Séminaire Henri Cartan

H. Cartan

Faisceaux sur un espace topologique. II

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. n° 15, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A15_0>

Séminaire H. CARTAN,
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique

FAISCEAUX SUR UN ESPACE TOPOLOGIQUE, II.
(Exposé de H. CARTAN, le 16.4.1951).

5.- Faisceaux fins.

Définition : un faisceau F de K-modules (éventuellement, de K-modules gradués) est fin si, pour tout recouvrement localement fini de l'espace $\mathcal{X}$ par des ouverts $\mathcal{U}^i$, il existe des endomorphismes ℓ^i du faisceau F (cf. Exp. 14, numéro 3) tels que :

1° pour chaque i , l'endomorphisme ℓ^i soit nul en dehors d'un fermé contenu dans $\mathcal{U}^i$;

2° la somme $\sum_i \ell^i$ soit l'identité.

Cette définition appelle quelques commentaires : on dit qu'une famille de sous-ensembles d'un espace topologique $\mathcal{X}$ est localement finie si tout point de $\mathcal{X}$ possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles de la famille. Dans la condition 2° ci-dessus, figure une somme $\sum_i \ell^i$ qui est en général infinie ; mais $\sum_i \ell^i$ a toujours un sens, car, au voisinage de chaque point $x \in \mathcal{X}$, les ℓ^i définissent des endomorphismes du faisceau induit, qui sont nuls sauf un nombre fini.

Proposition 1.- Soient F et G deux faisceaux sur un même espace $\mathcal{X}$; si l'un d'eux est fin, le produit tensoriel $F \circ G$ est fin.

En effet, supposons que F soit fin, et soient ℓ^i les endomorphismes de F , relatifs à un recouvrement ouvert localement fini de $\mathcal{X}$. Soit k^i le produit tensoriel de l'endomorphisme ℓ^i de F et de l'endomorphisme identique de G ; les k^i sont des endomorphismes de $F \circ G$, dont l'existence prouve que $F \circ G$ est fin.

6.- Exemples de faisceaux fins.

Faisceau des fonctions à valeurs dans l'anneau K : pour chaque ouvert X , soit F_X le module des fonctions définies dans X et à valeurs dans K . Pour tout couple d'ouverts X , Y tels que $Y \supset X$, on a un homomorphisme naturel f_{XY} de F_Y dans F_X : à une fonction définie dans Y on fait correspondre sa restriction à X . Les F_X et les homomorphismes f_{XY} définissent un faisceau

F , conformément à l'Exp. 14, numéro 2. Il est évident que l'homomorphisme $F_X \longrightarrow \Gamma(F, X)$ de F_X dans le module des sections au-dessus de X est un <u>isomorphisme sur</u> ; autrement dit, F_X s'identifie au module des sections de F au-dessus de l'ouvert X . Ce faisceau F est <u>fin</u> : car si $(\mathfrak{U}^i)$ est un recouvrement ouvert, localement fini, de $\mathfrak{X}$, il existe des fonctions f_i , définies dans $\mathfrak{X}$, à valeurs 0 ou 1 , telles que f_i soit nulle en dehors de $\mathfrak{U}^i$, et $\sum_i f_i = 1$. Alors la multiplication par f_i définit un endomorphisme du faisceau F , dont le support est contenu dans l'adhérence de $\mathfrak{U}^i$, et ces endomorphismes prouvent que F est fin. (Un système de fonctions f_i telles que ci-dessus sera appelé une "partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(\mathfrak{U}^i)$").

<u>Faisceau des cochaînes d'Alexander-Spanier</u> : pour chaque entier $n \geqslant 0$, on a un faisceau des cochaînes d'Alexander-Spanier de degré n (à valeurs dans K). Pour $n = 0$, c'est le faisceau défini dans l'exemple précédent. Pour n quelconque, soit C^n_X le module des fonctions de $n + 1$ variables $x_0 , x_1 , \dots , x_n \in X$ (X désignant un ouvert de l'espace $\mathfrak{X}$) ; pour $Y \supset X$, on définit comme ci-dessus l'homomorphisme de C^n_Y dans C^n_X , d'où un faisceau C^n . Ce faisceau est fin : en effet, on sait classiquement définir le produit d'une 0-cochaîne f et d'une n-cochaîne g , comme étant la n-cochaîne h telle que $h(x_0 , \dots , x_n) = f(x_0)\, g(x_0 , \dots , x_n)$; ici, f est supposée à valeurs entières. Cela étant, si (f_i) est, comme dans l'exemple précédent, une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement ouvert localement fini, la multiplication par f_i définit un endomorphisme ℓ^i du faisceau C^n , et ces endomorphismes ℓ^i prouvent que C^n est un faisceau fin.

L'homomorphisme $C^n_X \longrightarrow \Gamma(C^n , X)$ applique le module C^n_X des cochaînes définies dans l'ouvert X , <u>sur</u> le module des <u>sections</u> du faisceau C^n au-dessus de X , tout au moins si l'espace X est <u>paracompact</u> (séparé) ; la démonstration n'est pas immédiate, et ne sera pas donnée ici. Par contre, l'homomorphisme $C^n_X \longrightarrow \Gamma(C^n , X)$ <u>n'est pas biunivoque</u> pour $n > 0$; le noyau se compose des cochaînes <u>de support vide</u> (le support d'un élément α de C^n_X est l'ensemble des points $x \in X$ tels que l'image de α dans C^n_x soit $\neq 0$).

<u>Faisceau des cochaînes singulières</u> : nous ne rappelons pas la définition d'un simplexe singulier de dimension n . Soit, pour X ouvert dans $\mathfrak{X}$, S^n_X le K-module des n-cochaînes singulières de X , à valeurs dans K , c'est-à-dire des fonctions des n-simplexes singuliers de X , à valeurs dans K .

Pour $Y \supset X$, l'homomorphisme de S_Y^n dans S_X^n est évident. D'où un faisceau S^n . Ce faisceau est fin : on sait classiquement définir le produit d'une cochaîne singulière de degré 0 (qui est aussi une cochaîne d'Alexander-Spanier) par une cochaîne singulière de degré n ; alors une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert localement fini $(\mathcal{U}^i)$ permet de montrer que S^n est un faisceau fin.

Ici encore, si X est paracompact, l'homomorphisme $S_X^n \longrightarrow \Gamma(S^n, X)$ applique S_X^n <u>sur</u> le module des sections du faisceau S^n au dessus de X . Le noyau de cet homomorphisme se compose des n-cochaînes singulières de X dont le <u>support est vide</u> (le support d'une cochaîne singulière $\alpha \in S_X^n$ a pour complémentaire l'ensemble des points $x \in X$ qui possèdent un voisinage ouvert $Y \subset X$ tel que l'image de α dans S_Y^n soit nulle).

<u>Faisceau des formes différentielles sur une variété différentiable</u> :
$\mathfrak{X}$ étant une variété (k fois) différentiable, soit, pour tout ouvert X de $\mathfrak{X}$, Ω_X^n l'espace vectoriel (réel) des formes différentielles (à coefficients (k-1) fois différentiables) définies dans X . Pour $Y \supset X$, l'homomorphisme $\Omega_Y^n \longrightarrow \Omega_X^n$ est évident. Ceci définit le faisceau Ω^n des formes différentielles de degré n . Ce faisceau est <u>fin</u> : pour tout recouvrement ouvert localement fini, on sait qu'il existe une "partition (k fois) différentiable de l'unité", subordonnée au recouvrement. La multiplication par les fonctions de cette partition fournit les endomorphismes ℓ^i cherchés.

Pour tout ouvert X , l'homomorphisme $\Omega_X^n \longrightarrow \Gamma(\Omega^n, X)$ est un <u>isomorphisme sur</u> ; en particulier, l'espace vectoriel des sections de Ω^n s'identifie à l'espace vectoriel des formes différentielles de la variété $\mathfrak{X}$.

7.- <u>Introduction des familles</u> Φ .

Soit Φ une famille de parties <u>fermées</u>, <u>paracompactes</u>, de l'espace $\mathfrak{X}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

(Φ 1) Toute partie fermée d'un ensemble de Φ est dans Φ ;
(Φ 2) La réunion de deux ensembles de Φ est dans Φ ;
(Φ 3) Tout ensemble de Φ possède un voisinage fermé qui est dans Φ .

<u>Exemple</u> : si X est localement compact, les compacts forment une famille Φ . Si X est paracompact, tous les fermés forment une famille Φ .

Soit un faisceau F . Dans le module $\Gamma(F)$ des sections de F (il ne s'agit ici que des sections au-dessus de l'espace $\mathfrak{X}$ tout entier), on a défini le support d'un élément de $\Gamma(F)$ (cf. 14, numéro 1). On notera $\Gamma_\Phi(F)$

l'ensemble des éléments de $\Gamma(F)$ dont le support a un voisinage dans la famille Φ ; il est clair que $\Gamma_{\Phi}(F)$ est un sous-module de $\Gamma(F)$.

Dans l'Exp.14, 3, on a défini $\Gamma(F)$ comme foncteur du faisceau F . Pour tout homomorphisme d'un faisceau F dans un faisceau F' , on a un homomorphisme de $\Gamma(F)$ dans $\Gamma(F')$, et comme l'image d'un élément x de $\Gamma(F)$ a son support contenu dans le support de x , cet homomorphisme applique $\Gamma_{\Phi}(F)$ dans $\Gamma_{\Phi}(F')$, pour toute famille Φ . Ceci définit le module $\Gamma_{\Phi}(F)$ comme foncteur du faisceau F .

<u>Proposition 2</u>.- Le foncteur $\Gamma_{\Phi}(F)$ est <u>exact à gauche</u> : cela signifie que, pour toute suite exacte de faisceaux et d'homomorphismes

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0 ,$$

la suite des homomorphismes associés

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(F') \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(F) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(F'')$$

est exacte (par contre, l'homomorphisme $\Gamma_{\Phi}(F) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(F'')$ n'applique pas, en général, $\Gamma_{\Phi}(F)$ <u>sur</u> $\Gamma_{\Phi}(F'')$).

La démohstration de cette proposition est triviale, et laissée au lecteur. Elle ne nécessite pas que l'on suppose que les ensembles de Φ soient paracompacts. Par contre, l'hypothèse de paracompacité est essentielle pour le théorème qui va suivre, théorème qui jouera plus tard un rôle fondamental :

<u>Théorème</u>.- Soit $f : F \longrightarrow G$ un homomorphisme d'un faisceau F <u>sur</u> un faisceau G , et soit F' le noyau de f . Supposons que F' soit <u>fin</u>, et soit Φ une famille de parties fermées, paracompactes, satisfaisant à (Φ 1) , (Φ2) et (Φ3) . Alors l'homomorphisme f^* : $\Gamma_{\Phi}(F) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(G)$ défini par f est un <u>homomorphisme sur</u>.

<u>Démonstration</u> : Soit donnée une section $x \longrightarrow \gamma(x)$ du faisceau G , dont le support A soit dans Φ . Soit B un voisinage fermé de A qui soit dans Φ ; on va montrer qu'il existe une section $x \longrightarrow \varphi(x)$ du faisceau F , de support contenu dans B , telle que f^* transforme φ dans γ .

D'abord, il existe un recouvrement de $\mathfrak{X}$ par des ouverts $\mathfrak{U}^i$ tous contenus dans B sauf un (soit $\mathfrak{U}^o$, qu'on peut supposer être le complémentaire de A), et, pour chaque $\mathfrak{U}^i$, une section φ^i de F au-dessus de $\mathfrak{U}^i$, de manière que $f^*(\varphi^i)$ soit la restriction γ^i de γ au-dessus de $\mathfrak{U}^i$. On supposera que φ^o est la section <u>nulle</u> au-dessus de $\mathfrak{U}^o$. De plus, en vertu de la paracompacité de B , on peut supposer que les $\mathfrak{U}^i$ forment un recouvrement <u>localement fini</u> de $\mathcal{X}$.

Pour tout couple (i, j) , $\varphi^i - \varphi^j$ est une section φ^{ij} de F' au-dessus de $\mathcal{U}^i \cap \mathcal{U}^j$, et on a, dans $\mathcal{U}^i \cap \mathcal{U}^j \cap \mathcal{U}^k$, $\varphi^{ij} + \varphi^{jk} = \varphi^{ik}$. Puisque F' est fin, il existe des endomorphismes ℓ^i du faisceau F' tels que : 1° ℓ^i soit nul en dehors d'un fermé contenu dans $\mathcal{U}^i$; 2° $\sum_i \ell^i$ soit l'identité. Alors $\ell^j(\varphi^{ij})$, prolongé par 0 en tout point de $\mathcal{U}^i - \mathcal{U}^i \cap \mathcal{U}^j$, est une section de F' au-dessus de $\mathcal{U}^i$, et $\varphi'^i = \sum_j \ell^j(\varphi^{ij})$ est une section de F' au-dessus de $\mathcal{U}^i$. Un calcul facile montre que, dans $\mathcal{U}^i \cap \mathcal{U}^j$, on a

$$\varphi'^i - \varphi'^j = \varphi^{ij} ;$$

alors $\varphi^i - \varphi'^i$ est la restriction à $\mathcal{U}^i$ d'une section φ de F ; son support est contenu dans B , et f^* transforme φ en γ , ce qui achève la démonstration.

8.- <u>Application du théorème précédent</u>.

Disons qu'un faisceau F est <u>sans torsion</u> si, en chaque point x , le module F_x est sans torsion (rappelons que l'anneau de base K est un anneau <u>principal</u>, et en particulier un anneau d'intégrité).

<u>Proposition 3</u>.- Soit une suite exacte de faisceaux et d'homomorphismes : $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$; et soit G un faisceau <u>fin</u>. Alors, si l'un au moins des faisceaux F'' et G est sans torsion, la suite

$$0 \longrightarrow \Gamma_\Phi(F' \circ G) \longrightarrow \Gamma_\Phi(F \circ G) \longrightarrow \Gamma_\Phi(F'' \circ G) \longrightarrow 0$$

est une <u>suite exacte</u>. (Φ désigne une famille d'ensembles paracompacte, comme il a été expliqué au numéro 7).

Démonstration : tout d'abord, la suite

$$0 \longrightarrow F' \circ G \longrightarrow F \circ G \longrightarrow F'' \circ G \longrightarrow 0$$

est exacte, parce que, pour chaque point x , l'un des modules G_x et $F_x/F'_x = F''_x$ est sans torsion (propriété classique du produit tensoriel des modules sur un anneau principal). En lui appliquant la proposition 2 , on trouve que la suite $0 \longrightarrow \Gamma_\Phi(F' \circ G) \longrightarrow \Gamma_\Phi(F \circ G) \longrightarrow \Gamma_\Phi(F'' \circ G)$ est exacte ; reste à montrer que $\Gamma_\Phi(F \circ G) \longrightarrow \Gamma_\Phi(F'' \circ G)$ est un homomorphisme <u>sur</u>. Or cela résulte du théorème du numéro 7, puisque $F' \circ G$ est fin.

<u>Corollaire</u> : si G est un faisceau <u>fin et sans torsion</u>, le foncteur

$\Gamma_{\Phi}(F \circ G)$ (foncteur du faisceau F, à valeurs dans les K-modules) est un foncteur exact (i.e.: transforme toute suite exacte de faisceaux en une suite exacte de modules).

9.- Faisceau gradué avec cobord.

Une structure graduée, sur un faisceau F, est définie par la donnée de sous-faisceaux F^n (n parcourt l'ensemble des entiers ≥ 0 ou < 0), tels que, pour tout point x, le module F_x soit somme directe de ses sous-modules $(F^n)_x$. Si, pour chaque n et chaque x, on considère le projecteur $(p^n)_x$ de F_x sur $(F^n)_x$, la collection des $(p^n)_x$, quand n est fixé et que x parcourt l'espace, définit un endomorphisme p^n du faisceau F, qui l'applique sur F^n, et est un projecteur (i.e.: est idempotent).

Un faisceau gradué avec cobord est un faisceau gradué F dans lequel on s'est en outre donné un endomorphisme δ (du faisceau F) tel que $\delta\delta = 0$ et $\delta p^n = p^{n+1}\delta$; ainsi δ applique F^n dans F^{n+1} (on dit que δ est de degré +1).

Si F est un faisceau gradué avec cobord, les modules de sections $\Gamma(F,X)$ sont des modules gradués avec cobord (noté encore δ) ; de même pour les modules $\Gamma_{\Phi}(F)$.

Pour définir un faisceau gradué avec cobord, on pourra, à chaque ouvert X (ou seulement aux ouverts d'une famille fondamentale) associer un module gradué avec cobord F_X, et, pour $Y \supset X$, se donner un endomorphisme f_{XY} de F_Y dans F_X, qui soit compatible avec la structure graduée et avec le cobord et satisfasse aux conditions usuelles de transitivité ; alors la limite inductive F_x des F_X relatifs aux ouverts X contenant un point x, sera un module gradué avec cobord ; et le faisceau F défini par ces F_x est un faisceau gradué avec cobord.

Soit F un faisceau avec cobord. Le noyau de l'endomorphisme δ est un sous-faisceau noté $Z(F)$ (faisceau des cocycles) et l'image de δ est un sous-faisceau de $Z(F)$, noté $B(F)$ (faisceau des cobords). On a la suite exacte $0 \longrightarrow Z(F) \longrightarrow F \longrightarrow B(F) \longrightarrow 0$; d'autre part, le faisceau-quotient de $Z(F)$ par son sous-faisceau $B(F)$ se note $H(F)$ et s'appelle le faisceau de cohomologie du faisceau F ; d'où la suite exacte

$$0 \longrightarrow B(F) \longrightarrow Z(F) \longrightarrow H(F) \longrightarrow 0 .$$

$Z(F)$ et $B(F)$ étant des faisceaux gradués, il en est de même de $H(F)$; on note $H^n(F)$ le sous-faisceau des éléments de degré n de $H(F)$.

<u>Remarque</u> : on prendra bien garde que $H(F)$ n'est pas un module, mais un <u>faisceau</u> de modules. Pour toute famille Φ , le module $\Gamma_\Phi(F)$ possède un module de cohomologie, $H(\Gamma_\Phi(F))$, qu'on se gardera de confondre avec le faisceau de cohomologie $H(F)$.

10.- <u>Exemples de faisceaux gradués avec cobord</u>.

Reprenons les exemples donnés au numéro 6 ci-dessus :

<u>Faisceau d'Alexander-Spanier</u> : pour chaque entier n , on a défini le faisceau C^n (pour $n < 0$, poser $C^n = 0$). La somme directe des C^n est un faisceau gradué C . On y définit un cobord δ de degré $+1$ à la manière habituelle : il suffit, pour chaque ouvert X , de définir le cobord d'une n-cochaîne de X . <u>Le faisceau de cohomologie de</u> C <u>est trivial</u> ; par là nous entendons que $H^n(C) = 0$ pour $n \neq 0$, et que $H^0(C)$ est isomorphe au faisceau simple défini par l'anneau K . Pour la démonstration, voir Séminaire 1948/49, exposé 7, numéro 8 (on utilise un opérateur d'homotopie).

<u>Faisceau des cochaînes singulières</u> : on prend la somme directe des faisceaux S^n définis au numéro 6 , et on y définit un cobord à la manière classique. Il n'est pas certain que le faisceau de cohomologie $H(S)$ soit trivial ; toutefois, il en est ainsi lorsque l'espace $\mathfrak{X}$ est un espace HLC (voir Séminaire 1948/49, exposé 12, 2 et Rectifications au début de 14).

<u>Faisceau des formes différentielles sur une variété</u> : soit Ω^n le faisceau des formes différentielles de degré n , à coefficients $(k-1)$ fois différentiables, dont la différentielle extérieure a ses coefficients $(k-1)$ fois différentiables $(k \geq 1)$. Dans la somme directe Ω , l'opérateur de différentiation extérieure définit un cobord δ de degré $+1$, et par suite Ω est un faisceau gradué avec cobord. <u>Son faisceau de cohomologie</u> $H(\Omega)$ <u>est trivial</u> (en particulier, $H^0(\Omega)$ est un faisceau simple isomorphe à R , corps des réels). Pour la démonstration, voir Séminaire 1948/49, exposé 7, 7.