H. Cartan

Espaces avec groupes d'opérateurs. I : notions préliminaires

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. n° 11, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A11_0>

Séminaire H. CARTAN,
E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique.

ESPACES AVEC GROUPES D'OPÉRATEURS
I. Notions préliminaires.
(Exposé de H. CARTAN, 19.2.1951).

Ces deux exposés développent le contenu de 2 Notes aux Comptes Rendus de H. CARTAN (C.R. Acad. Sci. Paris, 226, 1948, p. 148 et p. 303). Pour une bibliographie de la question, voir S. EILENBERG, Bull. amer. math. Soc., 55, 1949, p. 3-27 : numéros 6,7,8,9,10,13,19,20,21,25,26 de la Bibliographie de ce travail.

1.- Espace avec groupe d'opérateurs.

$\mathfrak{X}$: espace topologique dans lequel un groupe discret π opère (à droite).

$\mathfrak{B}$: espace topologique quotient $\mathfrak{X}/\pi$.

Dire que $\mathfrak{X}$ est fibré principal (de groupe π) équivaut à dire que chaque point $x \in \mathfrak{X}$ possède un voisinage V tel que, pour tout $s \in \pi$ distinct de l'élément neutre e , V et Vs ne se rencontrent pas. Nous dirons, pour abréger le langage, que le groupe π opère sans point fixe dans $\mathfrak{X}$. Dans ce cas, $\mathfrak{B}$ est l'espace de base de l'espace fibré $\mathfrak{X}$, de fibre discrète isomorphe à π ; et $\mathfrak{X}$ est un revêtement de $\mathfrak{B}$.

Dans tous les cas, soit X le complexe des chaînes singulières de $\mathfrak{X}$ (à coefficients entiers, ou, plus généralement, à coefficients dans un groupe abélien). Le groupe π opère à droite dans X , d'une manière compatible avec le bord ∂ de X $(\partial(x.s) = (\partial x).s)$, et en respectant la graduation de X . Lorsque π opère sans point fixe dans $\mathfrak{X}$, le complexe des chaînes singulières de $\mathfrak{B}$ s'identifie au complexe X_π , quotient du complexe X par la relation d'équivalence définie par π .

Soit aussi Y le complexe des cochaînes singulières de l'espace $\mathfrak{X}$ (à coefficients dans un groupe abélien G) . Le groupe π opère à gauche dans Y , d'une manière compatible avec le cobord δ et la graduation. Le groupe π opère aussi dans le complexe des cochaînes de Čech-Alexander de l'espace $\mathfrak{X}$. Dans un cas comme dans l'autre, le complexe des cochaînes de l'espace $\mathfrak{B}$, lorsque π opère sans point fixe dans $\mathfrak{X}$, s'identifie au sous-complexe Y^π des éléments de Y invariants par π . On notera que si le groupe de coefficients G est muni d'une structure d'anneau, il en est de même de Y et de Y^π , qui deviennent des algèbres différentielles graduées.

Ceci nous conduit à étudier, en général, l'une des situations algébriques suivantes :

X est un complexe gradué, muni d'un opérateur bord ∂ de degré -1 , dans lequel un groupe π opère à droite d'une manière compatible avec ∂ et avec la graduation.

Y est une algèbre différentielle graduée, (dont le cobord δ est une différentielle de degré $+1$) ; un groupe π opère à gauche dans Y , d'une manière compatible avec δ et avec la graduation et la multiplication (N.B. : le cas où Y ne possède pas de structure multiplicative peut toujours être considéré comme un cas particulier de celui où il en possède : il suffit d'introduire une multiplication nulle).

2.- <u>Complexe à opérateurs : homologie d'un groupe π à coefficients dans un complexe gradué où π opère (à droite)</u>.

Soit X un complexe gradué (avec ∂ de degré -1) dans lequel π opère à droite, comme ci-dessus. On va faire une construction algébrique qui s'inspire des analogies topologiques que voici : on sait (Séminaire 1949-50, Exposé 6, 6) qu'un espace fibré principal $\mathcal{C}$ (où π opère à gauche) et un espace topologique $\mathfrak{X}$ (où π opère à droite) définissent un nouvel espace fibré, de même base que $\mathcal{C}$, de fibre $\mathfrak{X}$, de groupe structural π (N.B. : par rapport aux notations de 49-50, la gauche et la droite sont échangées). Cet espace, noté $(\mathfrak{X}, \mathcal{C})$, est le quotient du produit $\mathfrak{X} \times \mathcal{C}$ par la relation d'équivalence définie par les opérations suivantes de π :

$$(x , y) \longrightarrow (x.s^{-1} , s.y) \qquad (s \in \pi) .$$

Ce qui va jouer ici le rôle d'un espace fibré principal $\mathcal{C}$, c'est un complexe C pour le groupe π (cf exposé 2) : C est un π-complexe (à gauche), π-libre et acyclique (au sens de 2). Rappelons que, le groupe π étant donné, un tel complexe C est déterminé à une π-homotopie près. Rappelons aussi qu'on peut définir un π-homomorphisme permis $C \longrightarrow C \otimes_Z C$, lui aussi défini à une π-homotopie près, qui donnera naissance aux produits dans la cohomologie du groupe π (exposé 4, 4).

Voici maintenant la construction algébrique que l'on va faire avec X et C . Par analogie avec l'espace $(\mathfrak{X}, \mathcal{C})$, quotient de $\mathfrak{X} \times \mathcal{C}$, nous considérons le produit tensoriel $X \otimes_\pi C$, quotient de $X \otimes_Z C$ par la relation d'équivalence définie par π :
$(x.s^{-1}) \otimes (s.y) \equiv x \otimes y$. Ce groupe $X \otimes_\pi C$ est <u>bigradué</u> par les graduations

de X et de C ; on en déduit une graduation de $X \otimes_\pi C$: un élément $x \otimes y$, où x est de degré p et y de degré q, sera de "degré total" $p+q$. Définissons sur $X \otimes_\pi C$ un opérateur "bord" par la formule habituelle

$$\partial(x \otimes y) = (\partial_X x) \otimes y + (-1)^p x \otimes (\partial_C y) \quad , \qquad p = \text{degré de } x .$$

Alors, $X \otimes_\pi C$ devient un complexe gradué (par le degré total), muni d'un bord ∂ de degré -1.

<u>Définition 1</u> - Le groupe d'homologie $H(X \otimes_\pi C)$, qui est indépendant du choix de C, se note $H(\pi, X)$ et s'appelle le groupe d'homologie du groupe π à coefficients dans le complexe X où π opère à droite. C'est un groupe <u>gradué</u> (par le degré total de $X \otimes_\pi C$).

3.- <u>Algèbre différentielle à opérateurs : cohomologie d'un groupe π à coefficients dans une algèbre différentielle graduée où π opère (à gauche)</u>.

Soit Y une telle algèbre différentielle graduée. On considère le groupe $\mathrm{Hom}_\pi(C, Y)$, sous-groupe de $\mathrm{Hom}_Z(C, Y)$. C'est un groupe bigradué : $\mathrm{Hom}_\pi(C_p, Y^q)$ s'identifie canoniquement à un sous-groupe facteur direct de $\mathrm{Hom}_\pi(C, Y)$. Nous ne nous intéresserons qu'à la somme (directe) des $\mathrm{Hom}_\pi(C_p, Y^q)$ dans $\mathrm{Hom}_\pi(C, Y)$; c'est un groupe que nous désignerons par $\mathrm{Hom}'_\pi(C, Y)$. Il est gradué par le degré total.

On définit une multiplication dans $\mathrm{Hom}'_\pi(C, Y)$:

$$\mu : \mathrm{Hom}_\pi(C_{p_1}, Y^{q_1}) \otimes_Z \mathrm{Hom}_\pi(C_{p_2}, Y^{q_2}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\pi(C_{p_1+p_2}, Y^{q_1+q_2})$$

est obtenu comme suit. Soient $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}_\pi(C_{p_1}, Y^{q_1})$ et $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}\,(C_{p_2}, Y^{q_2})$; prenons $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(C_{p_1} \otimes_Z C_{p_2}, Y^{q_1+q_2})$ défini par

$$\varphi(u \otimes v) = (-1)^{p_2 q_1} \quad \varphi_1(u)\, \varphi_2(v) \quad ,$$

puis composons avec l'application $C_{p_1+p_2} \longrightarrow C_{p_1} \otimes_Z C_{p_2}$: on obtient un homomorphisme ψ de $C_{p_1+p_2}$ dans $Y^{q_1+q_2}$, qui sera par définition $\mu(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$.

Enfin, on définit dans $\mathrm{Hom}'_\pi(C, Y)$ un opérateur δ, de degré $+1$, comme suit : si $f \in \mathrm{Hom}_\pi(C_p, Y)$, on pose

$$(\delta f)(x) = f(\partial_C x) + (-1)^p \delta_Y(f(x)) .$$

on vérifie que δ est bien une différentielle vis-à-vis de la multiplication μ. Ainsi $\mathrm{Hom}'_\pi(C, Y)$ est une algèbre différentielle graduée.

<u>Définition 1 bis</u> - L'anneau de cohomologie $H(\mathrm{Hom}'_{\pi}(C\ ,\ Y))$, qui est indépendant du choix de C et de l'application $C \longrightarrow C \otimes_{Z} C$, se note $H^{*}(\pi\ ,\ Y)$ et s'appelle l'anneau de cohomologie du groupe π à coefficients dans l'algèbre différentielle Y où π opère à gauche. C'est un anneau gradué (par la graduation totale de $\mathrm{Hom}'_{\pi}(C\ ,\ Y))$.

4.- <u>Quelques homomorphismes canoniques</u>.-

En ce qui concerne l'homologie, on a les homomorphismes suivants :

$$(S) \qquad H_q(X) \xrightarrow{\alpha_*} H_q(X_{\pi}) \xleftarrow{\beta_*} H_q(\pi\ ,\ X) \xrightarrow{\gamma_*} H_q(\pi\ ,\ H_o(X)) \quad ,$$

qui proviennent des homomorphismes permis :

$$X \xrightarrow{\alpha} X_{\pi} = X \otimes_{\pi} Z \xleftarrow{\beta} X \otimes_{\pi} C \xrightarrow{\gamma} H_o(X) \otimes_{\pi} C$$

que l'on va expliciter : Z désigne l'anneau des entiers dans lequel opère trivialement ; β est défini par l'"augmentation" $C \longrightarrow Z$, composée de $C \longrightarrow C_o$ et de $C_o \longrightarrow Z$ (cf exposé 2) ; γ est défini par l'homomorphisme $X \longrightarrow H_o(X)$, composé de $X \longrightarrow X_o$ et de $X_o \longrightarrow H_o(X)$ (ne pas oublier que tous les éléments de X_o sont des cycles) .

Les homomorphismes de la suite (S) sont toujours définis, de quelque manière que π opère sur X . Mais supposons maintenant que X soit π-libre, et muni d'une augmentation $X \longrightarrow Z$ pour laquelle X est acyclique (cf. 2). Considérons le complexe $\tilde{C}$, qui n'est autre que C dans lequel on fait opérer π <u>à droite</u> par $x \longrightarrow s^{-1}.x$ $(s \in \pi)$. D'après l'exposé 4 (numéro 1) il existe un π-homomorphisme permis de X dans $\tilde{C}$, compatible avec les augmentations. Or, d'une manière générale, on a des compatibilités, qu'exprime l'énoncé suivant :

<u>Proposition 1</u> - Supposons donné un π-homomorphisme permis $X \longrightarrow \tilde{C}$, d'où résulte un homomorphisme permis ε : $X \otimes_{\pi} Z \longrightarrow \tilde{C} \otimes_{\pi} Z$. Supposons de plus donnée une "augmentation" $H_o(X) \longrightarrow Z$ (compatible avec les opérations de π , qui opère trivialement dans Z) qui soit compatible avec $X \longrightarrow \tilde{C}$, c'est-à-dire qui donne lieu au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \tilde{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_o(X) & \longrightarrow & Z \end{array}$$

Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_q(\pi\ ,\ X) & \xrightarrow{\gamma_*} & H_q(\pi\ ,\ H_o(X)) \\ \downarrow \beta_* & & \downarrow \\ H_q(X_{\pi}) & \xrightarrow{\varepsilon_*} & H_q(\pi\ ,\ Z) \end{array}$$

Démonstration : Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X \otimes_{\pi} Z & \xleftarrow{\beta} & X \otimes_{\pi} C & \xrightarrow{\gamma} & H_o(X) \otimes_{\pi} C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{C} \otimes_{\pi} Z & \xleftarrow{\beta'} & \widetilde{C} \otimes_{\pi} C & \xrightarrow{\gamma'} & Z \otimes_{\pi} C \end{array}$$

où les deux premiers homomorphismes verticaux sont définis par l'homomorphisme permis $X \longrightarrow \widetilde{C}$, le troisième homomorphisme vertical par l'augmentation $H_o(X) \longrightarrow Z$, et où β' et γ' sont définis par l'augmentation $C \longrightarrow Z$, resp. $\widetilde{C} \longrightarrow Z$. Si on passe à l'homologie dans ce diagramme, il est aisé de voir que, en identifiant $H(\widetilde{C} \otimes_{\pi} Z)$ et $H(Z \otimes_{\pi} C)$ à $H(C_{\pi})$, β'_* et γ'_* sont <u>le même</u> homomorphisme de $H_q(\widetilde{C} \otimes_{\pi} C)$ dans $H_q(C_{\pi}) = H_q(\pi, Z)$. Ceci démontre la proposition.

Passons à la <u>cohomologie</u>. On a des homomorphismes analogues

$$(S') \qquad H^q(\pi, H^o(Y)) \longrightarrow H^q(\pi, Y) \longleftarrow H^q(Y^{\pi}) \longrightarrow H^q(Y)$$

qui proviennent des homomorphismes permis (et compatibles avec la structure multipl.)

$$\mathrm{Hom}^!_{\pi}(C , H^o(Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}^!_{\pi}(C , Y) \longleftarrow \mathrm{Hom}_{\pi}(Z , Y) = Y^{\pi} \longrightarrow Y \quad .$$

En outre :

<u>Proposition 1 bis</u> - Dans les hypothèses de la proposition 1, supposons que $Y = \mathrm{Hom}_Z(X , G)$. L'augmentation $H_o(X) \longrightarrow Z$ définit un homomorphisme $G \longrightarrow H^o(Y)$, et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^q(\pi, G) & \longrightarrow & H^q(Y^{\pi}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(\pi, H^o(Y)) & \longrightarrow & H^q(\pi , Y) \end{array}$$

5.- <u>Conditions suffisantes pour que</u> $H(\pi , X) \longrightarrow H(X_{\pi})$ <u>et</u> $H^*(Y^{\pi}) \longrightarrow H^*(\pi , Y)$ <u>soient des isomorphismes sur</u>.

Nous partirons encore de l'analogie avec le cas des espaces fibrés : revenons à l'espace $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du numéro 2 , et supposons que $\mathcal{X}$ soit aussi fibré principal de groupe π . Alors $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ peut aussi être considéré comme espace fibré de base $\mathcal{B}$ (quotient de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{C}$) , de fibre $\mathcal{C}$. Mais si l'homologie de la fibre est triviale (i.e.: $H_q(\mathcal{C}) = 0$ pour $q \geqslant 1$, $H_o(\mathcal{C}) = Z$) , l'homomorphisme de l'homologie de $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ dans $H(\mathcal{B})$ est un <u>isomorphisme sur</u>. C'est cette situation que nous voulons étudier maintenant d'un point de vue purement algébrique.

Examinons d'abord le cas où les éléments de X seraient tous de degré 0 , l'opérateur ∂ étant donc nul. Alors, dire que $H(\pi, X) \longrightarrow H(X_\pi)$ est un isomorphisme sur, revient à dire que $H_q(\pi, X)$ (groupe d'homologie de π à coefficients dans X) est <u>nul</u> pour $q \geq 1$ ($H_0(\pi, X)$ étant bien entendu X_π). On sait qu'il en est bien ainsi lorsque X est π-libre (exposé 1, 1) . On va trouver maintenant des conditions plus larges.

Notons Λ l'algèbre de π à coefficients entiers. Puisque X est Λ-module à droite, on a une application

$$\varphi : \quad X \otimes_Z \Lambda \longrightarrow X \quad ;$$

considérons, sur $X \otimes_Z \Lambda$, la structure de Λ-module à droite définie par le second facteur Λ ; il est évident que φ est un Λ-homomorphisme de modules à droite, et applique $X \otimes_Z \Lambda$ <u>sur</u> X . Si X est π-libre, le noyau de φ est donc facteur direct (au sens de la structure de Λ-module).

<u>Définition 2</u> - Un π-module à droite X est dit <u>faiblement</u> π-<u>libre</u> si le noyau de φ est facteur direct ; autrement dit, s'il existe un π-homomorphisme $X \longrightarrow X \otimes_Z \Lambda$ qui, composé avec φ , donne l'automorphisme identique de X .

<u>Proposition 2</u> - Si X est faiblement π-libre, les groupes d'homologie $H_q(\pi, X)$ sont nuls pour tout entier $q \geq 1$.

En effet les π-homomorphismes $X \longrightarrow X \otimes_Z \Lambda \longrightarrow X$ définissent des homomorphismes $X \otimes_\pi C \longrightarrow (X \otimes_Z \Lambda) \otimes_\pi C \longrightarrow X \otimes_\pi C$, c'est-à-dire

$$X \otimes_\pi C \longrightarrow X \otimes_Z C \longrightarrow X \otimes_\pi C \quad ,$$

dont le composé est l'identité. Passons à l'homologie ; il vient

$$H_q(\pi, X) \longrightarrow H_q(X \otimes_Z C) \longrightarrow H_q(\pi, X) \quad ,$$

dont le composé est l'identité. Or $H_q(X \otimes_Z C)$ est nul pour $q \geq 1$, parce que $H_q(C) = 0$ pour $q \geq 1$. Il en résulte bien que $H_q(\pi, X) = 0$ pour $q \geq 1$.

Passons maintenant au cas d'un π-module à gauche Y dont tous les éléments sont de degré 0 , l'opérateur δ étant donc nul. Dire que $H^*(Y^\pi) \longrightarrow H^*(\pi, Y)$ est un isomorphisme sur, revient à dire que $H^q(\pi, Y)$ est nul pour tout entier $q \geq 1$; bien entendu, $H^*(Y^\pi) = Y^\pi$ est le groupe de cohomologie $H^0(\pi, Y)$. Nous allons donner des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Y étant identifié à $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, Y)$, on a une application biunivoque

$$\psi : \quad Y \longrightarrow \mathrm{Hom}_Z(\Lambda , Y) \quad ;$$

si l'on considère, sur $\mathrm{Hom}_Z(\Lambda, Y)$, la structure de Λ-module à gauche définie par la structure de Λ-module à droite de Λ, ψ est un Λ-homomorphisme. Si Y est π-injectif (exposé 1), l'image de ψ est facteur direct (au sens de la structure de Λ-module).

Définition 2 bis - Un π-module à gauche Y est dit faiblement π-injectif si l'image de ψ est facteur direct ; autrement dit, s'il existe un π-homomorphisme $\mathrm{Hom}_Z(\Lambda, Y) \longrightarrow Y$ qui, suivant ψ, donne l'automorphisme identique de Y.

Proposition 2 bis - Si Y est faiblement π-injectif, les groupes de cohomologie $H^q(\pi, Y)$ sont nuls pour tout entier $q \geqslant 1$.

La démonstration, analogue à celle de la proposition 1, est laissée au lecteur.

Interprétation de la notion de "faiblement π-injectif". Le π-module à gauche $\mathrm{Hom}_Z(\Lambda, Y)$ n'est pas autre chose que le groupe des applications de π dans Y, dans lequel on fait opérer π à gauche de la manière suivante : une application f est transformée par un $s \in \pi$ en l'application ${}_sf$ définie par ${}_sf(x) = f(xs)$. Dire que Y est faiblement π-injectif revient à dire qu'il existe une trace pour les applications de π dans Y, c'est-à-dire une fonction $f \longrightarrow \mathrm{Sp}(f)$ qui, à chaque f, associe un élément $\mathrm{Sp}(f) \in Y$, avec les propriétés suivantes :

1) $\mathrm{Sp}({}_sf) = s.\mathrm{Sp}(f)$;

2) Si $f(x)$ a la forme $x.y$ (où y est un élément fixe de Y), alors $\mathrm{Sp}(f) = y$.

Par exemple, si Y a la forme $\mathrm{Hom}_Z(X, G)$, où X est faiblement π-libre, Y est faiblement π-injectif (vérification laissée au lecteur).

Les propositions 2 et 2 bis donnent des conditions suffisantes pour que les homomorphismes $H(\pi, X) \longrightarrow H(X_\pi)$ et $H^*(Y^\pi) \longrightarrow H^*(\pi, Y)$ soient des isomorphismes sur, mais seulement dans le cas où les éléments de X (resp. Y) sont de degré 0. Passons maintenant au cas général, par exemple pour X. On notera X' le groupe gradué sous-jacent du complexe X (on fait donc abstraction de l'opérateur ∂ de X, quand on considère X'). Lorsque, pour tout entier n, le π-module à droite X'_n est faiblement π-libre, on dira que le complexe X est faiblement π-libre ; on a alors

$$(5.1) \qquad H_q(\pi, X'_n) = 0 \ \text{ pour tout } q \geqslant 1 \text{ et tout } n$$

(il s'agit des groupes d'homologie de π , à coefficients dans X'_n où π opère à droite).

<u>Théorème 1</u>.- Si les conditions (5.1) sont remplies, l'homomorphisme

$$\beta_* : \quad H(\pi, X) \longrightarrow H(X_\pi)$$

est un <u>isomorphisme sur</u>.

<u>Démonstration</u> : posons pour un instant

$$A = X \otimes_\pi C \quad , \quad B = X \otimes_\pi Z$$

$$A_p = \sum_{n \leq p} X_n \otimes_\pi C \quad , \quad B_p = \sum_{n \leq p} X_n \otimes_\pi Z \quad .$$

A et B sont ainsi munis d'une <u>structure filtrée</u> (les A_p forment une suite monotone et sont stables pour le "bord" ∂ ; de même les B_p) . L'augmentation $C \longrightarrow Z$ définit, on l'a vu, un homomorphisme β de A dans B , d'où un homomorphisme β_* de $H(A)$ dans $H(B)$; et il s'agit de montrer que, moyennant l'hypothèse (5.1), β_* est un isomorphisme sur. Or β applique A_p dans B_p , et définit donc des homomorphismes $A_p/A_{p-1} \longrightarrow B_p/B_{p-1}$ compatibles avec le bord. D'ailleurs $A_p/A_{p-1} \approx X'_p \otimes_\pi C$, et $B_p/B_{p-1} \approx X'_p \otimes_\pi Z$. L'homomorphisme $H(A_p/A_{p-1}) \longrightarrow H(B_p/B_{p-1})$ défini par β est un isomorphisme sur, en vertu de (5.1). Or ceci entraîne que $\beta_* : H(A) \longrightarrow H(B)$ est un isomorphisme sur ; cela résulte en effet des deux lemmes suivants (qui auraient dû trouver place dans l'exposé général consacré à la "suite spectrale") :

<u>Lemme1</u>: Soient A et B deux groupes abéliens avec "bord", et soit f un homomorphisme permis de A dans B ("permis" = compatible avec le bord). Supposons données deux filtrations

$$\dots \subset A_p \subset A_{p+1} \subset \dots \quad , \quad \dots \subset B_p \subset B_{p+1} \subset \dots$$

telles que les A_p (resp. B_p) soient stables pour le bord ; et supposons $f(A_p) \subset B_p$ pour tout entier p . Si, pour tout p , l'homomorphisme $H(A_{p+1}/A_p) \longrightarrow H(B_{p+1}/B_p)$ défini par f est un isomorphisme sur, alors, pour tout entier $q \geqslant 1$ et tout entier p , l'homomorphisme

$$H(A_{p+q}/A_p) \longrightarrow H(B_{p+q}/B_p)$$

est un isomorphisme sur.

Démonstration : par récurrence sur q . C'est vrai pour $q = 1$; supposons-le vrai pour q , et montrons-le pour $q+1$. Les suites exactes

$$0 \longrightarrow A_{p+q}/A_p \longrightarrow A_{p+q+1}/A_p \longrightarrow A_{p+q+1}/A_{p+q} \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow B_{p+q}/B_p \longrightarrow B_{p+q+1}/B_p \longrightarrow B_{p+q+1}/B_{p+q} \longrightarrow 0$$

définissent deux suites exactes pour les groupes d'homologie, et f définit un homomorphisme de la première suite dans la seconde. Autrement dit, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
H(A_{p+q+1}/A_{p+q}) & \longrightarrow & H(A_{p+q}/A_p) & \longrightarrow & H(A_{p+q+1}/A_p) & \longrightarrow & H(A_{p+q+1}/A_{p+q}) & \longrightarrow & H(A_{p+q}/A_p) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow u & & \downarrow & & \downarrow \\
H(B_{p+q+1}/B_{p+q}) & \longrightarrow & H(B_{p+q}/B_p) & \longrightarrow & H(B_{p+q+1}/B_p) & \longrightarrow & H(B_{p+q+1}/B_{p+q}) & \longrightarrow & H(B_{p+q}/B_p)
\end{array}$$

où les suites horizontales sont exactes, et où les homomorphismes verticaux sont ceux définis par f . D'après l'hypothèse de récurrence, les 2 premiers et les 2 derniers homomorphismes verticaux sont des isomorphismes sur ; il en résulte ("lemme des cinq") que l'homomorphisme u est aussi un isomorphisme sur. C.Q.F.D.

Lemme 2 : Les hypothèses du lemme 1 étant conservées, supposons en outre que A et B soient gradués : $A = \sum_n A^n$, $B = \sum_n B^n$, les graduations étant compatibles avec les filtrations (i.e. : si on pose $A_p^n = A^n \cap A_p$, A_p est somme directe des A_p^n ; de même pour B) . Supposons enfin que, pour chaque n , $A_p^n = 0$ pour p assez petit, $A_p^n = A^n$ pour p assez grand. Dans ces conditions, l'homomorphisme $H(A) \longrightarrow H(B)$ défini par f est un isomorphisme sur.

En effet, il suffit de vérifier, pour chaque n , que $H(A^n) \longrightarrow H(B^n)$ est un isomorphisme sur ; cela résulte aussitôt du lemme 1 .

Il y a, pour la cohomologie, un théorème analogue au théorème 1 ; nous nous contentons de l'énoncer :

Théorème 1 bis.- Soit Y un complexe gradué avec opérateur cobord de degré $+1$, et soit Y' le groupe gradué sous-jacent. Supposons

(5.2) $\qquad H^q(\pi, Y'_n) = 0$ pour tout $q \geq 1$ et tout n

(ce qui sera notamment le cas si les Y'_n sont faiblement π-injectifs). Alors l'homomorphisme

$$H^*(Y^\pi) \longrightarrow H^*(\pi, Y) \qquad \text{(défini au paragraphe 4)}$$

est un isomorphisme sur.

6.- Exemples.-

On sait que si le groupe π opère sans point fixe dans un espace $\mathfrak{X}$, et si Y désigne le complexe des cochaînes singulières de $\mathfrak{X}$, Y est π-injectif, puisque $Y = \mathrm{Hom}_Z(X , G)$, X désignant le complexe des chaînes singulières à coefficients entiers, qui est π-libre. Donc le théorème 1 bis s'applique dans ce cas : $H^*(\pi , Y)$ s'identifie à la cohomologie singulière de l'espace $\mathfrak{B}$, quotient de $\mathfrak{X}$ par le groupe π.

On va montrer qu'il en est de même lorsque Y est le complexe des cochaînes de Čech-Alexander, et aussi, lorsque le groupe π est fini et que Y est le complexe des cochaînes singulières (resp. de Čech-Alexander) à support compact ; on suppose toujours que π opère sans point fixe dans l'espace $\mathfrak{X}$.

Démonstration : on sait définir le produit d'une cochaîne (à valeurs dans G) par une fonction de point ne prenant que les valeurs 0 et 1. Or il existe une telle fonction φ, satisfaisant à

$\sum_{s \in \pi} \varphi_s = 1$ (φ_s désigne la transformée de φ par l'opération s du groupe π) ; en effet, il suffit de choisir un point dans chaque classe d'équivalence de $\mathfrak{X}$ suivant π, puis de prendre pour φ la fonction caractéristique de l'ensemble des représentants. Soit alors ω une cochaîne (de degré quelconque), et ω_s sa transformée par s . On va montrer que le groupe Y^n des cochaînes de degré n est faiblement π-injectif, et, pour cela, définir une "trace". Une application f de π dans Y n'est autre qu'une cochaîne $\omega(s)$ dépendant d'une variable $s \in \pi$; par définition, Sp(f) sera la cochaîne

$$\sum_{s \in \pi} \varphi_s \, \omega_s(s^{-1}) \ . \tag{6}$$

Il est immédiat que c'est bien une trace. De plus, si π est fini, et si $\omega(s)$ est, pour chaque s , une cochaîne à support compact, il en est de même de la "trace" de la fonction $\omega(s)$; donc le complexe des cochaînes à support compact est faiblement π-injectif quand le groupe π est fini (et opère sans point fixe).

Rectification : ce qui précède est parfaitement correct en ce qui concerne les cochaînes singulières. Pour les cochaînes de Čech-Alexander, il faut s'assurer que si, pour chaque s , $\omega(s)$ est une cochaîne de support vide, l'expression (6) est aussi une cochaîne de support vide. Pour le démontrer, on doit faire l'hypothèse suivante : tout point de l'espace $\mathfrak{X}$ possède un voisinage tel que les φ_s soient identiquement nulles dans ce voisinage, sauf pour un nombre <u>fini</u> de valeurs de s . Cette condition peut se réaliser lorsque $\mathcal{X}$ est <u>localement compact et paracompact</u>. Telle est donc l'hypothèse supplémentaire que nous ferons lorsqu'il s'agira de cohomologie de Čech-Alexander.

La méthode précédente s'applique aussi aux <u>formes différentielles</u> sur une variété différentiable (paracompacte) : il suffit de prendre pour φ une fonction différentiable, à valeurs réelles comprises entre 0 et 1 , et telle que $\sum_s \varphi_s = 1$ (la somme étant "localement finie"). La sommation (6) est alors applicable, et définit une trace dans les formes différentielles (resp. dans les formes différentielles à support compact quand le groupe π est fini).

7.- <u>Remarque finale</u> :

Dans tout cet exposé on a considéré des groupes abéliens dans lesquels opère le groupe π . Les groupes abéliens ont été envisagés commo modules sur l'anneau Z des entiers. On pourrait remplacer Z par un anneau commutatif K avec élément unité, et ne considérer alors que des K-modules dans lesquels opère π . On pourra, par exemple, prendre pour K un <u>corps</u>.

Dans l'exposé suivant, on verra comment les groupes $H(\pi , X)$ et $H^*(\pi , Y)$ peuvent être munis d'une filtration, telle que les groupes gradués associés soient les termes E^{∞} de suites spectrales que l'on explicitera. Cela fournit un mode de "calcul" des groupes $H(X_{\pi})$ et $H^*(Y^{\pi})$, lorsque ceux-ci s'identifient à $H(\pi , X)$ et $H^*(\pi , Y)$ respectivement (cf théorèmes 1 et 1 bis ci-dessus).