H. CARTAN

Généralités sur les espaces fibrés, II

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. n° 7, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A7_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50.

GÉNÉRALITÉS SUR LES ESPACES FIBRÉS, II.
(Exposé de H. CARTAN, le 9.1.1950).

1.- Sections d'un espace fibré à groupe structural.

La proposition 1 de l'exposé 6 se généralise comme suit :

Théorème 1.- *Soit* E *l'espace fibré associé à un espace fibré principal* H , *de groupe* G *et de base* B , *défini par une fibre* F *dans laquelle* G *opère à gauche. Toute section de* E *est définie par une application continue* f *de* H *dans* F , *telle que*

$$(1) \qquad f(x.s) = s^{-1}.f(x) \quad ;$$

réciproquement, toute application f *satisfaisant à (1) définit une section de* E .

Démonstration : 1) soit φ une section (application continue de B dans E , ou encore : sous-espace de E , image de cette application). Un point $x \in H$ définit (6, n°6) un homéomorphisme de F sur la fibre située au-dessus de $q(x) \in B$. Le point de F qui vient sur la section est, par définition, $f(x)$. On vérifie aussitôt la relation (1). Reste à prouver que f est *continue* ; or $f(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que la classe d'équivalence de $(x , y) \in H \times F$ dans son quotient $E = (H , F)$ soit précisément $\varphi(q(x))$. Montrons que si x est voisin de x_0 , $f(x)$ est voisin de $f(x_0)$: or $\varphi(q(x))$ est l'image d'un point (x' , y') voisin de $(x_0 , f(x_0))$; ce point a même image, dans E , que le point $(x , u(x' , x).y')$ (on rappelle que $u(x' , x)$ désigne l'unique élément de G qui transforme x' en x). On a $f(x) = u(x' , x).y'$; en vertu de la continuité de u , $u(x' , x)$ est voisin de e , donc $f(x)$ est bien voisin de $f(x_0)$. C.Q.F.D.

2) Inversement, soit f une application continue de H dans F satisfaisant à (1). L'application $x \to (x , f(x))$ de H dans $H \times F$, composée avec l'application canonique de $H \times F$ sur son quotient E , donne une application continue de H dans E ; soit g . On a $g(x . s) = g(x)$ d'après (1),

et d'après la définition de la relation d'équivalence dans $H \times F$. Donc g est compatible avec la relation d'équivalence qui, dans H , est définie par G ; en passant au quotient, on obtient une application continue φ de B dans E , et c'est la section cherchée.

Application du théorème 1 : Soient H et H' deux espaces fibrés principaux, de bases B et B' , de même groupe G . Existe-t-il un homomorphisme de H dans H' ? Une réponse affirmative permettrait de conclure que la structure de H est l'image réciproque de la structure de H' pour l'application de la base B de H dans la base B' de H' (cf exp. 6, Rem., fin du par. 3). Or la réponse n'est pas toujours affirmative : pour qu'il existe un tel homomorphisme, il faut et il suffit qu'il existe une section dans l'espace fibré E défini comme suit : prenons H' comme fibre, en y faisant opérer G à gauche par $(x', s) \longrightarrow x'.s^{-1}$ (car G opère à droite dans l'espace fibré principal H') ; cette fibre H' et l'espace fibré principal H , de base B , définissent un espace fibré E (à groupe structural G) de base B , de fibre H' . D'après le théorème 1 , une section de E est définie par une application continue f de H dans H' , telle que $f(x.s) = f(x).s$; or ceci exprime que f est un homomorphisme d'espaces fibrés principaux.

C.Q.F.D.

Nous verrons plus loin que, moyennant certaines hypothèses sur H' , l'existence d'une section dans $E = (H , H')$ est assurée ; ces hypothèses entraîneront donc aussi que la structure de H est image réciproque de celle de H' .

2.- Extension et restriction du groupe structural.

Dans ce numéro et les suivants (jusqu'à la fin de l'exposé), g désigne un sous-groupe fermé du groupe structural G .

Soit H fibré principal de groupe G ; par restriction du groupe d'opérateurs, g opère à droite dans H , et y définit donc une relation d'équivalence (espèce de structure étudiée dans 6, 2). Soit H/g l'espace quotient de H par cette relation d'équivalence, et soit $H/g \longrightarrow B$ l'application obtenue à partir de la "projection" de H sur sa base B , par passage au quotient.

Théorème 2.- L'application $H/g \rightarrow B$ fait de H/g un espace fibré de base B , de fibre G/g ; plus précisément, on peut définir sur H/g une structure d'espace fibré à groupe structural G : celle de l'espace associé à

H , et de fibre G/g dans laquelle G opère à gauche, à la manière habituelle d'un groupe G dans l'espace homogène G/g des classes à gauche suivant g .

<u>Démonstration</u> : l'espace fibré $E = (H , G/g)$ est quotient de $H \times (G/g)$ par la relation d'équivalence : $(x , y) \equiv (x.s , s^{-1}.y)$ pour $s \in G$. Soit A le sous-espace de $H \times (G/g)$ formé des $(x , \dot{e})$, où $\dot{e}$ désigne l'élément de G/g , classe de l'élément neutre $e \in G$. La relation d'équivalence induite sur A est : $(x , \dot{e}) \equiv (y , \dot{e})$ s'il existe $s \in g$ tel que $y = x.s$; l'espace quotient s'identifie canoniquement à H/g , et par suite on a une application canonique, continue, de H/g dans (et même sur) E . Reste à prouver qu'elle est bicontinue, et, pour cela, qu'elle transforme un ouvert de H/g en un ouvert de $(H , G/g)$. En effet, si un point $(y , \dot{u})$ de $H\times(G/g)$ est voisin de $(x , \dot{e})$, il est congru à un point $(z , \dot{e})$ voisin de $(x , \dot{e})$, car il existe un $s \in G$, voisin de e , tel que $\dot{u} = s.\dot{e}$ (parce que la relation d'équivalence définie par g dans G est une relation <u>ouverte</u>).

<u>Exemple</u> : prenons pour H un groupe topologique Γ , G étant un sous-groupe fermé de Γ (et g un sous-groupe fermé de G). Alors l'espace homogène Γ/g est un espace fibré de base Γ/G , de fibre G/g , de groupe structural G qui opère à gauche dans G/g .

<u>Définition</u> : soit H_G un espace fibré principal de groupe G , de base B ; soit H_g un espace fibré principal de groupe g (sous-groupe fermé de G), de même base B . On dit qu'on définit H_G comme <u>extension</u> de H_g si on se donne un B-homomorphisme φ de H_g dans H_G tel que $\varphi(x.s) = \varphi(x).s$ (pour $s \in g$) , et si φ est un homéomorphsime de H_g sur $\varphi(H_g)$.

Par φ , H_g est identifié à un sous-espace de H_G . Nous ferons désormais cette identification. Dans les mêmes conditions, on dit aussi que H_g est obtenu à partir de H_G par <u>restriction</u> du groupe structural.

Etudions la situation précédente. H_g définit une <u>section</u> de l'espace H_G/g , car en composant les applications $H_g \to H_G$ et $H_G \to H_G/g$, on obtient une application $H_g \to H_G/g$, d'où, par passage au quotient dans H_g , une application continue $B \to H_G/g$; c'est la section cherchée.

D'après le théorème 1 , à cette section est associée une application continue f de H_G dans G/g , telle que $f(x.s) = s^{-1}.f(x)$ $(s \in G)$. Interprétons directement f : $f(x)$ est la classe (modulo g) des éléments de G qui transforment le point $x \in H_G$ en un point de H_g . Alors H_g se compose des points $x \in H_G$ tels que $f(x) = \dot{e}$; il en résulte que H_g <u>est un</u>

<u>sous-espace fermé de</u> H_G .

<u>Réciproquement</u>, soit donné l'espace H_G , et une section de H_G/g ; soit f l'application associée à cette section ; le sous-espace des x de H_G tels que $f(x) = \dot{e}$ est un espace fibré principal de groupe g , qui définit une restriction H_g du groupe structural. En résumé :

<u>Théorème 3</u>.- Etant donné un espace fibré principal H_G , de base B , de groupe G , pour qu'il soit possible de <u>restreindre</u> le groupe structural de G à g (c'est-à-dire pour que H_G soit une extension d'un espace fibré principal E_g convenable, de groupe g) , il faut et il suffit que l'espace fibré H_G/g , de base B et de fibre G/g , possède une <u>section</u>.

En particulier, dire que l'on peut réduire le groupe structural au sous-groupe $\{e\}$ réduit à l'élément neutre, c'est dire que l'espace H_G est <u>trivial</u>. On retrouve la proposition 2 de l'exposé 6 : pour que H_G soit trivial, il faut et il suffit qu'il possède une section.

<u>Complément au théorème 3</u> : dans les hypothèses du théorème 3 , et en admettant que l'espace H_G/g possède une section, supposons en outre que les espaces H_G (de groupe G) et G (de groupe g) soient <u>localement triviaux</u> ; alors l'espace H_g (obtenu par restriction du groupe structural) est <u>localement trivial</u>.

En effet, dire que H_G est localement trivial, c'est dire que, localement (au sens de l'espace de base B) il existe des homomorphismes locaux de H_G dans G ; de même, l'autre hypothèse exprime l'existence locale (au sens de l'espace de base G/g) d'homomorphismes de G dans g . En composant successivement les homomorphismes $H_g \to H_G$ (qui est un g-isomorphisme), $H_G \to G$ (défini localement), $G \to g^g$ (qui est un g-homomorphisme, défini localement), on obtient un g-homomorphisme $H_g \to g$ au voisinage de chaque point de l'espace de base B de H_g . Et ceci exprime précisément que H_g est localement trivial.

<u>Théorème 4</u>.- Soit H_G un espace fibré principal de groupe G , de base B ; et soit (H_G , F) l'espace fibré associé à H_G , de fibre F dans laquelle opère G . Soit H_g un espace fibré principal obtenu à partir de H_G par restriction du groupe structural (si possible), et soit (H_g , F) l'espace fibré associé (le groupe g opérant dans F par restriction du groupe d'opérateurs G). Alors <u>les espaces fibrés</u> (H_G , F) <u>et</u> (H_g , F) <u>sont canoniquement</u> B-<u>isomorphes</u> .

Cela signifie, d'une façon précise, qu'il existe un B-isomorphisme ψ satisfaisant au diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_g \times F & \longrightarrow & H_G \times F \\ \downarrow & & \downarrow \\ (H_g , F) & \overset{\psi}{\longleftrightarrow} & (H_G , F) \end{array}$$

Démonstration : (H_G , F) étant quotient de $H_G \times F = E$ par la relation d'équivalence R suivante : $(x , y) \equiv (x.s , s^{-1}.y)$ pour $s \in G$, considérons le sous-espace $A = H_g \times F$; la relation d'équivalence induite R_A est : $(x , y) \equiv (x.s , s^{-1}.y)$ pour $s \in g$. L'application canonique de A/R_A dans E/R est continue, et c'est une application biunivoque sur ; reste à prouver que c'est un homéomorphisme, et, pour cela, que c'est une application ouverte. C'est immédiat : si un point $x \in H_G$ est voisin d'un point de H_g, il existe $s \in G$, voisin de e, tel que $x.s \in H_g$.

En particulier : prenons pour fibre F le groupe G lui-même, où G opère à gauche par les translations à gauche ; on sait que (H_G , G) s'identifie alors canoniquement à H_G lui-même (exposé 6, page 12). On vient de voir, d'autre part, qu'il s'identifie à (H_g , G) (espace fibré associé à H_g, de fibre G où g opère par les translations à gauche). Donc H_G s'identifie à (H_g , G) ; on vérifie de plus que les opérations (à droite) de G dans H_G s'obtiennent en considérant G comme opérant à droite dans la fibre G de (H_g , G). Ainsi :

Corollaire du théorème 4 : lorsque l'espace fibré principal H_g est connu, il existe toujours une extension H_G, et une seule à un isomorphisme près : c'est l'espace (H_g , G), associé à H_g, et de fibre G où g opère par les translations à gauche, et où G opère par les translations à droite.

Remarque : ainsi, le problème d'extension du groupe structural est toujours possible et possède une seule solution. Par contre, le problème de restriction du groupe structural n'est pas possible en général, et lorsqu'il est possible, il peut posséder des solutions non isomorphes. A ce sujet, voir EHRESMANN, Colloque de Topologie algébrique (C.N.R.S., juillet 1947, page 8). Mais le rédacteur avoue que les lignes d'Ehresmann (lignes 9-11 du bas de la page 8) lui restent obscures.

APPENDICE.- Complément au théorème 2 : si g est sous-groupe invariant (fermé) de G, on peut faire opérer le groupe quotient G/g à droite dans l'espace H/g. On vérifie que ce groupe d'opérateurs définit alors sur H/g une structure d'espace fibré principal de base B, de groupe structural G/g.
