. 1). D'où le résultat.

Proposition 4. Lorsque le corps K est infini, on peut, pour chaque élément non nul $B(x_1,\ldots, x_n) \in \mathcal{F}(x_1,\ldots, x_n; K)$, faire une substitution linéaire sur les variables x_i, de manière à se ramener au cas où B satisfait à la condition du th. 1 (pour la variable $z = x_n$); et alors B est équivalent à un polynôme distingué.

En effet, soit $B = \Sigma_{k\geq 0} B_k$, B_k polynôme homogène de degré k. Supposons $B_p \neq 0$, $B_k = 0$ pour $k < p$. On peut donner aux x_i des valeurs $a_i \in K$ telles que l'élement $B_p(a_1,\ldots, a_n) \in K$ soit $\neq 0$. Par une substitution linéaire sur les x_i, on peut transformer le point $(a_1,\ldots, a_n)$ en $(0,\ldots, 0, 1)$; alors $B_p(0, \ldots, 0, x_n)$ n'est pas identiquement nul, donc B_p contient un terme $\lambda(x_n)^p$, avec un coefficient $\lambda \neq 0$.

Remarque: étant donné un nombre fini d'éléments non nuls $B_i(x_1, \ldots, x_n)$, on peut faire une substitution linéaire sur les variables de manière que chacun des B_i satisfasse à la condition du théorème 1 (il suffit de considérer le produit des B_i).

4. Séries convergentes.

K désigne désormais un corps valué complet, non discret (K est alors infini).

Etant donné une série formelle $\Sigma\, a_{k_1 \ldots k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ à coefficients $a_{k_1 \ldots k_n}$ dans K, on donnera aux variables x_i des valeurs dans K. Le "domaine de convergence" D de la série est défini comme suit:

Dans l'espace des n variables réelles $r_i \geq 0$, on considère l'intérieur (éventuellement vide) Ω de l'ensemble des points (r_i) tels que

$$\Sigma\, |a_{k_1 \ldots k_n}|\, r_1^{k_1} \ldots r_n^{k_n} < +\infty .$$

Le domaine de convergence $D \subset K^n$ se compose des points (x_i) tels que $(|x_1|, \ldots, |x_n|) \in \Omega$. La série converge normalement au voisinage de tout point de D; elle diverge en tout point extérieur à D.

Les séries formelles pour lesquelles D n'est pas vide forment un sous-anneau $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n; K)$ de $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n; K)$; on les appelle les séries convergentes, ou fonctions analytiques à l'origine (ou fonctions holomorphes à l'origine, lorsque le corps K est le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$). D, s'il n'est pas vide, se compose des $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que le point $\xi_i = \log |x_i|$ appartienne à un certain domaine Δ de $\mathbf{R}^n$; on montre que Δ est convexe et contient tous les points dont les coordonnées sont inférieures à un nombre convenable.

Soit $A \in \mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n; K)$. Lorsque $(x_1, \ldots, x_n)$ appartient au domaine de convergence de A, on notera $A(x_1, \ldots, x_n)$ la somme de la série (élément du corps K). Pour tout système de nombres $r_i \geq 0$, on notera $\overline{A}(r_1, \ldots, r_n)$ la somme (finie ou infinie) de la "série majorante"

$$\Sigma\, |a_{k_1 \ldots k_n}|\, r_1^{k_1} \ldots r_n^{k_n} .$$

Si $r_i = |x_i|$, $(x_1, \ldots, x_n)$ étant dans le domaine de convergence, on a

$$|A(x_1, \ldots, x_n| \leq \overline{A}(|x_1|, \ldots, |x_n|) < +\infty .$$

Etant donnés des nombres $r_1, \ldots, r_n$, strictement positifs, considérons le sous-anneau de $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n; K)$ formé des séries A telles que $\overline{A}(r_1, \ldots, r_n) < +\infty$; alors l'application $A \to \overline{A}(r_1, \ldots, r_n)$ est une norme dans cet anneau, considéré comme algèbre sur le corps valué K. (Cette algèbre normée n'est pas complète.)

L'anneau $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n; K)$ est la réunion des sous-anneaux correspondant à tous les systèmes $(r_1, \ldots, r_n)$ de nombres > 0.

La considération des séries majorantes permet classiquement de montrer: si, dans une série $A \in \mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n; K)$, on substitue à $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathcal{H}(y_1, \ldots, y_p; K)$ qui s'annulent à l'origine, la série formelle en $y_1, \ldots, y_p$ que l'on obtient est une série convergente. En particulier tout élément de $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n; K)$ qui ne s'annule pas à l'origine, possède un inverse dans $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n; K)$.

Remarque utile pour la suite: soit $A \in \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_{n-1}, z; K)$, identifié à une série formelle $\sum_p a_p z^p$ à coefficients $a_p \in \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_{n-1}; K)$. On a évidemment

$$\overline{A}(r_1, \ldots, r_{n-1}, \rho) = \sum_p \overline{a}_p(r_1, \ldots, r_{n-1})\rho^p .$$

5. Le théorème de préparation pour les séries convergentes.

On se place dans les conditions du théorème 1, avec $\mathfrak{a} = \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_{n-1}; K)$, K étant un corps valué complet non discret.

Théorème 1 bis. Si A et B appartiennent non seulement à $\mathcal{F}(z; \mathfrak{a}) \approx \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_{n-1}, z; K)$, mais au sous-anneau $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_{n-1}, z; K)$, alors, dans la relation (1), Q et R appartiennent aussi à l'anneau $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_{n-1}, z; K)$.

Avant de démontrer ce théorème, observons qu'on en déduit aussitôt:

Théorème 2 bis. Tout élément $B \in \mathcal{H}(x_1, \ldots, x_{n-1}, z; K)$ tel que $B(0, \ldots, 0, z) \neq 0$ est égal au produit d'un polynôme distingué (dont les coefficients appartiennent à $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_{n-1}; K)$, par un élément inversible de $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_{n-1}, z; K)$.

Démonstration du théorème 1 bis: il suffit de prouver que Q est dans $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_{n-1}, z; K)$. Comme Q ne diffère de S (notations du th. 1) que par un élément inversible de $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_{n-1}, z; K)$, il suffit de prouver que S est dans $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_{n-1}, z; K)$. Introduisons les notations

$$\alpha(r, \rho) = \overline{A}(r, \ldots, r, \rho), \quad \gamma(r, \rho) = \overline{C}(r, \ldots, r, \rho),$$
$$\sigma(r, \rho) = \overline{S}(r, \ldots, r, \rho) \;,$$

(il s'agit des séries majorantes de A, C, et S). Par hypothèse, C est dans $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_{n-1}, z; K)$; donc $\gamma(r, \rho)$ est fini pour un r et un $\rho > 0$ convenables. En multipliant les variables par des constantes convenables, on se ramène au cas où $\gamma(1, 1)$ est fini. On utilisera un lemme:

Lemme: étant donné ρ tel que $0 < \rho < 1$, choisissons $r > 0$ de manière que

$$(5) \qquad r\gamma(1, 1) < \rho^p(1 - \rho)$$

(p a la même signification que dans le th. 1). Alors, pour $0 < \rho' < \rho$,

$$(6) \qquad \sigma(r, \rho') \leq \alpha(r, \rho)\cdot(1 - \rho'/\rho)^{-1}\cdot\left(1 - \frac{r\gamma(1, 1)}{\rho^p(1-\rho)}\right)^{-1} \frac{1}{\rho^p} \;.$$

Il est clair que si A est analytique, on peut choisir r et ρ satisfaisant à (5) de manière que $\alpha(r, \rho)$ soit fini; (6) montre que $\sigma(r, \rho')$ sera fini pour tout $\rho' < \rho$. Donc S sera analytique, et on voit même que la série S convergera dons un voisinage fixe de l'origine, ne dépendant que du domaine de convergence de A (une fois C donné).

Reste à prouver le lemme. Avec les notations du th. 1, on a

$$A(z) = \sum_{h \geq 0} a_h z^h, \qquad C(z) = \sum_{i \geq 0} c_i z^i \;.$$

Les séries majorantes $\overline{a_h}$ et $\overline{c_i}$ satisfont évidemment à

$$\overline{a_h}(r, \ldots, r)\rho^h \leq \alpha(r, \rho),$$
$$\overline{c_i}(1, \ldots, 1) \leq \gamma(1, 1);$$

d'où, puisque les c_i sont sans terme constant,

$$\overline{c_i}(r, \ldots, r) \leq r\gamma(1, 1), \quad (\text{si } r \leq 1).$$

Alors les relations (4) donnent facilement, par récurrence sur k (et compte tenu de $\rho < 1$):

$$\overline{s_h^k}(r,\ldots, r) \leq \frac{\alpha(r, \rho)}{\rho^{p+h}} \cdot\left(\frac{r\gamma(1, 1)}{\rho^p(1-\rho)} \right)^k, \text{ d'où, en vertu de (5),}$$

$$\overline{s_h}(r,\ldots, r) \leq \sum_{k \geq 0} \overline{s_h^k}(r,\ldots, r) \leq \frac{\alpha(r, \rho)}{\rho^{p+h}} \cdot\left(1 - \frac{r\gamma(1, 1)}{\rho^p(1-\rho)} \right)^{-1} ;$$

et comme

$$\sigma(r, \rho') = \sum_{k \geq 0} \overline{s_h}(r,\ldots, r)\rho'^h ,$$

on obtient la relation (6).

6. Cas du corps complexe $\mathbf{C}$.

Une première circonstance particulière provient des classiques inégalités de Cauchy, qui majorent les coefficients d'une série entière à l'aide de la somme de cette série. On en déduit ceci: dès qu'on sait majorer $|A(x_1,\ldots, x_n)|$ pour $|x_i| \leq r_i$, on sait majorer la série majorante $\overline{A}(\rho_1,\ldots, \rho_n)$ pour $\rho_i < r_i$.

D'autre part, l'usage de l'intégrale de Cauchy permet de donner d'autres démonstrations des théorèmes 1 bis et 2 bis. On prouve d'abord le théorème 2 bis comme suit (Weierstrass): soit $B(x_1,\ldots, x_{n-1}, z)$ holomorphe au voisinage de l'origine, $B(0,\ldots, 0, z)$ n'étant pas identiquement nulle. Soit $\rho > 0$ tel que $B(0,\ldots, 0, z) \neq 0$ pour $0 < |z| \leq \rho$; puis soient $r_i > 0$ assez petits pour que $B(x_1,\ldots, x_{n-1}, z)$ soit holomorphe et $\neq 0$ pour $|x_i| \leq r_i$, $|z| = \rho$. (On convient, une fois pour toutes, de dire qu'une fonction est holomorphe sur un ensemble compact si elle l'est dans un voisinage de cet ensemble compact.) L'intégrale de Cauchy montre alors que, pour $|x_i| \leq r_i$, la fonction $B(x_1,\ldots, x_{n-1}, z)$, comme fonction de la variable complexe z, a exactement p zéros dans le cercle $|z| \leq \rho$ (p désignant l'ordre de multiplicité de l'unique racine $z = 0$ de $B(0,\ldots, 0, z)$). Puis des intégrales classiques montrent que les fonctions symétriques élémentaires de ces p racines sont des fonctions holomorphes de $x_1,\ldots, x_{n-1}$ pour $|x_i| \leq r_i$. D'où un polynôme distingué $P(z;\, x_1,\ldots,x_{n-1})$ admettant ces p racines. On montre enfin que le quotient B/P est holomorphe et $\neq 0$ pour $|x_i| \leq r_i$ et $|z| \leq \rho$.

Pour le théorème 1 bis, on le démontre en supposant que B soit un polynôme distingué en z. On obtient alors une précision au sujet des domaines de convergence de Q et R (cf. H. Cartan, Ann. Ec. Norm., 1944; voir l'Appendice de ce mémoire):

Proposition 5. Soit $B(z;\, x_1,\ldots, x_{n-1})$ un polynôme en z, de degré p, à coefficients holomorphes en $x_1,\ldots, x_{n-1}$ pour $|x_i| \leq r_i$; supposons que toutes ses racines soient dans $|z| < \rho$ chaque fois que $|x_i| \leq r_i$. Alors, si $A(x_1,\ldots, x_{n-1}, z)$ est holomorphe sur

$$(\Delta) \qquad |x_i| \leq r_i, \qquad |z| \leq \rho ,$$

on a une identité $A = BQ + R$, où Q et R sont holomorphes sur Δ, R étant un polynôme en z de degré $\leq p - 1$. En outre, il existe une constante λ (ne dépendant que de B) telle que l'on ait dans Δ

$|Q| \leq \lambda\alpha$, α désignant la borne sup. de $|A|$ dans Δ .

Démonstration: l'unicité de Q et R est évidente. Pour l'existence, posons a priori

$$Q(x_i,\, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta| = r} \frac{A(x,\zeta)}{B(x,\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \qquad (|x_i| \leq r_i),$$

où $r > \rho$ est choisi de manière que $A(x,\, z)$ (et $B(x,\, z)$) soient holomorphes pour $|x_i| \leq r_i$, $|z| \leq r$. La valeur de l'intégrale ne dépend pas de r; c'est une fonction holomorphe dans Δ. Puis posons

$$R(x_i,\, z) = A(x_i,\, z) - B(x_i,\, z)Q(x_i,\, z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta| = r} \frac{A(x,\zeta)}{B(x,\zeta)} \frac{B(x,\zeta) - B(x,z)}{\zeta - z}\, d\zeta .$$

Or

$$\frac{B(x_i,\, \zeta) - B(x_i,\, z)}{\zeta - z} = \sum_{0 \leq k < p} z^k\, b_k(x_i,\, \zeta),$$

d'où

$$R(x_i,\, z) = \sum_{0 \leq k < p} z^k \cdot \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta| = r} \frac{A(x_i,\, \zeta)}{B(x_i,\, \zeta)}\, b_k(x_i,\, \zeta)\, d\zeta \quad ,$$

et l'on peut ici faire $r = \rho$. Les coefficients de ce polynôme en z sont bien des fonctions holomorphes des x_i pour $|x_i| \leq r_i$, majorées par $\mu\alpha$ (μ constante convenable, $\alpha = \sup|A|$ dans Δ). Alors

$$Q = \frac{A - R}{B}$$

est majoré par $\lambda\alpha$ pour $|x_i| \leq r_i$, $|z| = \rho$ (λ constante convenable). D'après le principe du module maximum, cette majoration vaut aussi dans Δ.