Séminaire Henri Cartan

H. Cartan

Homologie des groupes. IV : homomorphismes de Π-complexes, applications

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. n° 4, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A4_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1950-1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire H. CARTAN,
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique.

HOMOLOGIE DES GROUPES. IV : Homomorphismes
de π-complexes, applications.
(Exposé de H. CARTAN, le 11.12.1950)

1.- Homomorphismes d'un complexe π-libre dans un complexe acyclique.-

Théorème.- Si C et C' sont deux π-complexes, dont le premier C est π-libre, et le second C' acyclique, il existe un homomorphisme permis de C dans C'. Si en outre f et g sont deux homomorphismes permis de C dans C', f et g sont homotopes.

D'abord, la définition d'un homomorphisme permis : un homomorphisme d'un π-complexe C dans un π-complexe C' est permis s'il est compatible avec les opérateurs de π , conserve les degrés est compatible avec les opérateurs "bord" d et d' , ainsi qu'avec les augmentations ε et ε' . Autrement dit, c'est une collection de π-homomorphismes f_o , f_1 , ... , donnant lieu à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longleftarrow & Z & \xleftarrow{\varepsilon} & C_o & \xleftarrow{d_1} & C_1 & \xleftarrow{d_2} & C_2 & \cdots & \xleftarrow{d_q} & C_q & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow f_o & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & & \downarrow f_q & \\
0 & \longleftarrow & Z & \xleftarrow{\varepsilon'} & C'_o & \xleftarrow{d'_1} & C'_1 & \xleftarrow{d'_2} & C'_2 & \cdots & \xleftarrow{d'_q} & C'_q & \cdots
\end{array}$$

où l'homomorphisme vertical $Z \longrightarrow Z$ est l'application identique.

Nous allons montrer l'existence d'un tel homomorphisme f lorsque C est π-libre et C' acyclique ; puis nous définirons la notion d'homomorphismes homotopes et établirons alors la deuxième partie de l'énoncé du théorème.

Existence de f : l'homomorphisme $C_o \longrightarrow Z$ applique C_o dans un quotient de C'_o (puisque $C'_o \longrightarrow Z$ est sur) ; comme C_o est π-libre, cet homomorphisme se factorise en $C_o \longrightarrow C'_o \longrightarrow Z$. Ceci définit f_o .

f_o étant ainsi choisi, $f_o d_1$ applique C_1 dans C'_o , et plus précisément dans le noyau de $C'_o \longrightarrow Z$ (puisque, dans la première ligne du diagramme, le composé de 2 homomorphismes consécutifs est nul). Comme la seconde suite horizontale est exacte, l'homomorphisme $C_1 \longrightarrow C'_o$ envoie C_1 dans un quotient de C'_1 , et puisque C_1 est π-libre, il se factorise en $C_1 \longrightarrow C'_1 \longrightarrow C'_o$. Ceci définit f_1 . On pourra ainsi, de proche en proche, choisir f_2 , f_3 , etc. . Ceci démontre la première partie du théorème.

Soient f et g deux homomorphismes permis d'un π-complexe C dans un π-complexe C'. On dit que f et g sont <u>homotopes</u> s'il existe un π-homomorphisme k de C dans C', qui augmente le degré de <u>un</u>, et est tel que

$$(1) \qquad f - g = d'k + kd \quad .$$

Nous allons montrer que si C est π-libre, et C' acyclique, un tel homomorphisme k existe toujours. La recherche de k revient à celle de π-homomorphismes $k_o : C_o \longrightarrow C'_1$, $k_1 : C_1 \longrightarrow C'_2$, etc: , tels que

$$f_o - g_o = d'_1 k_o \quad , \qquad f_1 - g_1 = d'_2 k_1 + k_o d_1 \quad , \quad \text{etc.}$$

On va montrer la possibilité de définir, de proche en proche, k_o, k_1, ...

D'abord, $f_o - g_o$ applique C_o dans le noyau de $C'_o \longrightarrow Z$, donc dans l'image de $C'_1 \longrightarrow C'_o$; comme C_o est π-libre, on peut factoriser l'homomorphisme $C_o \longrightarrow C'_o$ en $k_o : C_o \longrightarrow C'_1$ et $d'_1 : C'_1 \longrightarrow C'_o$. Une fois k_o ainsi choisi, on va chercher k_1 de manière que

$$(2) \qquad d'_2 k_1 = f_1 - g_1 - k_o d_1 \quad .$$

Pour cela, on observe d'abord que $d'_1(f_1 - g_1) = (f_o - g_o) d_1$, puisque f et g sont des homomorphismes permis. Remplaçant $f_o - g_o$ par $d'_1 k_o$, on trouve $d'_1(f_1 - g_1 - k_o d_1) = 0$. L'homomorphisme $f_1 - g_1 - k_o d_1$ applique donc C_1 dans le noyau de $C'_1 \longrightarrow C'_o$, c'est-à-dire dans l'image de $C'_2 \longrightarrow C'_1$; et comme C_1 est π-libre, on peut factoriser $C_1 \longrightarrow C'_1$ en $k_1 : C_1 \longrightarrow C'_2$ et $d'_2 : C'_2 \longrightarrow C'_1$. Ceci démontre (2) .

On pourra continuer ainsi de proche en proche. Le théorème est donc complètement démontré.

<u>Corollaire</u>.- <u>Soient</u> C <u>et</u> C' <u>deux</u> π-<u>complexes. Si</u> C <u>est</u> π-<u>libre</u> <u>et</u> C' <u>acyclique, alors, pour tout groupe abélien</u> A <u>où</u> π <u>opère à droite, on a un homomorphisme, déterminé de manière unique,</u>

$$H_q(A \otimes_\pi C) \longrightarrow H_q(A \otimes_\pi C') \ .$$

<u>De même, pour tout groupe abélien</u> A <u>où</u> π <u>opère à gauche, on a un homomorphisme, déterminé de manière unique,</u>

$$H^q(\mathrm{Hom}_\pi(C', A)) \longrightarrow H^q(\mathrm{Hom}_\pi(C , A) \ .$$

(Ces homomorphismes sont définis par n'importe quel homomorphisme permis de C dans C'; deux homomorphismes permis définissent le même homomorphisme, parce qu'ils sont homotopes).

2.- <u>Première application</u> : <u>où l'on retrouve les théorèmes d'unicité du premier exposé</u>.

Soient C et C' deux π-complexes, π-libres et acycliques. Soit f un homomorphisme permis de C dans C', et f' un homomorphisme permis de C' dans C. Le composé $f'f$ est un homomorphisme permis de C dans C ; il est donc homotope à l'application identique. Si π opère à droite dans A, f et f' définissent des homomorphismes

$$H_q(A \underset{\pi}{\otimes} C) \longrightarrow H_q(A \underset{\pi}{\otimes} C') \quad \text{et} \quad H_q(A \underset{\pi}{\otimes} C') \longrightarrow H_q(A \underset{\pi}{\otimes} C) \quad ,$$

d'ailleurs indépendants du choix de f et de f', qui sont des <u>isomorphismes sur</u>, puisqu'en les composant on trouve l'identité. Ceci explicite l'isomorphisme de la théorie de l'homologie de π donnée par C, sur la théorie de l'homologie de π donnée par C' (cf. I, p.2, théorème d'unicité).

Plus généralement, soient π et π' deux monoïdes avec élément neutre (e, resp. e'). Soit φ un homomorphisme de π dans π', tel que $\varphi(e) = e'$. Soit C un π-complexe, π-libre et acyclique ; soit C' un π'-complexe, π'-libre et acyclique. Considérons, sur C', la structure de π-module définie par φ (d'une manière générale, si B est un π'-module à gauche, φ définit sur B une structure de π-module à gauche :

$$(s \,, b) \longrightarrow \varphi(s).b \quad \text{pour } s \in \pi \quad , \quad b \in B \ ;$$

idem pour un π'-module à droite). D'après le théorème du numéro 1, il existe un π-homomorphisme permis f de C dans C' (considéré comme π-module). Alors, si A est un π'-module à droite, on obtient un homomorphisme

$$H_q(A \underset{\pi}{\otimes} C) \longrightarrow H_q(A \underset{\pi'}{\otimes} C')$$

indépendant du choix de f. Cet homomorphisme satisfait à toutes les conditions du "théorème d'unicité" de 1 (pages 2 et 3), comme le lecteur le vérifiera aisément.

En particulier, puisque $H_q(A \underset{\pi}{\otimes} C)$ s'identifie à $H_q(\pi \,, A)$, et $H_q(A \underset{\pi'}{\otimes} C')$ à $H_q(\pi', A)$, on vient d'obtenir une nouvelle définition de l'homomorphisme

$$H_q(\pi \,, A) \longrightarrow H_q(\pi', A)$$

défini par un homomorphisme φ de π dans π' (A étant un π'-module à droite, sur lequel φ définit alors une structure de π-module à droite).

Les résultats sont analogues pour la cohomologie, sauf que A doit être un π'-module à gauche, et que les homomorphismes changent de sens :

$$H^q(\pi', A) \longrightarrow H^q(\pi, A) .$$

3.- Deuxième application : revêtements.-

Soit, comme dans l'exposé 3, un espace topologique X connexe par arcs et localement connexe, et admettant un revêtement simplement connexe, et soit Y un revêtement de X défini par un groupe π, quotient du groupe fondamental de X. On ne fait aucune hypothèse sur l'homologie de Y. Le complexe singulier C de Y est π-libre ; soit C' un π-complexe, π-libre et acyclique. D'après le théorème du numéro 1 et son corollaire, on a des homomorphismes, bien déterminés :

$$H_q(A \otimes_\pi C) \longrightarrow H_q(A \otimes_\pi C') \quad \text{et} \quad H^q(\mathrm{Hom}_\pi(C', A)) \longrightarrow H^q(\mathrm{Hom}_\pi(C, A)) .$$

Ici, cela donne :

$$(3) \qquad H_q(X, A) \longrightarrow H_q(\pi, A) \quad \text{et} \quad H^q(\pi, A) \longrightarrow H^q(X, A) ,$$

où $H_q(X, A)$ et $H^q(X, A)$ désignent l'homologie et la cohomologie de l'espace X à coefficients locaux A (dans lequel le groupe π opère à droite, resp. à gauche).

Les homomorphismes (3) sont fondamentaux. Lorsque l'espace Y est acyclique, π étant le groupe fondamental de X, ce sont des isomorphismes sur, comme on l'a vu dans l'Exposé 3.

Prenons pour C' le "complexe homogène" du groupe π. On va expliciter un homomorphisme permis $C \longrightarrow C'$, qui donne naissance aux homomorphismes (3). Dans chaque classe d'équivalence de Y suivant π, choisissons un point ; alors tout point y de Y définit un élément de π, à savoir celui qui amène le représentant de la classe de y, dans le point y. Un simplexe singulier de Y, de dimension p, définit alors une suite $(s_0, \dots, s_p)$ d'éléments de π : ceux qui correspondent à ses $p+1$ sommets. A chaque élément de la base de C on associe ainsi un élément de la base de C', et il est immédiat que ceci définit un homomorphisme permis. Il donnera bien naissance aux homomorphismes (3) (le résultat obtenu est donc indépendant du choix des représentants dans les classes d'équivalence de Y suivant π).

4.- Troisième application : produits en cohomologie.-

Soit π un monoïde avec élément neutre ; soit π' le monoïde-produit $\pi \times \pi$. Soit φ l'homomorphisme "diagonal" de π dans $\pi \times \pi$, défini par

$$\varphi(s) = (s, s) .$$

Si C est un π-complexe, π-libre et acyclique, $C \otimes_Z C$ est un

Π'-complexe, Π'-libre et acyclique (cf Exp.3,p.3). L'homomorphisme φ définit sur $C \underset{Z}{\otimes} C$ une structure de Π-module ; comme Π-complexe, $C \underset{Z}{\otimes} C$ reste acyclique ; donc (théorème du numéro 1) il existe un Π-homomorphisme permis

$$f : \quad C \longrightarrow C \underset{Z}{\otimes} C \quad .$$

Il est bien déterminé à une homotopie près.

Soient alors A et B deux Π-modules à gauche ; le produit tensoriel $A \underset{Z}{\otimes} B$ est un Π'-module à gauche, mais φ définit sur $A \underset{Z}{\otimes} B$ une structure de Π-module à gauche, à savoir :

$$s.(a \otimes b) = (s.a) \otimes (s.b) \quad .$$

On a évidemment un homomorphisme canonique

$$(4) \qquad \mathrm{Hom}_{\Pi}(C\ ,\ A) \underset{Z}{\otimes} \mathrm{Hom}_{\Pi}(C\ ,\ B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Pi}(C \underset{Z}{\otimes} C\ ,\ A \underset{Z}{\otimes} B) \quad ,$$

qui conserve le degré et est compatible avec les opérateurs "cobord" (le "cobord" a été défini, dans un produit tensoriel de groupes abéliens gradués, à la manière habituelle). Mais l'homomorphisme f définit

$$(5) \qquad \mathrm{Hom}_{\Pi}(C \underset{Z}{\otimes} C\ ,\ A \underset{Z}{\otimes} B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Pi}(C\ ,\ A \underset{Z}{\otimes} B) \quad .$$

En composant (4) et (5), on obtient un hommorphisme qui, en passant à la cohomologie, donne :

$$(6) \qquad H^p(\Pi\ ,\ A) \underset{Z}{\otimes} H^q(\Pi\ ,\ B) \longrightarrow H^{p+q}(\Pi\ ,\ A \underset{Z}{\otimes} B) \quad .$$

Ce dernier homomorphisme est <u>indépendant du choix de</u> f . C'est lui qui définit une "structure multiplicative" dans la cohomologie de Π .

On peut donner de (6) une interprétation légèrement différente : pour deux monoïdes Π et χ , un Π-module A et un χ-module B , on a un homomorphisme canonique, évident :

$$(7) \qquad H^p(\Pi\ ,\ A) \underset{Z}{\otimes} H^q(\chi\ ,\ B) \longrightarrow H^{p+q}(\Pi \times \chi\ ,\ A \underset{Z}{\otimes} B) \quad ;$$

supposons alors que $\chi = \Pi$; par l'application diagonale de Π dans $\Pi \times \Pi$, on a un homomorphisme

$$(8) \qquad H^{p+q}(\Pi \times \Pi,\ A \underset{Z}{\otimes} B) \longrightarrow H^{p+q}(\Pi,\ A \underset{Z}{\otimes} B)\ ,$$ où $A \underset{Z}{\otimes} B$ est considéré comme Π-module dans le dernier groupe de cohomologie. En composant les homomorphismes (7) (où $\chi = \Pi$) et (8) , on obtient (6) .

A et B étant donnés, soit E un troisième π-module à gauche ; se donner un π-homomorphisme de $A \otimes B$ dans E, revient à se donner une application bilinéaire ψ de $A \times B$ dans E, telle que

(9) $\quad \psi(s.a\ ,\ s.b) = s.\psi(a\ ,\ b)$ pour $s \in \pi$, $a \in A$, $b \in B$.

Alors (6) définit un homomorphisme

$$H^p(\pi\ ,\ A) \underset{Z}{\otimes} H^q(\pi\ ,\ B) \longrightarrow H^{p+q}(\pi, E)\ .$$

Plus particulièrement, soit A un <u>anneau</u> (associatif ou non) <u>dans lequel opère</u> π ; alors la cohomologie $H^*(\pi\ ,\ A)$ se trouve munie d'une structure d'anneau gradué. On vérifie aisément que si la multiplication de A est associative, celle de $H^*(\pi\ ,\ A)$ l'est aussi.

<u>Formules explicites pour la multiplication des cochaînes</u> : supposons d'abord que C soit le complexe "non homogène" de π (cf Exp.2). On peut expliciter un homomorphisme de C dans $C \underset{Z}{\otimes} C$, qui donne la loi de multiplication suivante pour les cochaînes : si $f(s_1\ ,\ \dots\ ,\ s_p)$ est une p-cochaîne à valeurs dans A , et $g(s_1\ ,\ \dots\ ,\ s_q)$ une q-cochaîne à valeurs dans B , et si ψ est une application bilinéaire de $A \times B$ dans E satisfaisant à (9) , le produit de f et g est une (p+q)-cochaîne h à valeurs dans E , définie par

$$h(s_1\ ,\ \dots\ ,\ s_{p+q}) = \psi[f(s_1\ ,\ \dots\ ,\ s_p)\ ,$$

$$(s_1\ s_2\ \dots\ s_p).g(s_{p+1}\ ,\ \dots\ ,\ s_{p+q})]\ .$$

Supposons ensuite que π soit un <u>groupe</u>, et que C soit le "complexe homogène" de π . Si $f(s_o\ ,\ \dots\ ,\ s_p)$ est une p-cochaîne et $g(s_o\ ,\dots,\ s_q)$ une q-cochaîne, leur produit sera une (p+q)-cochaîne h définie par la formule d'Alexander-Whitney

$$h(s_o\ ,\ \dots\ ,\ s_{p+q}) = \psi[f(s_o\ ,\ \dots\ ,\ s_p)\ ,\ g(s_p\ ,\ \dots\ ,\ s_{p+q})]\ ,$$

(même formule que pour la cohomologie des espaces topologiques).
Il en résulte notamment ceci : dans les hypothèses du numéro 3 (Y revêtement de l'espace X) , <u>l'homomorphisme</u> $H^*(\pi\ ,\ A) \longrightarrow H^*(X\ ,\ A)$ est <u>compatible avec les structures multiplicatives</u>. En particulier, quand Y est acyclique, et que A est un anneau dans lequel opère le groupe fondamental π de X , c'est un <u>isomorphisme</u> de l'anneau de cohomologie du <u>groupe</u> π <u>sur</u> l'anneau de cohomologie de l'<u>espace</u> X .

Enfin, signalons que si A est un anneau <u>commutatif</u>, la démonstration connue pour la cohomologie des espaces montre ici que l'anneau de cohomologie $H^*(\Pi, A)$ satisfait à la loi d'<u>anticommutation</u>

$$vu = (-1)^{pq}\, uv \quad \text{pour} \quad u \in H^p(\Pi, A) \quad \text{et} \quad v \in H^q(\Pi, A) \quad .$$

[cf Appendice à la fin de cet exposé].

5.- <u>Quatrième application</u> : <u>produits dans l'homologie des monoïdes commutatifs</u>.-

Soit Π un groupe <u>abélien</u>, ou, plus généralement, un monoïde commutatif avec élément neutre e. On a un homomorphisme canonique φ de $\Pi \times \Pi$ dans Π, à savoir

$$\varphi(s_1, s_2) = s_1 s_2 \quad .$$

Si C est un Π-complexe, Π-libre et acyclique, alors $C \otimes_Z C$ est un $(\Pi \times \Pi)$-complexe, $(\Pi \times \Pi)$-libre et acyclique. L'homomorphisme φ définit sur C une structure de $(\Pi \times \Pi)$-complexe ; il reste acyclique, donc, d'après le théorème du numéro 1, il existe un $(\Pi \times \Pi)$-homomorphisme f :

$$C \otimes_Z C \longrightarrow C$$

tel que $f(s_1 . c_1, s_2 . c_2) = (s_1 s_2).f(c_1, c_2)$.

f peut aussi être considéré comme un Π-homomorphisme (noté encore f) de $C \otimes_\Pi C$ dans C, où les 2 membres sont considérés comme des Π-complexes. La donnée d'un tel f équivaut à la donnée, sur C, d'une structure de Π-<u>algèbre différentielle graduée</u>. Une telle structure existe donc toujours (d'après le théorème numéro 1).

Soient alors A et B deux Π-modules ; le produit tensoriel $A \otimes_\Pi B$ est un Π-module (pour la loi d'opération : $s.(a \otimes b) = (s . a) \otimes b = a \otimes (s . b)$). L'homomorphisme canonique

$$(A \otimes_\Pi C) \otimes_\Pi (B \otimes_\Pi C) \longrightarrow (A \otimes_\Pi B) \otimes_\Pi (C \otimes_\Pi C)$$

et l'homomorphisme f de $C \otimes_\Pi C$ dans C, définissent

$$(10) \qquad (A \otimes_\Pi C) \otimes_\Pi (B \otimes_\Pi C) \longrightarrow (A \otimes_\Pi B) \otimes_\Pi C \quad ,$$

d'où, en passant à l'homologie,

$$(11) \qquad H_p(\Pi, A) \otimes_\Pi H_q(\Pi, B) \longrightarrow H_{p+q}(\Pi, A \otimes_\Pi B) \quad .$$

Telle est la loi de <u>multiplication dans l'homologie</u>.

On peut donner de (11) l'interprétation suivante : pour deux monoïdes quelconques Π et χ, un Π-module à droite A et un χ-module à droite

B , on a un homomorphisme canonique, évident :

$$(12) \qquad H_p(\pi, A) \underset{Z}{\otimes} H_q(\chi, B) \longrightarrow H_{p+q}(\pi \times \chi, A \underset{Z}{\otimes} B) \quad .$$

Supposons alors que π soit commutatif et $\chi = \pi$; par l'application de $\pi \times \pi$ dans π définie par la loi de composition de π , on a un homomorphisme

$$(13) \qquad H_{p+q}(\pi \times \pi, A \underset{Z}{\otimes} B) \longrightarrow H_{p+q}(\pi, A \underset{\pi}{\otimes} B) \quad ,$$

où dans le second groupe d'homologie, $A \underset{\pi}{\otimes} B$ est considéré comme π-module pour la loi

$$s.(a \otimes b) = (s \, . \, a) \otimes b = a \otimes (s \, . \, b) \quad .$$

En composant (12) et (13) , on obtient (11), à cela près qu'il faut encore passer du produit tensoriel $\underset{Z}{\otimes}$ à son quotient $\underset{\pi}{\otimes}$. (Ne pas perdre de vue que π , étant commutatif, opère dans ses groupes d'homologie ; cf Exp. 3, Remarque finale p.7).

Soit E un troisième groupe abélien dans lequel opère π ; une application bilinéaire ψ de $A \times B$ dans E , telle que

$$(14) \qquad \psi(s \, . \, a \, , b) = \psi(a \, , s \, . \, b) = s \, . \, \psi(a \, , b) \qquad \text{(comparer à (9))} \; ,$$

définit, avec (11) , un homomorphisme

$$H_p(\pi, A) \underset{\pi}{\otimes} H_q(\pi, B) \longrightarrow H_{p+q}(\pi, E) \; .$$

Plus particulièrement, <u>si</u> A <u>est une</u> π-<u>algèbre</u> (ne pas confondre avec un anneau dans lequel opère π) , l'homologie $H(\pi, A)$ est munie d'une structure de π-algèbre graduée. Si la multiplication de A est associative, il en est de même de celle de $H(\pi, A)$. Si la multiplication de A est commutative, celle de $H(\pi, A)$ satisfait à la loi d'anticommutation $vu = (-1)^{pq} uv$ (cf. Appendice).

<u>Formule explicite pour la multiplication des chaînes</u> : prenons pour C le complexe "non homogène". On peut expliciter une structure de π-algèbre différentielle sur C : le produit de $[x_1 , \dots , x_p]$ et de $[y_1 , \dots , y_q]$ est une somme de termes de la forme $[z_1 , \dots , z_{p+q}]$, où la suite $z_1 , \dots , z_{p+q}$ est l'une quelconque des permutations de la suite $x_1,\dots,x_p$, $y_1,\dots,y_q$, telle que $x_1,\dots,x_p$ restant dans cet ordre, ainsi que $y_1,\dots,y_q$; on affecte chaque $[z_1,\dots,z_{p+q}$ d'un coefficient ± 1 , à la manière habituelle.

Pour avoir une formule de multiplication dans le complexe "homogène" quand π est un <u>groupe</u> abélien, il est commode de considérer une variante au "complexe homogène" : au lieu de considérer des "simplexes" $(s_0, \dots, s_p)$, c'est-à-dire des applications de la suite $(0, 1, \dots, p)$ dans π, considérer des applications d'un "cube simplicial" dans π, c'est-à-dire des fonctions de p variables $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (prenant indépendamment les valeurs 0 et 1) à valeurs dans π. On définit le "bord" à la manière habituelle (bord d'un "cube"), et on fait opérer π en transformant par un élément de π les valeurs de la fonction. Il faut en outre procéder à quelques identifications (identifier à 0 un cube lorsque, comme fonction de $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, il est indépendant de l'une au moins des variables λ_i). Cela dit, voici la loi de multiplication que l'on peut prendre : le "produit" d'un "cube" $f(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et d'un "cube" $g(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ est le "cube"

$$h(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+q}) = f(\lambda_1, \dots, \lambda_p).g(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q}) \quad ,$$

le produit du second membre s'entendant au sens de la loi de composition des fonctions à valeurs dans π.

De là on peut déduire le théorème suivant : soit Y un <u>groupe topologique</u>, π un sous-groupe discret de son centre, X le groupe topologique quotient de Y par π. D'après le numéro 3 ci-dessus, on a un homomorphisme des homologies

$$(3) \qquad H(X, A) \longrightarrow H(\pi, A) \quad .$$

Mais on sait que la loi de composition du groupe X définit une structure multiplicative dans l'homologie $H(X, A)$ (quand A est une algèbre sur le groupe fondamental) ; et on vient de voir que, dans les mêmes conditions, l'homologie $H(\pi, A)$ est munie d'une structure multiplicative, puisque π est abélien. <u>L'homomorphisme (3) est compatible avec les structures multiplicatives</u> : cela résulte facilement de la formule de multiplication qui vient d'être donnée pour les "cubes".

6.- <u>Formules de multiplication pour quelques groupes particuliers</u>.-

<u>Cas du groupe abélien libre à</u> n <u>générateurs</u> : dans l'exposé 3, p. 6, on a trouvé un complexe C pour le monoïde abélien libre à n générateurs $x_1, \dots, x_n$: c'est

$$P(x_1, \dots, x_n) \otimes_Z E(x_1, \dots, x_n) \quad ,$$

où P est l'algèbre des polynomes et E l'algèbre extérieure à coefficients entiers. La structure multiplicative habituelle de P et celle de E définissent sur $P(x_1, \dots, x_n) \otimes_Z E(x_1, \dots, x_n)$ une structure de π-algèbre différentielle. Cette structure servira donc à calculer les produits en homologie : si A est une π-algèbre, l'homologie de π à coefficients dans A sera celle de la π-algèbre différentielle

$$A \underset{Z}{\otimes} E(x_1 , \ldots , x_n) \quad .$$

Quant à la structure multiplicative pour la cohomologie, on l'obtient en considérant l'application de $E(x_1 , \ldots , x_n)$ dans $E(x_1 , \ldots , x_n) \otimes E(x_1 ,\ldots,x_n)$, duale de celle définie par la multiplication dans l'algèbre extérieure duale.

Cas du groupe cyclique d'ordre n : on a vu (Exp.3p.7) qu'on peut prendre pour C le produit tensoriel $P_n(x) \underset{Z}{\otimes} P(x)$, où $P_n(x)$ est l'anneau des polynomes en x modulo (x^n-1) , à coefficients entiers, et $P(x)$ l'anneau des polynomes en x , à coefficients entiers ; l'opérateur "bord" a été explicité. Si on cherche à munir C d'une structure multiplicative qui en fasse une π-algèbre différentielle pour cet opérateur "bord" , on est amené à considérer, sur $P(x)$, la loi de multiplication suivante (commutative et associative) :

$x^p . x^q = c_{p,q} \, x^{p+q}$, où l'entier $c_{p,q}$ est nul si p et q sont impairs, et, dans tous les autres cas :

$$c_{p,q} = \frac{[(p+q)/2]!}{[p/2]!.[q/2]!} \qquad \text{(on note } [r] \text{ la partie entière de } r \text{) .}$$

(pour $P_n(x)$, la multiplication reste la multiplication habituelle des polynomes). Alors, si A est une π-algèbre, $A \underset{Z}{\otimes} P(x)$ est une π-algèbre différentielle pour la structure multiplicative déduite de celle qu'on vient de définir dans $P(x)$. Ceci donne la structure multiplicative de $H(\pi, A)$.

Les formules pour la structure multiplicative de la cohomologie sont plus compliquées.

Appendice : sur la propriété d'anticommutation des produits en cohomologie et en homologie.-

La multiplication, en cohomologie, est déduite d'un homomorphisme permis f de C dans $C \underset{Z}{\otimes} C$. Or on a un automorphisme permis de $C \underset{Z}{\otimes} C$ (relativement à sa structure de π-complexe) : celui qui, à un élément $c_1 \otimes c_2$, associe $(-1)^{pq} c_2 \otimes c_1$ (p désigne le degré de c_1 , q celui de c_2) . On en déduit aussitôt que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
H^p(\pi, A) \underset{Z}{\otimes} H^q(\pi, B) & \longrightarrow & H^{p+q}(\pi, A \underset{Z}{\otimes} B) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^q(\pi, B) \underset{Z}{\otimes} H^p(\pi, A) & \longrightarrow & H^{p+q}(\pi, B \underset{Z}{\otimes} A)
\end{array}$$

où les flèches horizontales désignent les homomorphismes de la structure multiplicative, la première flèche verticale l'homomorphisme qui transforme $u \otimes v$ en $(-1)^{pq}\, v \otimes u$, et la seconde flèche verticale l'homomorphisme défini par l'application $a \otimes b \longrightarrow b \otimes a$ de $A \underset{Z}{\otimes} B$ dans $B \underset{Z}{\otimes} A$.

Pour l'<u>homologie</u>, on a un phénomène analogue ; considérer encore l'automorphisme $c_1 \otimes c_2 \longrightarrow (-1)^{pq}\, c_2 \otimes c_1$ de $C \underset{\pi}{\otimes} C$. On obtient un diagramme analogue , les indices étant en bas, et les produits tensoriels étant pris au sens de π .