H. Cartan

Carapaces

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. n^{o} 18, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A18_0>

Séminaire H. CARTAN,
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique.

CARAPACES

(Exposé de H. CARTAN, le 21.5.1951)

1.- Définition d'une carapace.

L'espace topologique $\mathfrak{X}$ et l'anneau de base K étant donnés, une <u>carapace</u> est définie par la donnée d'un K-module A , et, pour chaque point $x \in \mathfrak{X}$, d'un homomorphisme φ_x et A <u>sur</u> un module-quotient A_x ; on suppose vérifiés les 2 axiomes suivants :

(Car I) Si un élément $\alpha \in A$ et un point x sont tels que $\varphi_x(\alpha) = 0$, alors $\varphi_y(\alpha) = 0$ pour tout point y assez voisin de x ;

(Car II) Si un élément α est tel que $\varphi_x(\alpha) = 0$ pour tout point x , alors $\alpha = 0$.

Si seul le premier axiome est vérifié, on a une <u>précarapace</u>. A toute précarapace A est canoniquement associée une carapace, obtenue en faisant le quotient de A par le sous-module des α tels que $\varphi_x(\alpha) = 0$ pour tout point x .

<u>Supports</u> : soit A une précarapace ; pour tout $\alpha \in A$, définissons le <u>support</u> $\sigma(\alpha)$ de l'élément α , comme étant l'ensemble des points $x \in \mathfrak{X}$ tels que $\varphi_x(\alpha) \neq 0$. L'axiome (Car I) exprime que le support de chaque élément est un sous-ensemble <u>fermé</u> de $\mathfrak{X}$. L'axiome (Car II) exprime que le support d'un élément α ne peut être vide que si $\alpha = 0$.

La connaissance des supports des éléments de A détermine la structure de précarapace (resp. de carapace) de A . D'une façon précise : supposons attaché, à chaque élément α d'un K-module A , une partie fermée $\sigma(\alpha)$ de l'espace $\mathfrak{X}$, de manière que :

$$\sigma(0) = \emptyset \ , \quad \sigma(\alpha - \beta) \subset \sigma(\alpha) \cup \sigma(\beta) \ , \quad \sigma(k\alpha) \subset \sigma(\alpha) \quad \text{pour } k \in K \ .$$

Pour chaque point x , soit A'_x le sous-module des α tels que $x \notin \sigma(\alpha)$. Prenons pour A_x le module-quotient A/A'_x , et pour φ_x l'homomorphisme canonique de A sur ce quotient. Alors l'axiome (Car I) est vérifié ; et l'axiome (Car II) l'est si $\sigma(\alpha) = \emptyset$ entraîne $\alpha = 0$.

<u>Carapace graduée</u> : on suppose A muni d'une structure graduée telle que le noyau de chaque homomorphisme φ_x soit somme directe de ses composantes de chaque degré (et alors A_x est aussi gradué). Cette condition s'exprime comme

suit en termes de supports :

$$\sigma(\alpha+\beta) = \sigma(\alpha) \cup \sigma(\beta) \quad \text{si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont homogènes et de degrés}$$

distincts.

<u>Carapace avec cobord</u> : on suppose A muni d'un cobord δ tel que le noyau de chaque φ_x soit stable pour δ (et alors δ est défini dans chaque A_x, par passage au quotient). En termes de supports, la condition est :

$$\sigma(\delta\alpha) \subset \sigma(\alpha) .$$

2.- <u>Relations entre carapaces et faisceaux.</u>

Toute carapace A définit un faisceau $\mathcal{F}(A) = F$, défini comme suit : $F_x = A_x$ en tout point x, et, sur la réunion des A_x, on met la topologie suivante : pour tout ouvert X de l'espace $\mathfrak{X}$, et tout élément α de A, on considère l'ensemble des $\varphi_x(\alpha)$ où x parcourt X ; on pose que c'est un ensemble ouvert du faisceau F, et qu'on obtient par ce procédé un système fondamental d'ouverts de la topologie à définir sur F.

Inversement, tout faisceau F définit une carapace, à savoir le module des sections $\Gamma(F)$. En effet, dans l'exposé 14 (numéro 1) on a défini des supports dans $\Gamma(F)$; et on vérifie aussitôt que les axiomes d'une carapace sont remplis. Pour tout faisceau F et toute famille Φ, $\Gamma_{\Phi}(F)$ est une carapace.

3.- <u>Homomorphisme de carapaces</u> (sur un même espace).

Soient A et B deux carapaces (ou même deux précarapaces) sur l'espace $\mathfrak{X}$. On dit qu'un homomorphisme h du K-module A dans le K-module B est un <u>homomorphisme de carapaces</u> si, pour tout point x, h applique le noyau A'_x de φ_x dans le noyau B'_x de ψ_x (on note φ_x et ψ_x les homomorphismes qui définissent les structures de carapace de A et B). Il s'ensuit que h définit, par passage aux quotients, un homomorphisme h_x de $A_x = A/A'_x$ dans $B_x = B/B'_x$. En termes de supports, la condition pour h est la suivante :

$$\sigma(h(\alpha)) \subset \sigma(\alpha) \quad \text{pour tout } \alpha \in A .$$

En d'autres termes, l'homomorphisme h <u>diminue les supports</u>. Cette condition est nécessaire et suffisante.

En particulier, on a la notion d'<u>endomorphisme d'une carapace</u> A. Par exemple, pour une carapace graduée, les projecteurs de graduation sont des endomorphismes de la carapace. Bour une carapace avec cobord, le cobord δ est un endomorphisme de la carapace.

Soit A une carapace. Pour tout sous-module B de A , munissons les éléments de B des supports qu'ils ont dans A ; alors l'injection $B \longrightarrow A$ est un homomorphisme (biunivoque) de carapaces. B s'appelle une sous-carapace de A .

<u>Tout homomorphisme de carapaces</u> $A \longrightarrow B$ <u>définit canoniquement un homomorphisme</u> $\mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(B)$ <u>des faisceaux associés</u>. Car les homomorphismes $h_x : A_x \longrightarrow B_x$ définis par l'homomorphisme $h : A \longrightarrow B$, définissent visiblement un homomorphisme du faisceau $\mathcal{F}(A)$ des A_x dans le faisceau $\mathcal{F}(B)$ des B_x .

D'autre part, on a vu (14, 3) que tout homomorphisme de faisceaux $F \longrightarrow G$ définit un homomorphisme $\Gamma(F) \longrightarrow \Gamma(G)$ des modules de sections. C'est évidemment un <u>homomorphisme de carapaces</u>. Il en est de même de l'homomorphisme $\Gamma_\Phi(F) \longrightarrow \Gamma_\Phi(G)$, pour toute famille Φ .

4.- <u>Carapace complète</u>.

Soit A une carapace ; considérons le faisceau associé $\mathcal{F}(A)$, puis le module de ses sections $\Gamma(\mathcal{F}(A))$. On a un homomorphisme canonique évident de A dans $\Gamma(\mathcal{F}(A))$: car si $\alpha \in A$, α définit une section de $\mathcal{F}(A)$, à savoir celle qui, à chaque point x , associe l'élément $\varphi_x(\alpha) \in A_x$. Cet homomorphisme est <u>biunivoque</u> : c'est ce qu'exprime l'axiome (Car II) . Il permet d'identifier (ce que nous ferons toujours) la carapace donnée A à une sous-carapace de $\Gamma(\mathcal{F}(A))$. Cette dernière s'appellera la <u>carapace complétée</u> de la carapace A . Si $A \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F}(A))$ est un isomorphisme <u>sur</u>, la carapace A est dite <u>complète</u>. On voit immédiatement que, pour tout faisceau F , $\Gamma(F)$ est une carapace complète. En particulier, la complétée d'une carapace est complète.

Soit A une carapace. On dit qu'une famille d'éléments de A est <u>localement finie</u> si la famille de leurs supports est localement finie. Il est évident que l'on peut définir la somme d'une famille localement finie d'éléments de $\Gamma(F)$, qui est une section de F , donc un élément de $\Gamma(F)$. On peut donc, étant donnée une carapace A , définir la somme d'une famille localement finie d'éléments de A , qui est un élément de $\Gamma(\mathcal{F}(A))$; si cet élément est <u>dans</u> A , on dira que la somme considérée <u>converge dans</u> A .

Pour toute famille Φ et toute carapace A , on notera A_Φ la sous-carapace des éléments dont le support appartient à Φ . L'homomorphisme $A \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F}(A))$ applique A_Φ dans $\Gamma_\Phi(\mathcal{F}(A))$. On dit que A est <u>Φ-complète</u> si A_Φ est appliqué <u>sur</u> $\Gamma_\Phi(\mathcal{F}(A))$. Il est clair que toute carapace complète est Φ-complète, sans que la réciproque soit nécessairement vraie. Si on a deux familles Φ et Φ' telles que $\Phi' \subset \Phi$, toute carapace Φ-complète est Φ'-complète.

Soient maintenant deux carapaces A et B , et un homomorphisme de carapaces $h : A \longrightarrow B$. On a vu (numéro 3) qu'il définit un homomorphisme de $\mathcal{F}(A)$ dans $\mathcal{F}(B)$; celui-ci définit à son tour un homomorphisme des carapaces complétées $\Gamma(\mathcal{F}(A)) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F}(B))$. Il est clair que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(\mathcal{F}(A)) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{F}(B)) \end{array}$$

En particulier : tout endomorphisme d'une carapace A se prolonge canoniquement en un endomorphisme de la carapace complétée $\Gamma(\mathcal{F}(A))$.

5.- Généralisation de la notion d'homomorphisme de carapaces.

Nous considérons ici deux espaces $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$, et une application continue f de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$. Soit B une carapace sur $\mathfrak{X}$, et A une carapace sur $\mathfrak{Y}$. On dit qu'un homomorphisme h du K-module A dans le K-module B est <u>compatible avec</u> f si, pour tout x de $\mathfrak{X}$, h applique le noyau de $A \longrightarrow A_{f(x)}$ dans le noyau de $B \longrightarrow B_x$. Alors h définit un homomorphisme h_x de $A_{f(x)}$ dans B_x , donnant lieu à la commutation :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{f(x)} & \longrightarrow & B_x \end{array}$$

En termes de supports, h doit satisfaire à la condition :

$$\sigma(h(\alpha)) \subset f^{-1}(\sigma(\alpha)) \quad \text{pour tout } \alpha \in A .$$

<u>Exemple</u> : soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux variétés différentiables, et f une application différentiable de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$. On sait que f définit un homomorphisme h de l'espace vectoriel des formes différentielles de $\mathfrak{Y}$ dans celui des formes différentielles de $\mathfrak{X}$. On vérifie aussitôt que c'est un homomorphisme de carapaces, compatible avec l'application f .

D'une manière générale, si F est un faisceau sur $\mathfrak{Y}$, et G un faisceau sur $\mathfrak{X}$, tout homomorphisme $F \longrightarrow G$ compatible avec f (Exp. 14) définit un homomorphisme des carapaces $\Gamma(F) \longrightarrow \Gamma(G)$, compatible avec f . Réciproquement, si $h : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme de carapaces compatible avec f ,

h définit un homomorphisme $\mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(B)$ compatible avec f .

6.- Opérations sur les carapaces.

Carapace induite : soit $\mathfrak{X}$ un sous-espace de $\mathcal{Y}$, et soit A une carapace sur $\mathcal{Y}$. Les homomorphismes $A \longrightarrow A_x$ relatifs aux points x de $\mathfrak{X}$ définissent A comme précarapace sur l'espace $\mathfrak{X}$. En termes de supports : le support de $\alpha \in A$, considéré comme carapace sur $\mathfrak{X}$, est l'intersection de $\mathfrak{X}$ et du support de α . L'axiome (Car II) n'est pas rempli en général ; mais on obtient une carapace sur $\mathfrak{X}$, en faisant le quotient de A par le sous-module des α dont le support ne rencontre pas $\mathfrak{X}$. Cette nouvelle carapace s'appelle la carapace induite par A sur le sous-espace $\mathfrak{X}$. L'application canonique de A sur son quotient est un homomorphisme de la carapace A sur la carapace induite, compatible avec l'injection de $\mathfrak{X}$ dans $\mathcal{Y}$.

Produit tensoriel de 2 carapaces sur 2 espaces distincts : soient $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces, A une carapace sur $\mathfrak{X}$, B une carapace sur $\mathcal{Y}$. Soient $\varphi_x : A \longrightarrow A_x$ les homomorphismes définissant la structure de carapace de A , et $\psi_y : B \longrightarrow B_y$ les homomorphismes définissant la structure de carapace de B . Les homomorphismes $\varphi_x \otimes \psi_y$ appliquent le produit tensoriel $A \otimes B$ sur $A_x \otimes B_y$, pour tout point (x , y) de l'espace-produit $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$. Ils définissent $A \otimes B$ comme précarapace sur $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$, car on vérifie facilement l'axiome (Car I). Il n'est pas certain que l'axiome (Car II) soit satisfait ; il l'est, par exemple, lorsque l'une au moins des carapaces, A par exemple, est basique.

Une carapace A est basique lorsqu'est donnée une K-base du module A , telle que le support d'une combinaison linéaire d'éléments de la base soit la réunion des supports de ceux des éléments de la base dont le coefficient n'est pas nul.

Notons ceci : si les faisceaux $\mathcal{F}(A)$ et $\mathcal{F}(B)$ sont sans torsion, le support d'un élément $\alpha \otimes \beta$ de $A \otimes B$ est l'ensemble-produit $\sigma(\alpha) \times \sigma(\beta)$. En effet, pour que $\varphi_x(\alpha) \otimes \psi_y(\beta)$ soit nul, il faut alors que $\varphi_x(\alpha) = 0$ ou $\psi_y(\beta) = 0$. Dans le cas général, on peut seulement affirmer que le support de $\alpha \otimes \beta$ est contenu dans le produit $\sigma(\alpha) \times \sigma(\beta)$.

Produit tensoriel de deux carapaces sur le même espace : on considère $A \otimes B$ comme précarapace sur $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, puis on passe à la diagonale de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$: on trouve une carapace induite, que nous noterons $A \bigcirc B$.
$A \bigcirc B$ est donc défini comme précarapace sur $\mathfrak{X}$, par les homomorphismes $A \otimes B \longrightarrow A_x \otimes B_x$; et $A \bigcirc B$ est le quotient de $A \otimes B$ par le sous-module

des éléments qui induisent 0 en tout point x, c'est-à-dire dont le support est vide. Lorsque $\mathcal{F}(A)$ et $\mathcal{F}(B)$ sont sans torsion, le support de $\alpha \circ \beta$ (image de $\alpha \otimes \beta$ dans $A \circ B$) est l'<u>intersection</u> des supports de α et de β. Dans le cas général, le support de $\alpha \circ \beta$ est contenu dans l'intersection des supports de α et de β.

7.- <u>Carapace fine</u>.

<u>Définition</u> : une carapace A est <u>fine</u> si, pour tout recouvrement localement fini de l'espace $\mathcal{X}$ par des ouverts $\mathcal{U}_i$, il existe des endomorphismes ℓ_i de la carapace A tels que :

1° pour chaque i, ℓ_i est nul en dehors d'un fermé contenu dans $\mathcal{U}_i$;

2° la somme des ℓ_i est l'endomorphisme identique, dans le sens suivant : pour tout $\alpha \in A$, la somme localement finie $\sum_i \ell_i(\alpha)$ converge dans A (cf. numéro 4 ci-dessus) et a pour somme α.

N.B. : cette définition n'a de sens que pour une vraie carapace, et non pour une précarapace ; il est essentiel que la carapace A soit plongée <u>biunivoquement</u> dans le module des sections du faisceau $\mathcal{F}(A)$.

Si A est une carapace fine, le faisceau $\mathcal{F}(A)$ est fin : évident. Inversement, si un faisceau F est fin, la carapace $\Gamma(F)$ est fine. En particulier, si A est une carapace fine, la complétée $\Gamma(\mathcal{F}(A))$ est fine.

<u>Exemples</u> : soit C le faisceau d'Alexander-Spanier (Exp.15) ; la carapace $\Gamma(C)$ est fine. On a vu que c'est le quotient de la précarapace des cochaînes d'Alexander-Spanier, par le sous-module des cochaînes de support vide.

De même : soit S^* le faisceau des cochaînes singulières ; la carapace $\Gamma(S^*)$ est fine ; c'est la carapace, quotient de la précarapace des cochaînes singulières par le sous-module des cochaînes de support vide.

Sur une variété différentiable, la carapace des formes différentielles est fine.

<u>Théorème</u> : soit A une carapace fine. Si toute somme localement finie d'éléments de A, dont la réunion des supports appartient à Φ, converge dans A, alors A <u>est</u> Φ<u>-complète</u> (cf. numéro 4 ci-dessus).

Démonstration : soit γ une section de A, à support dans Φ ; on veut montrer que γ est dans A ; pour cela, on observe que, pour un recouvrement du support X de γ par des $\mathcal{U}_i$, on a $\gamma = \sum_i \ell_i(\gamma)$. Il suffit donc de montrer que l'on peut s'arranger pour que chacun des $\ell_i(\gamma)$ soit non seulement dans $\Gamma(\mathcal{F}(A))$, mais dans la carapace A elle-même. Or cela résulte du fait que, au voisinage de chaque point de X , γ induit la même chose qu'un élément de A . Nous laissons les détails au lecteur.

Corollaire : soit Φ la famille des parties compactes d'un espace localement compact $\mathfrak{X}$. Toute carapace fine est Φ-complète.

(En effet, toute somme localement finie dont la réunion des supports est compacte, est nécessairement finie).

8.- Carapace homotopiquement fine ; faisceau homotopiquement fin.

Il s'agit ici d'un affaiblissement de la notion de "fin". Les carapaces et les faisceaux considérés seront supposés munis d'un opérateur cobord δ (de carré nul).

Définition : une carapace A est homotopiquement fine si, pour tout recouvrement localement fini de l'espace $\mathfrak{X}$ par des ouverts $\mathcal{U}_i$, il existe des endomorphismes ℓ_i et un endomorphisme k de la carapace A , tels que :

1° pour chaque i , ℓ_i est nul en dehors d'un fermé contenu dans $\mathcal{U}_i$;

2° la somme des ℓ_i est égale à l'identité augmentée de l'endomorphisme $k\delta + \delta k$; autrement dit, pour tout $\alpha \in A$, la somme localement finie $\sum_i \ell_i(\alpha)$ converge dans A et est égale à $\alpha + k\delta\alpha + \delta k\alpha$.

Dans le cas où $\delta = 0$, on retrouve la notion de carapace fine.

Définition analogue d'un faisceau homotopiquement fin.

Dans l'exposé suivant, on établira un théorème fondamental, relativement aux faisceaux et aux carapaces homotopiquement fins (et valable, a fortiori, pour les carapaces et faisceaux fins). Bornons-nous ici à donner un exemple important :

Carapace des chaînes singulières. Dans un espace quelconque $\mathfrak{X}$, on a la notion classique de "simplexe singulier". Nous considérons le K-module des combinaison linéaires "localement finies" de simplexes singuliers à coefficients dans l'anneau de base K ; "localement fini" s'explique comme suit : le support d'un simplexe singulier étant défini d'une manière évidente (c'est un ensemble compact), on considère les combinaisons linéaires telles que tout point de l'espace $\mathfrak{X}$ possède un voisinage qui rencontre seulement un nombre fini de supports de simplexes à coefficient non nul. Le support d'une telle combinaison est défini comme étant la réunion des supports des simplexes à coefficient non nul ; c'est bien un ensemble fermé. Muni de ces supports, le K-module en question S a une structure de *carapace*. Nous l'appelons la carapace des chaînes singulières.

La carapace des chaînes singulières est homotopiquement fine. Cela résulte facilement des propriétés de l'opérateur d'homotopie : "subdivision barycentrique mixte" (cf. Séminaire 1948-49, Exp. 8, §3). Il en résulte que, pour tout faisceau de coefficients F , le faisceau $\mathcal{F}(S) \circ F$ est homotopiquement fin ; par suite, *la carapace* $\Gamma(\mathcal{F}(S) \circ F)$ *est homotopiquement fine*, et d'ailleurs *complète*.

Proposons-nous d'interpréter $\Gamma(\mathcal{F}(S) \circ F)$; c'est le module des sommes localement finies de simplexes, chacun étant affecté d'une *section* de F au-dessus de son support ; l'opérateur "bord" s'interprète facilement. Lorsque le faisceau F est *localement constant*, une section de F au-dessus du support d'un simplexe singulier (défini par un simplexe euclidien s et une application continue f de s dans $\mathfrak{X}$) définit sur s un faisceau localement constant, image réciproque de F par f , donc un faisceau *constant* (puisque s est contractile). Autrement dit, soit G un module isomorphe aux modules F_x du faisceau constant F ; le module $\Gamma(\mathcal{F}(S) \circ F)$ s'identifie au module des combinaisons localement finies de simplexes singuliers à coefficients dans G , l'opérateur "bord" se calculant à la manière du "bord" dans les chaînes singulières à "coefficients locaux" de Steenrod.

En particulier, si F est un faisceau *constant* G , $\Gamma(\mathcal{F}(S) \circ G)$ n'est autre que le module des chaînes singulières ordinaires à coefficients dans le module G (à cela près qu'on considère des sommes éventuellement infinies, mais localement finies). Ainsi : les chaînes singulières à valeurs dans G forment une carapace *homotopiquement fine et complète*. C'est notamment le cas de la carapace S elle-même (prendre G = K) : elle est *complète*.

Appendice : *cohomologie à supports compacts d'un espace-produit*.

Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux espaces localement compacts ; notons indifféremment Φ la famille des compacts de $\mathfrak{X}$, ou de $\mathfrak{Y}$, ou de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$. Soient A et B deux carapaces à supports compacts, sur $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ resp. Supposons que A soit fine, et que B soit fine. Nous nous proposons de montrer que la *précarapace* $A \otimes B$, sur l'espace-produit $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, est une *carapace fine*.

Il n'est pas évident que $A \times B$ satisfasse à l'axiome (Car II) qui impliquerait que $A \otimes B$ est une carapace. Nous allons montrer que si un élément

$\gamma = \sum_k \alpha_k \otimes \beta_k$ a un support vide, il est nul. Prenons dans $\mathfrak{X}$ un compact X qui contienne les supports des α_k, et dans $\mathcal{Y}$ un compact Y qui contienne les supports des β_k. Pour tout recouvrement ouvert du compact $X \times Y$ de l'espace $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$, il existe un recouvrement fini plus fin, de la forme $(\mathcal{U}_i \times \mathcal{V}_j)$, où les $\mathcal{U}_i$ recouvrent X, et les $\mathcal{V}_j$ recouvrent Y. Soient ℓ_i les endomorphismes de A associés aux $\mathcal{U}_i$, et ℓ'_j les endomorphismes de B associés aux $\mathcal{V}_j$. Pour chaque k, on a $\alpha_k = \sum_i \ell_i(\alpha_k)$, $\beta_k = \sum_j \ell'_j(\beta_k)$; donc

$$\gamma = \sum_{i,j} \ell_{ij}(\gamma) \quad ,$$

en désignant par ℓ_{ij} l'endomorphisme $\ell_i \otimes \ell'_j$ du produit tensoriel $A \otimes B$. Or si le support de γ est vide, on pourra s'arranger pour que chacun des $\ell_{ij}(\gamma)$ soit nul (en prenant un recouvrement ouvert assez fin du compact $X \times Y$). Il s'ensuit bien que $\gamma = 0$.

Ainsi, il est prouvé que $A \otimes B$ est une véritable carapace. Il est immédiat que $A \otimes B$ est -fine. Elle est donc Φ-complète.

En particulier, soit C_1 un faisceau fondamental de $\mathfrak{X}$, et C_2 un faisceau fondamental de $\mathcal{Y}$. Alors $C_1 \otimes C_2$ est un faisceau fondamental de l'espace-produit $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$. Φ désignant toujours la famille des compacts, il résulte de ce qui précède que la carapace $\Gamma_\Phi(C_1) \otimes \Gamma_\Phi(C_2)$, sur l'espace-produit, s'identifie à $\Gamma_\Phi(C_1 \otimes C_2)$. Plus généralement, si F_1 et F_2 sont des faisceaux de coefficients, sur $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement, $\Gamma_\Phi(C_1 \circ F_1) \otimes \Gamma_\Phi(C_2 \circ F_2)$ s'identifie au module $\Gamma_\Phi((C_1 \otimes C_2) \circ (F_1 \otimes F_2))$, dont la cohomologie est la <u>cohomologie à supports compacts de</u> $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$, à coefficients dans $F_1 \otimes F_2$. On peut donc appliquer la "formule de Künneth", qui reliera cette cohomologie aux cohomologies à supports compacts des espaces $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$, à coefficients dans F_1 et F_2 respectivement.