

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

SAMUEL EILENBERG

Homologie des groupes. II : existence

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. n° 2, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A2_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1950-1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Séminaire H. CARTAN,
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique

HOMOLOGIE DES GROUPES. II : EXISTENCE.
(Exposé de Samuel EILENBERG, le 20.11.1950).

4.- π -complexes.

Un π -complexe C est une suite :

$$0 \xleftarrow{d_0} C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{\dots} C_q \xleftarrow{\dots}$$

de π -groupes à gauche et de π -homomorphismes, tels que $dd = 0$, augmentée d'un π -homomorphisme $\xi : C_0 \rightarrow Z$ (π opérant trivialement sur Z) tel que $\xi \circ d_1 = 0$.

Un π -complexe est dit π -libre (ou, en abrégé, libre) si tous les C_q sont π -libres.

Un π -complexe est dit acyclique si la suite

$$0 \leftarrow Z \leftarrow C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow \dots \leftarrow C_q \leftarrow \dots$$

est exacte. Cette dernière condition est équivalente à : $H_q(C) = 0$ pour $q > 0$, et ξ induit un isomorphisme de $H_0(C)$ sur Z .

Soit alors C un π -complexe quelconque, et A un π -groupe à droite. Les produits tensoriels $A \otimes_{\pi} C_q$ sont alors définis comme produits tensoriels de $Z(\pi)$ -modules (i.e. ce sont les quotients du produit tensoriel sur Z par l'identification $ax \otimes c_q = a \otimes xc_q$). La suite :

$$0 \leftarrow A \otimes_{\pi} C_0 \leftarrow A \otimes_{\pi} C_1 \leftarrow \dots \leftarrow A \otimes_{\pi} C_q \leftarrow \dots$$

définit un complexe de chaînes, de groupes d'homologie $H_q(A \otimes_{\pi} C)$.

Dans la suite de ce numéro, nous allons donner des conditions portant sur C , suffisantes pour que les groupes $H_q(A \otimes_{\pi} C)$ forment, lorsque A varie, une théorie de l'homologie de π , au sens de l'exposé précédent.

Soit donné un π -homomorphisme $f : A \rightarrow B$; il induit un homomorphisme $A \otimes_{\pi} C \rightarrow B \otimes_{\pi} C$ qui, à son tour, induit des homomorphismes

$$f_* : H_q(A \otimes_{\pi} C) \rightarrow H_q(B \otimes_{\pi} C).$$

On voit tout de suite que le système $\{H_q(A \otimes_{\pi} C), f_*\}$ vérifie les axiomes (1) et (2).

Supposons maintenant que C soit libre, et soit une suite exacte :

$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$. Alors, la suite :
 $0 \rightarrow A' \otimes_{\pi} C_q \rightarrow A \otimes_{\pi} C_q \rightarrow A'' \otimes_{\pi} C_q \rightarrow 0$ est exacte, C_q étant π -libre. Il en résulte la suite exacte : $0 \rightarrow A' \otimes_{\pi} C \rightarrow A \otimes_{\pi} C \rightarrow A'' \otimes_{\pi} C \rightarrow 0$. Ceci définit classiquement un homomorphisme :

$$\partial : H_q(A'' \otimes_{\pi} C) \rightarrow H_{q-1}(A' \otimes_{\pi} C).$$

Il résulte des théorèmes généraux sur l'homologie des complexes et sous-complexes que le système :

$$H = \{ H_q(A \otimes_{\pi} C), f_*, \partial \}$$

vérifie les axiomes (3) et (4).

Théorème. Si le π -complexe C est π -libre et acyclique, alors H est une théorie de l'homologie pour π .

Démonstration : Il suffit de vérifier les axiomes (5) et (6).

Visiblement $H_q(A \otimes_{\pi} C) = 0$ pour $q < 0$.

Comme la suite $C_1 \xrightarrow{d} C_0 \rightarrow Z \rightarrow 0$ est exacte, il résulte des propriétés générales du produit tensoriel que la suite :

$$A \otimes_{\pi} C_1 \rightarrow A \otimes_{\pi} C_0 \rightarrow A \otimes_{\pi} Z \rightarrow 0$$

est exacte. D'où le fait que $H_0(A \otimes_{\pi} C)$ s'identifie à $A \otimes_{\pi} Z$ qui, lui-même, s'identifie à A_{π} (au moyen de l'isomorphie canonique de $A \otimes_{\pi} Z$ sur A).

Soit maintenant A un π -groupe à droite, π -libre. A est donc isomorphe à la somme directe d'un certain nombre de copies de $Z(\pi)$ considéré comme π -groupe à droite. Les isomorphismes canoniques :

$$Z(\pi) \otimes_{\pi} C_q \approx Z \otimes C_q \approx C_q$$

entraînent $H_q(Z(\pi) \otimes_{\pi} C) = 0$ pour $q > 0$. D'où $H_q(A \otimes_{\pi} C) = 0$ pour $q > 0$.

Occupons-nous maintenant de cohomologie et considérons un π -groupe à gauche A . Nous noterons $\text{Hom}_{\pi}(C_q, A)$ le groupe de tous les π -homomorphismes : $C_q \rightarrow A$. Un tel homomorphisme, composé avec $d : C_{q+1} \rightarrow C_q$ donne un homomorphisme $C_{q+1} \rightarrow A$. D'où un homomorphisme canonique

$$\delta : \text{Hom}_{\pi}(C_q, A) \rightarrow \text{Hom}_{\pi}(C_{q+1}, A), \text{ avec } \delta\delta = 0.$$

On obtient ainsi un complexe de cochaînes $\text{Hom}_{\pi}(C, A)$, de groupes de cohomologie $H^q(\text{Hom}_{\pi}(C, A))$. Un π -homomorphisme $f : A \rightarrow B$ induit un homomorphisme $\text{Hom}_{\pi}(C, A) \rightarrow \text{Hom}_{\pi}(C, B)$, qui, à son tour, induit des

homomorphismes :

$$f_* : H^q(\text{Hom}_{\pi}(C, A)) \longrightarrow H^q(\text{Hom}_{\pi}(C, B)) .$$

Si l'on a une suite exacte : $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$, alors la suite :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\pi}(C, A') \longrightarrow \text{Hom}_{\pi}(C, A) \longrightarrow \text{Hom}_{\pi}(C, A'') \longrightarrow 0$$

est exacte si C est π -libre. Ceci définit classiquement des homomorphismes :

$$\delta : H^q(\text{Hom}_{\pi}(C, A'')) \longrightarrow H^{q+1}(\text{Hom}_{\pi}(C, A')) .$$

Le système $H = \{H^q(\text{Hom}_{\pi}(C, A)), f_*, \delta\}$ vérifie les axiomes $(1_c) - (4_c)$.

Théorème. Si le π -complexe C est π -libre et acyclique, alors H est une théorie de la cohomologie pour π .

Démonstration : Il suffit de vérifier les axiomes (5_c) et (6_c) .

Visiblement $H^q(\text{Hom}_{\pi}(C, A)) = 0$ pour $q < 0$. Comme la suite

$C_1 \xrightarrow{d} C_0 \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ est exacte, il résulte des propriétés générales de

$\text{Hom}_{\pi}(\ , \)$ que la suite :

$$\text{Hom}_{\pi}(C_1, A) \longleftarrow \text{Hom}_{\pi}(C_0, A) \longleftarrow \text{Hom}_{\pi}(Z, A) \longleftarrow 0$$

est exacte. D'où l'identification de $H^0(\text{Hom}_{\pi}(C, A))$ avec $\text{Hom}_{\pi}(Z, A)$; et, si nous identifions tout homomorphisme $\varphi : Z \longrightarrow A$ avec l'élément $\varphi(1) \in A$, nous obtenons $\text{Hom}_{\pi}(Z, A) = A^{\pi}$.

Supposons maintenant que A soit π -injectif. Soit $\varphi : C_q \longrightarrow A$ ($q > 0$), un π -homomorphisme qui est un cocycle. Dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} C_{q+1} & \xrightarrow{d_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{d_q} & C_{q-1} \\ & & \downarrow \varphi & & \\ & & A & & \end{array}$$

la première ligne est exacte, et $\varphi \circ d_{q+1} = \delta\varphi = 0$. Ceci définit un homomorphisme ψ de l'image de d_q dans A , qui, puisque A est π -injectif, peut être prolongé en un homomorphisme $\psi' : C_{q-1} \longrightarrow A$. D'où $\delta\psi' = \psi' \circ d_q = \varphi$, et $H^q(\text{Hom}_{\pi}(C, A)) = 0$ pour tout $q > 0$.

5.- Le complexe non-homogène.

Pour terminer la démonstration d'existence des théories de l'homologie et de la cohomologie d'un système π , il suffit d'exhiber au moins un π -complexe π -libre et acyclique.

Soit $C_q(\pi)$ ($q \geq 0$) le π -groupe (à gauche) libre qui admet les suites

$$[x_1, \dots, x_q] \quad x_1, \dots, x_q \in \pi$$

comme π -base. En particulier, $C_0(\pi)$ admet le symbole $[\]$ comme π -base. Posons, pour $q > 0$:

$$d[x_1, \dots, x_q] = x_1[x_2, \dots, x_q] + \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i [x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_q] + (-1)^q [x_1, \dots, x_{q-1}]$$

En particulier, on a :

$$\begin{aligned} d[x] &= x[\] - [\] \\ d[x, y] &= x[y] - [xy] + [x] \\ d[x, y, z] &= x[y, z] - [xy, z] + [x, yz] - [x, y] \end{aligned}$$

On obtient ainsi des π -homomorphismes $d_q : C_q(\pi) \longrightarrow C_{q-1}(\pi)$ avec $dd = 0$, comme on peut le vérifier par un calcul direct. De plus, on définit le π -homomorphisme $\xi : C_0(\pi) \longrightarrow Z$ en posant $\xi[\] = 1$. On obtient donc un π -complexe $C(\pi)$ appelé le complexe non-homogène de π . Pour montrer que $C(\pi)$ est acyclique, définissons des homomorphismes (qui ne sont pas des π -homomorphismes) :

$$\begin{aligned} D_q : C_q(\pi) &\longrightarrow C_{q+1}(\pi) & q \geq 0 \\ D_{-1} : Z &\longrightarrow C_0(\pi) \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} D_q(x[x_1, \dots, x_q]) &= [x, x_1, \dots, x_q] \quad (q \geq 0) \\ D_{-1}(1) &= [\] \end{aligned}$$

On vérifie par un calcul direct que :

$$\begin{aligned} dD_q c + D_q dc &= c & c \in C_q(\pi) & \quad q > 0 \\ dD_0 c + D_{-1} \xi c &= c & c \in C_0(\pi) \end{aligned}$$

D'où, si $dc = 0$ (ou si $\xi c = 0$ pour $q = 0$), $c = dD_q c$. Il en résulte l'exactitude de la suite :

$$0 \longleftarrow Z \longleftarrow C_0(\pi) \longleftarrow \dots \longleftarrow C_q(\pi) \longleftarrow \dots$$

ce qui montre bien que $C(\pi)$ est acyclique.

Les groupes d'homologie et cohomologie obtenus en utilisant le complexe non-homogène $C(\pi)$ seront notés $H_q(\pi, A)$ et $H^q(\pi, A)$.

Si l'on a un homomorphisme $\varphi : \pi' \longrightarrow \pi$, alors :

$$[x_1, \dots, x_q] \longrightarrow [\varphi x_1, \dots, \varphi x_q] \quad x_1, \dots, x_q \in \pi'$$

définit une application $C(\pi') \longrightarrow C(\pi)$, qui à son tour induit des

homomorphismes :

$$\varphi_* : H_q(\pi', A) \rightarrow H_q(\pi, A) \quad \text{et} \quad \varphi^* : H^q(\pi, A) \rightarrow H^q(\pi', A) .$$

Les homomorphismes φ_* (resp. φ^*) sont définis pour tout π -groupe A à droite (resp. à gauche), et vérifient les conditions du 1er théorème d'unicité (resp. du second).

Si π est un groupe, nous pouvons passer à la définition homogène de $C(\pi)$, en posant :

$$(x_0, \dots, x_q) = x_0 [x_0^{-1}x_1, x_1^{-1}x_2, \dots, x_{q-1}^{-1}x_q] , \quad x_0, \dots, x_q \in \pi .$$

Les (x_0, \dots, x_q) forment une base (mais pas une π -base) de $C_q(\pi)$ et :

$$x(x_0, \dots, x_q) = (xx_0, \dots, xx_q)$$

$$d(x_0, \dots, x_q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_q)$$

$$\xi(x) = 1$$

$$[x_1, \dots, x_q] = (1, x_1, x_1x_2, \dots, x_1x_2 \dots x_q) .$$

Exercice I - Montrer que, pour tout $y \in \pi$ (π étant un groupe), l'automorphisme de $C(\pi)$ défini par :

$$(x_0, \dots, x_q) \rightarrow (x_0 y^{-1}, \dots, x_q y^{-1})$$

induit sur $H_q(\pi, A)$ et $H^q(\pi, A)$ l'automorphisme identique.

Exercice II - Soit $C'_q(\pi)$ le π -sous-groupe de $C_q(\pi)$ engendré par les $[x_1, \dots, x_q]$ dont l'une au moins des coordonnées est égale à 1. Montrer que $C_q^N(\pi) = C_q(\pi)/C'_q(\pi)$ forme un π -complexe acyclique.