H. Cartan

Homologie des groupes. III : applications du théorème d'unicité

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. nº 3, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A3_0>

Séminaire H. CARTAN,
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique.

HOMOLOGIE DES GROUPES. III : Applications du théorème d'unicité.

(Exposé de H. CARTAN, le 5.12.1950)

On se réfère à la notion de π-<u>complexe</u> (Exp.2) et aux deux théorèmes (2-02 et 2-03) qui disent que si un π-complexe C est π-libre et acyclique, il donne, pour le monoïde associatif π, une théorie de l'homologie et une théorie de la cohomologie : pour tout groupe abélien A où π opère à droite, $H_q(A \underset{\pi}{\otimes} C)$ est canoniquement isomorphe au groupe d'homologie $H_q(\pi, A)$, et pour tout groupe abélien A où π opère à gauche, $H^q(\mathrm{Hom}_\pi(C, A))$ est canoniquement isomorphe au groupe de cohomologie $H^q(\pi, A)$.

<u>Première application</u>.- Soit E un ensemble dans lequel un groupe π opère (à gauche). Soit C_q le groupe abélien libre des q-chaînes de E, c'est-à-dire le groupe libre ayant pour base les "simplexes" $(x_0, x_1, \dots, x_q)$ (où $x_i \in E$). Faisons opérer π dans C_q par

$$s.(x_0, x_1, \dots, x_q) = (s.x_0, s.x_1, \dots, s.x_q) .$$

On définit un opérateur "bord" $d_q : C_q \longrightarrow C_{q-1}$ $(q \geq 1)$ à la manière habituelle, et une "augmentation" $\varepsilon : C_0 \longrightarrow Z$ en associant à chaque simplexe (x) de dimension 0 l'entier 1 . Ces homomorphismes sont compatibles avec les structures de π-module définies par les opérations de π, et on obtient un π-complexe C qui est <u>acyclique</u>. Supposons maintenant que chaque élément de π distinct de l'élément neutre définisse un automorphisme de E <u>sans point fixe</u>. Alors il est immédiat que C est π-<u>libre</u>. Donc ce complexe C donne une théorie de l'homologie et de la cohomologie pour le groupe π.

Lorsque E n'est autre que l'ensemble π lui-même, où π opère par les translations à gauche, le complexe C n'est autre que le "complexe homogène" du groupe π (2, page 05).

<u>Deuxième application</u> : <u>théorème de HUREWICZ</u>.-

Soit X un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs, <u>admettant un revêtement simplement connexe</u> ; soit ~~π un groupe-quotient de son~~ groupe fondamental, Y le revêtement de X défini par π . Alors π opère dans Y , sans point fixe, et X s'identifie au quotient de Y par la relation d'équivalence définie par π .

Supposons alors que Y soit simplement connexe ($\pi_1(Y) = 0$) et que les groupes d'homologie $H_q(Y)$ soient nuls pour $q \geqslant 1$. Soit C le complexe des chaînes singulières de Y, dans lequel π opère. Il est π-libre et acyclique, donc il donne une théorie de l'homologie et de la cohomologie pour π. Ainsi :

$$H_q(A \otimes_{\pi} C) \approx H_q(\pi, A) \quad \text{si } \pi \text{ opère à droite dans } A,$$

$$H^q(\mathrm{Hom}_{\pi}(C, A)) \approx H^q(\pi, A) \quad \text{si } \pi \text{ opère à gauche dans } A.$$

Or ces groupes s'interprètent dans l'espace X dont Y est le revêtement. Supposons d'abord que π opère trivialement dans A ; alors $A \otimes_{\pi} C$ est $A \otimes_{Z} C'$, où C' est le quotient de C par la relation d'équivalence définie par π ; il est immédiat que C' s'identifie au complexe des chaînes singulières de X, donc $A \otimes_{Z} C'$ au complexe des chaînes singulières à coefficients dans A. Ainsi

$$H_q(X, A) \approx H_q(\pi, A)$$ (isomorphisme canonique, qui sera explicité dans l'exposé 4). De même :

$$H^q(X, A) \approx H^q(\pi, A).$$

On a ainsi obtenu le théorème de Hurewicz-Hopf-Eilenberg-MacLane-Eckmann. Plus généralement, examinons avec Eilenberg le cas où π opère dans A. Sans supposer que Y soit acyclique (ni par conséquent que π soit le groupe fondamental lui-même), les opérations de π dans A définissent des opérations dans A du groupe fondamental de X, c'est-à-dire définissent A comme système de <u>groupes locaux</u> (au sens de Steenrod) sur l'espace connexe X (cf Séminaire 1948-49, exposé 10, pages 1-2). Je dis que $H_q(A \otimes_{\pi} C)$ est le groupe d'homologie de X pour ce système local, et $H^q(\mathrm{Hom}_{\pi}(C, A))$ le groupe de cohomologie pour ce système local. Esquissons la démonstration dans le cas de l'homologie (pour plus de détails, voir S. Eilenberg, Homology of spaces with operators, I, Trans. Amer. Math. Soc., 61, 1947, p. 378-417 ; voir Chap.V). Soit C(A) le groupe des chaînes de X à coefficients locaux dans le système défini par A et les opérations (à droite) du groupe π. On va définir deux isomorphismes, réciproques l'un de l'autre, de $A \otimes_{\pi} C$ sur C(A), lorsqu'on a choisi un point-base x_0 dans X. (Le choix d'un point-base était sous-entendu lorsqu'on parlait du groupe fondamental de X et de la construction de son revêtement Y défini par π, et aussi quand on disait que les opérations de π dans A définissent un système de groupes locaux isomorphes à A). Une chaîne de $C(A)$ est une somme de termes dont chacun a la forme $a'c'$, où c' est un simplexe singulier de X , et a' un élément du groupe $A(x)$ attaché au point x , premier sommet de c' . Choisissons un chemin joignant x au point-base x_0 ; il transporte a' sur un élément $a \in A$ et définit un point $y \in Y$ dont x est la projection, d'où un simplexe c de Y dont c' est la projection. Considérons l'élément $a \otimes c$ de $A \otimes_{\pi} C$; il est indépendant du choix du chemin, et est donc canoniquement associé à l'élément $a'c'$ du groupe $C(A)$. On a ainsi défini un homomorphisme de $C(A)$ dans $A \otimes_{\pi} C$, compatible avec le "bord" ; on vérifie que c'est un <u>isomorphisme sur</u>, en définissant un homomorphisme, en sens inverse, de $A \otimes_{\pi} C$ dans $C(A)$.

En définitive : <u>pour tout groupe abélien</u> A <u>dans lequel</u> π <u>opère à droite (resp. à gauche) , l'homologie</u> $H_q(\pi, A)$ (<u>resp. la cohomologie</u> $H^q(\pi, A)$) <u>est canoniquement isomorphe à l'homologie (resp. la cohomologie</u>) <u>de l'espace</u> X , <u>à coefficients locaux définis par</u> A <u>et les opérations de</u> π <u>dans</u> A ; <u>ceci valant toutes les fois que le revêtement</u> Y <u>défini par</u> π <u>est acyclique</u>.

<u>Troisième application</u> : <u>homologie et cohomologie du produit de deux monoïdes</u>.-

Soient π et π' deux monoïdes avec élément neutre (e , resp. e') . Soit C un π-complexe, π-libre et acyclique, et soit C' un π'-complexe, π'-libre et acyclique. Le produit tensoriel (sur Z , c'est-à-dire au sens des groupes abéliens sans opérateurs) $C \otimes_Z C'$ est un $(\pi \times \pi')$-module pour les opérations suivantes du monoïde-produit $\pi \times \pi'$:

$$(s \cdot s').(c \otimes c') = (s \cdot c) \otimes (s' \cdot c')$$

$$(s \in \pi \, , \; s' \in \pi' \quad , \; c \in C \, , \; c' \in C')$$

Pour faire de $C \otimes_Z C'$ un $(\pi \times \pi')$-complexe, il faut le graduer : les éléments de degré n seront ceux de $\sum_{p+q=n} C_p \otimes C'_q$. Il faut ensuite définir un opérateur "bord" : on le fait à la manière classique sur le produit tensoriel de 2 groupes abéliens gradués, dont chacun est pourvu d'un opérateur "bord" (cf. Séminaire 1948-49, 11 -07). L'homologie de $C \otimes C'$ est <u>triviale</u> (loc. cit., 11, théor. 5, n^{os} 10 et 11) , parceque C et C' sont des groupes abéliens libres d'homologie triviale. On définit l'augmentation $C_0 \otimes C'_0 \longrightarrow Z$ comme le produit tensoriel des augmentations $C_0 \longrightarrow Z$ et

$C'_o \longrightarrow Z$. Ceci achève de définir $C \underset{Z}{\otimes} C'$ comme $(\pi \times \pi')$-complexe. Il est acyclique ; de plus, il est $(\pi \times \pi')$-libre, car le produit tensoriel d'une π-base de C et d'une π'-base de C' est une $(\pi \times \pi')$-base de $C \underset{Z}{\otimes} C'$.

En résumé, $C \underset{Z}{\otimes} C'$ donne une théorie de l'homologie et de la cohomologie pour le monoïde-produit $\pi \times \pi'$.

En particulier, prenons $A = Z$ où π et π' opèrent trivialement. Soit C_1 le quotient de C par la relation d'équivalence définie par π , et soit C'_1 le quotient analogue de C' . Le groupe d'homologie de π (resp. π') à coefficients dans Z est $H_q(C_1)$ (resp. $H_q(C'_1)$) . Il est clair que $C_1 \otimes C'_1$ est le quotient de $C \otimes C'$ par la relation d'équivalence définie par $\pi \times \pi'$; donc l'homologie de $\pi \times \pi'$, à coefficients dans Z , est $H_q(C_1 \otimes C'_1)$. Pour l'expliciter à l'aide de $H(\pi)$ et $H(\pi')$, il suffit d'appliquer la "formule de Künneth". Résultat analogue pour la cohomologie.

<u>Principe général pour la construction d'un π-complexe, π-libre et acyclique</u>.-

Soit un π-complexe π-libre et acyclique

$$0 \leftarrow Z \leftarrow C_o \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} C_2 \longleftarrow \dots \longleftarrow C_{q-1} \xleftarrow{d_q} C_q \xleftarrow{d_{q+1}} C_{q+1} \leftarrow \dots.$$

Appelons R_{q-1} l'image de d_q dans C_{q-1} $(q \geq 1)$. Alors $Z \approx C_o/R_o$, $R_o \approx C_1/R_1$, ... , $R_{q-1} \approx C_q/R_q$. Réciproquement, ces relations, où les C_q sont π-libres pour $q \geq 0$, et où π opère trivialement dans Z , définissent un π-complexe acyclique et π-libre. Le monoïde π étant donné, on obtiendra un tel complexe de la manière suivante : on écrit Z comme quotient d'un module π-libre C_o par un sous-module R_o (par exemple, comme quotient de l'algèbre Λ de π , par l'idéal Λ_o des éléments dont la somme des coefficients est nulle) ; puis on écrit R_o comme quotient d'un module π-libre C_1 par un sous-module R_1 ; d'une manière générale, on écrit R_{q-1} comme quotient C_q/R_q , où C_q est π-libre.

Ce procédé peut toujours être appliqué ; d'où une nouvelle preuve de l'<u>existence</u> d'un π-complexe π-libre et acyclique. Nous allons voir que, pour certains monoïdes π particuliers, il conduit à des résultats plus simples que ceux fournis par le complexe "non homogène" standard (dont la construction est valable pour tous les monoïdes).

Homologie et cohomologie du monoïde libre (resp. groupe libre).-

Soit Λ l'algèbre de π , Λ_o l'idéal des éléments dont la somme des coefficients est nulle. Je dis que Λ_o est un module π-libre. Il en résultera ceci : prenons $C_o = \Lambda$, $C_1 = \Lambda_o$, le "bord" d_1 étant l'injection de Λ_o dans Λ . Prenons enfin $C_q = 0$ pour $q \geq 2$. Alors on obtient un π-complexe π-libre et acyclique ; il donne donc l'homologie et la cohomologie de π , et par suite $H_q(\pi, A) = 0$ et $H^q(\pi, A) = 0$ pour $q \geq 2$, quel que soit A dans lequel opère π .

Comme π-module, Λ_o est engendré par les éléments de la forme $e - x$, où x est une "lettre" (générateur du monoïde libre π ; si π est un groupe libre, il est engendré par les "lettres" x et leurs inverses x^{-1}). Il suffit de montrer maintenant : les $e - x$ sont linéairement indépendants sur l'anneau Λ . Or c'est immédiat, et la démonstration est laissée au lecteur.

Cas du monoïde libre à un générateur.- C'est le monoïde additif N des entiers naturels ≥ 0 . L'algèbre de N est l'anneau Λ des polynomes à une lettre x , à coefficients entiers ; Λ_o est l'idéal des polynomes dont la somme des coefficients est nulle, c'est-à-dire divisibles par $1 - x$. On pourra prendre $C_o = \Lambda$, $C_1 = \Lambda$, $C_q = 0$ pour $q \geq 2$, l'opérateur "bord" d_1 étant la multiplication par $1 - x$. Le complexe C ainsi obtenu peut s'écrire comme suit : $P(x)$ désignant l'algèbre des polynomes en x , à coefficients entiers, et $E(x)$ l'algèbre extérieure sur une lettre x , à coefficients entiers (on ne s'intéresse ici qu'à la structure additive de $E(x)$) , le complexe gradué C s'écrit

$$P(x) \otimes_Z E(x) ,$$

la graduation étant celle de $E(x)$ (qui n'a des termes non nuls que pour les degrés 0 et 1) , la structure de π-module étant définie par le facteur de gauche $P(x)$, et l'opérateur bord étant

$$d(1 \otimes 1) = 0 \quad , \qquad d(1 \otimes x) = (1 - x) \otimes 1 \quad .$$

Si N opère dans A , le produit tensoriel $A \otimes_N C$ s'écrit $A \otimes_Z E(x)$, gradué par $E(x)$, avec l'opérateur bord

$$d(a \otimes 1) = 0 \ , \qquad d(a \otimes x) = (a - a.x) \otimes 1$$ (x est l'élément générateur du monoïde).

Si l'on considérait le groupe additif Z au lieu du monoïde N qui l'engendre, il faudrait remplacer $P(x)$ par l'anneau des polynomes en x à coefficients ≥ 0 ou < 0, mais cela conduirait encore à $A \otimes_Z E(x)$: l'homologie ne serait pas changée (c'est un cas particulier d'un théorème général, valable pour tous les groupes abéliens).

Pour la cohomologie, soit A un groupe abélien dans lequel N (resp. Z) opère ; on prendra comme groupe de "cochaînes" le groupe

$$E(x') \otimes A ,$$

où $E(x')$ désigne l'algèbre extérieure duale de $E(x)$; l'opérateur "cobord" sera

$$\delta(1 \otimes a) = x' \otimes (a-x.a) , \quad \delta(x' \otimes a) = 0 .$$

$E(x') \otimes A$ s'identifie bien à $\mathrm{Hom}_\Pi(C , A)$.

<u>Homologie du groupe abélien libre à</u> n <u>générateurs</u>.-

Les résultats seront les mêmes pour N^n et pour Z^n . Raisonnons par exemple pour N^n . D'après la p.3 ci-dessus, on aura un complexe pour N^n en faisant le produit tensoriel de n exemplaires du complexe C qu'on vient de trouver pour N . On trouve aussitôt :

$$P(x_1 , \dots , x_n) \otimes E(x_1 , \dots , x_n) ,$$

gradué par la graduation de l'algèbre extérieure $E(x_1 , \dots , x_n)$; si N^n opère dans Q , l'homologie N^n à coefficients dans A sera donnée par le complexe $A \otimes E(x_1 , \dots , x_n)$, où $x_1 , \dots , x_n$ désignent les ~~générateurs~~ du monoïde N^n , et où l'opérateur "bord" est :

$$d(a \otimes 1) = 0 , \quad d(a \otimes x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_q}) =$$

$$= \sum_{1 \leq k \leq q} (-1)^{k+1} (a-x_{i_k}.a) \otimes (x_{i_1} \wedge \dots \widehat{x_{i_k}} \wedge \dots \wedge x_{i_q})$$

En particulier, si N opère trivialement dans A , tous les éléments sont des cycles, et l'homologie de N^n , à coefficients dans A , est $a \otimes E(x_1,\dots,x_n)$, avec la graduation définie par le second facteur.

Pour la cohomologie, on prend $E(x_1 , \dots , x_n') \otimes A$, avec un "cobord" que le lecteur explicitera.

<u>Homologie du groupe cyclique d'ordre</u> n .-

Notons x un générateur du groupe. L'algèbre du groupe est l'anneau $P_n(x)$ des polynomes en x , à coefficients entiers, <u>pris modulo</u> $x^n - 1$. L'idéal Λ_o

est l'idéal des polynomes dont la somme des coefficients est nulle, c'est-à-dire des multiples de $1 - x$. On prendra donc $C_o = P_n(x)$, $C_1 = P_n(x)$, l'opérateur d_1 étant la multiplication par $(1-x)$. Le noyau R_1 de d_1 se compose des multiples de $(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})$. On prendra donc $C_2 = P_n(x)$, d_2 étant la multiplication par $1 + x + \dots + x^{n-1}$. Le noyau R_2 se compose des multiples de $1 - x$; on prendra donc $C_3 = P_n(x)$, d_3 étant la multiplication par $1 - x$. Et ainsi de suite, périodiquement de deux en deux. Le complexe obtenu C peut s'écrire

$$P_n(x) \otimes P(x) \quad ,$$

où la graduation est définie par celle du second facteur (polynomes en x), et la structure de $P_n(x)$-module est définie par le premier facteur. L'opérateur "bord" est défini par :

$$d(1 \otimes 1) = 0 \ , \quad d(1 \otimes x^{2p+1}) = (1-x) \otimes x^{2p} \ ,$$
$$d(1 \otimes x^{2p+2}) = (1 + x + \dots + x^{n-1}) \otimes x^{2p+1} \quad .$$

L'homologie à coefficients dans A sera l'homologie du complexe $A \otimes P(x)$, muni d'un opérateur "bord" déduit du précédent. On explicite aussitôt les résultats :

$H_{2p+1}(\pi, A)$ est le quotient du sous-groupe des éléments de A invariants par π , par le sous-groupe des éléments b de la forme $a + x.a + \dots + x^{n-1}.a$. Quant à $H_{2p+2}(\pi, A)$, c'est le quotient du sous-groupe des éléments a tels que $a + x.a + \dots + x^{n-1}.a = 0$, par le sous-groupe des éléments de la forme $b - x.b$.

Les résultats sont analogues pour la cohomologie : $H^{2p+1}(A)$ est isomorphe à $H_{2p+2}(A)$, et $H^{2p+2}(A)$ isomorphe à $H_{2p+1}(A)$.