H. Cartan

Cohomologie réelle d'un espace fibré principal différentiable. II : transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal ; recherche de la cohomologie de l'espace de base

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. n° 20, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A19_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50

COHOMOLOGIE RÉELLE D'UN ESPACE FIBRÉ PRINCIPAL DIFFÉRENTIABLE

II : transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal ; recherche de la cohomologie de l'espace de base.

(Exposés de H. CARTAN, le 23 mai et 19 juin 1950).

1.- Notations.

On renvoie à l'exposé 19 pour les notations $\mathfrak{A}(G)$, $\mathfrak{A}'(G)$, $A(G)$, $S(G)$, $W(G) = A(G) \otimes S(G)$ (algèbre de Weil du groupe de Lie G) , ainsi que pour les notations des opérateurs $i(x)$, $\theta(x) = \theta_A(x) + \theta_S(x)$. L'opérateur différentiel δ de $W(G)$ est donné par les formules (9) , (8) , (10) et (11) de l'exposé 19. La graduation de l'algèbre $W(G)$ est celle qui attribue le degré $p+2q$ aux éléments de $A^p(G) \otimes S^q(G)$. On utilise la notation $I_A(G)$ pour désigner la sous-algèbre des éléments invariants de $A(G)$, et la notation $I_W(G)$ pour désigner la sous-algèbre des éléments invariants de $W(G)$.

L'algèbre différentielle graduée $A(G)$, munie de la différentielle d_A , possède une algèbre de cohomologie notée $H_A(G)$, ou simplement $H(G)$; lorsque G est un groupe compact (connexe), elle s'identifie à l'algèbre de cohomologie (réelle) de l'espace du groupe G .

2.- Cohomologie de l'algèbre de Weil.

Théorème 1.- L'algèbre de cohomologie de l'algèbre de Weil est triviale : $H^m(W(G))$ est nul pour tout degré $m \geqslant 1$ (pour $m = 0$, $H^0(W(G))$ s'identifie évidemment au corps des scalaires). De même, l'algèbre de cohomologie de la sous-algèbre $I_W(G)$ est triviale.

Démonstration : soit k l'antidérivation de $W(G)$, de degré -1 , nulle sur $A(G)$, et définie sur $S^1(G)$ par $k(\widetilde{x'}) = x'$ (c'est-à-dire kh est l'identité sur $A^1(G)$) . L'opérateur k commute avec les $\theta(x)$, donc opère aussi dans la sous-algèbre $I_W(G)$.

$\delta k + k\delta$ est une dérivation, entièrement définie par ses valeurs sur $A^1(G)$ et $S^1(G)$; elle transforme chaque $x' \in A^1(G)$ en x' lui-même, et chaque $\widetilde{x'} \in S^1(G)$ en $\widetilde{x'} - d_A x'$. Soit u un élément homogène de degré m $(m \geq 1)$ de $W(G)$; $\delta ku + k\delta u$ est homogène de degré m . Soit q le poids maximum des termes non nuls de u (on dit qu'un élément de $A^p(G) \otimes S^q(G)$ est de poids q). Dans

$$v = u - \frac{1}{m-q}(\delta ku + k\delta u)$$, tous les termes sont de poids

$\leq q$, et le terme de poids q est nul. On a ainsi un processus qui fait passer de u à v en diminuant strictement le poids maximum ; en l'itérant, on arrivera à un élément <u>nul</u>.

Cela étant, supposons que u soit un cocycle de $W(G)$: $\delta u = 0$. Alors v est un cocycle homologue à u ; de proche en proche, on voit que u est le cobord d'un élément de $W(G)$; ceci démontre la première partie du théorème. De plus, si u est un cocycle invariant, le même processus montre que u est le cobord d'un élément invariant de $W(G)$, d'où la deuxième partie du théorème.

3.- <u>L'application canonique</u> $I_S^p(G) \longrightarrow I_A^{2p-1}(G)$.

Remarquons d'abord que les éléments de $I_A(G)$ sont des cocycles de $A(G)$, pour la différentielle d_A de $A(G)$, en vertu de la formule (4) de l'exposé 19, numéro 3 , formule qui explicite d_A).

Soit u un élément de $I_S^p(G)$ $(p \geq 1)$; c'est un cocycle de $I_W(G)$, donc d'après le théorème 1 , il existe un élément $w \in I_W(G)$ tel que $\delta w = u$; le degré de w est $2p - 1$. L'application canonique de l'algèbre $W(G)$ sur son quotient $A(G)$ (cf. 19, bas de la page 8) transforme w en un élément invariant w_A de $A(G)$, c'est-à-dire en un élément de $I_A^{2p-1}(G)$. Cet élément w_A est indépendant du choix particulier de w tel que $\delta w = u$. En effet, supposons $\delta w' = \delta w$; alors, d'après le théorème 1 , il existe un élément invariant v de $W(G)$, tel que $w' - w = \delta v$; en projetant $W(G)$ sur $A(G)$, on obtient la relation $w'_A - w_A = d_A v_A$, et puisque v_A est dans $I_A(G)$, on a $d_A v_A = 0$. C.Q.F.D.

En associant ainsi à chaque $u \in I_S^p(G)$ l'élément $w_A \in I_A^{2p-1}(G)$ comme ci-dessus, on définit une <u>application linéaire canonique</u>

$$\rho : \quad I_S^p(G) \longrightarrow I_A^{2p-1}(G) \qquad (p \geq 1) .$$

Les éléments de l'image de cette application sont <u>transgressifs</u> ; on dit qu'un élément $a \in I_A^q(G)$ (pour un $q \geq 1$) est transgressif dans l'algèbre $I_W(G)$ s'il est la projection, dans $A(G)$, d'un élément $w \in I_W^q(G)$ dont le cobord δw soit dans $S(G)$, donc dans $I_S(G)$ (observons que si q est <u>pair</u>, $\delta w = 0$ pour des raisons de degré, donc w a la forme δv , et par suite $a = d_A v_A$, ce qui exige $a = 0$. Ainsi : <u>tout élément transgressif non nul est de degré impair</u>).

Les éléments transgressifs de $I_A(G)$ forment évidemment un sous-espace vectoriel $T_A(G)$; si on en prend une base homogène, et que pour chaque élément a de cette base on choisit un w comme ci-dessus (w s'appelle une "cochaîne de transgression"), la correspondance $a \longrightarrow \delta w$ définit une application linéaire de $T_A(G)$ dans $I_S(G)$, qu'on appellera une transgression. Autre manière de définir une transgression τ : c'est une application linéaire de $T_A(G)$ dans $I_S(G)$ qui, suivie de l'application canonique ρ (cf. ci-dessus), donne l'automorphisme identique de $T_A(G)$.

4.- La transgression dans le cas d'une algèbre de Lie réductive.

On suppose désormais que l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}(G)$ est réductive, c'est-à-dire composée dirècte d'une algèbre abélienne et d'une algèbre semi-simple ; c'est le cas, notamment, quand G est un groupe compact. Dans ce cas, on sait que toute classe de cohomologie de $A(G)$ contient un élément invariant et un seul ; autrement dit, l'algèbre de cohomologie de $H_A(G)$ s'identifie canoniquement à l'algèbre $I_A(G)$. De plus (théorème de HOPF ; voir Thèse de Koszul, Bull. Soc. Math., 1950), l'algèbre $I_A(G)$ s'identifie à l"algèbre extérieure d'un sous-espace $P_A(G)$ bien déterminé de $I_A(G)$, engendré par des éléments homogènes de degrés impairs. Les éléments de $P_A(G)$ s'appellent primitifs ; un élément homogène est dit primitif s'il est orthogonal aux éléments décomposables de l'algèbre $J_A(G)$ des éléments invariants de l'algèbre extérieure de l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}(G)$ (dans une algèbre graduée, un élément est dit "décomposable" s'il est une somme de produits d'éléments de degrés strictement plus petits de cette même algèbre).

On peut prouver :

Théorème 2.- *Si $\mathfrak{A}(G)$ est réductive, les éléments transgressifs de $I_A(G)$ ne sont autres que les éléments primitifs.* (sans démonstration ici).

Considérons alors une transgression $\tau : P_A^{2p-1}(G) \longrightarrow I_S^p(G)$.

Elle transforme les éléments d'une base de $P_A(G)$ (en nombre total égal, d'après Hopf, au rang du groupe G) en éléments de $I_S(G)$; on peut montrer (Cartan, Koszul, Chevalley) que ces éléments engendrent l'algèbre $I_S(G)$ (pour la structure multiplicative) et qu'ils sont algébriquement indépendants. Conséquence : l'algèbre $I_S(G)$ a la structure d'une algèbre de polynomes dont le nombre des variables est égal au rang de G ; le nombre des générateurs de poids p est égal au nombre des éléments primitifs de $I_A(G)$, de degré $2p-1$, et linéairement indépendants. Ce résultat est le pendant du théorème de Hopf concernant la structure de $I_A(G)$.

5.- Transgression dans un espace fibré principal de groupe G .

Soit, avec les notations de 19, E l'algèbre des formes différentielles d'un espace fibré principal $\mathcal{E}$, de groupe G (groupe de Lie connexe, tel que $\mathfrak{A}(G)$ soit réductive). Choisissons une connexion infinitésimale dans $\mathcal{E}$ (19, numéro 5) ; elle définit un homomorphisme $\bar{f}$ de W(G) dans E . Si a est un cocycle invariant primitif, et w une cochaîne de transgression de a (cf. numéro 4 ci-dessus), $\bar{f}(w)$ est un élément de E (invariant par le groupe G) qui "induit" le cocycle a sur chaque fibre ; sa différentielle $d(\bar{f}(w)) = \bar{f}(\delta w)$ est l'élément de B (algèbre des formes différentielles de l'espace de base $\mathcal{B}$) que la connexion associe à l'élément δw de $I_S(G)$. Ainsi la différentielle de la forme de transgression est un cocycle de l'espace de base ; ayant fait choix une fois pour toutes d'une transgression dans $I_W(G)$, on obtient ainsi une application linéaire $P_A^{2p-1}(G) \longrightarrow B^{2p}$, dite transgression dans l'espace fibré, qui est composée des deux applications

$P_A^{2p-1}(G) \longrightarrow I_S^p(G)$ (transgression dans le groupe) et $I_S^p(G) \longrightarrow B^{2p}$ (homomorphisme défini par la connexion).

Supposons en outre que le groupe G soit compact : alors l'algèbre de cohomologie H(E) de l'espace fibré s'identifie à l'algèbre de cohomologie $H(I_E)$ de la sous-algèbre des éléments invariants de E . D'après un théorème de Chevalley (non publié), $H(I_E)$ s'identifie à l'algèbre de cohomologie du produit tensoriel $I_A(G) \otimes B$, muni de la différentielle D que voici : D est une antidérivation égale, sur B , à la différentielle de B , et définie, sur $P_A(G)$, par l'homomorphisme de transgression $P_A(G) \longrightarrow B$ (qui élève le degré d'une unité) ; cette antidérivation se prolonge à tout $I_A(G) \otimes B$, et son carré est nul.

On a ainsi, dans une certaine mesure, résolu le problème suivant : reconstituer la cohomologie de l'espace fibré à l'aide de l'algèbre B des formes différentielles de la base, et du groupe G ; il suffit pour cela de connaître l'homomorphisme $I_S(G) \longrightarrow B$ défini par une connexion infinitésimale.

6.- Recherche de la cohomologie de l'espace de base.

On aborde le problème inverse : de la connaissance de la cohomologie de l'espace fibré, et de quelque chose en plus, déduire la cohomologie de l'espace de base.

Considérons le produit tensoriel d'algèbres graduées $E \otimes W(G)$: c'est une algèbre graduée. Définissons-y un opérateur différentiel $\bar{\delta}$, qui prolonge l'opérateur d de E et l'opérateur δ de $W(G)$. Définissons aussi des opérateurs $i(x)$ et $\theta(x)$ (pour $x \in \mathfrak{A}(G)$) : ce seront des antidérivations (resp. dérivations) qui prolongent les opérateurs $i(x)$ (resp. $\theta(x)$) déjà définis sur E et sur $W(G)$. Alors les $i(x)$, les $\theta(x)$ et la différentielle $\bar{\delta}$ satisfont aux relations (1) , (2) , (3) , de l'exposé 19, où d serait remplacé par $\bar{\delta}$.

On notera $\bar{B}$ la sous-algèbre des <u>éléments basiques</u> de $E \otimes W(G)$: éléments annulés par les $i(x)$ et les $\theta(x)$; elle est stable pour $\bar{\delta}$. B et $I_S(G)$ s'identifient à deux sous-algèbres de $\bar{B}$, ce qui définit deux homomorphismes canoniques

$$(1) \qquad H(B) \longrightarrow H(\bar{B}) \quad \text{et} \quad I_S(G) \longrightarrow H(\bar{B}) \quad .$$

Tout ceci vaut, plus généralement, dans le cadre algébrique suivant : E est une algèbre différentielle graduée munie d'opérateurs $i(x)$ et $\theta(x)$ satisfaisant aux conditions (1) , (2) , (3) de 19 ; B est la sous-algèbre des éléments basiques de E .

<u>Théorème 3</u>.- <u>S'il existe une connexion</u> dans E (au sens algébrique, c'est-à-dire une application linéaire f de $A^1(G)$ dans E^1 , compatible avec les $i(x)$ et les $\theta(x)$; cf 19) , <u>l'homomorphisme</u> $H(B) \longrightarrow H(\bar{B})$ <u>est un isomorphisme sur</u>.

(sans démonstration ici).

Par cet isomorphisme, l'homomorphisme $I_S(G) \longrightarrow H(\bar{B})$ défini par (1) devient un homomorpnisme $I_S(G) \longrightarrow H(B)$, et on vérifie aisément que ce n'est autre chose que l'homomorphisme défini par la connexion (19, numéro 7). Il est donc prouvé que ce dernier est <u>indépendant de la connexion</u> ; c'est un invariant de la structure fibrée.

7.- <u>Etude de l'algèbre différentielle</u> $\bar{B}$.

Supposant désormais qu'il existe une connexion dans E , nous savons, par le théorème 3 , que l'algèbre de cohomologie $H(B)$ s'identifie à l'algèbre de cohomologie de l'algèbre différentielle $\bar{B}$. Supposons de plus que l'homomorphisme $H(I_E) \longrightarrow H(E)$ de la cohomologie de la sous-algèbre des éléments invariants de E dans la cohomologie de E soit un <u>isomorphisme sur</u> ; c'est notamment le cas lorsque E est l'algèbre des formes différentielles d'un espace fibré principal de groupe G , et que G est <u>compact</u> (connexe) ; c'est aussi le cas si E est un espace vectoriel de dimension finie et que l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}(G)$ est réductive.

Alors la projection de $E \otimes W(G)$ sur son quotient E applique la sous-algèbre $\bar{B}$ dans la sous-algèbre I_E des éléments invariants de E ; on obtient ainsi un homomorphisme $\bar{B} \longrightarrow I_E$ compatible avec les opérateurs différentiels, d'où un homomorphisme $H(\bar{B}) \longrightarrow H(I_E)$. Il est clair que par identification de $H(\bar{B})$ avec $H(B)$, et de $H(I_E)$ avec $H(E)$, cet homomorphisme n'est autre que l'homomorphisme canonique $H(B) \longrightarrow H(E)$.

Pour donner une autre interprétation de $\bar{B}$, cherchons d'abord les éléments de $E \otimes A(G) \otimes S(G)$ annulés par les $i(x)$; ce sont les éléments de $F \otimes S(G)$, où F désigne la sous-algèbre des éléments de $E \otimes A(G)$ annulés par les $i(x)$. Alors (opérateur différentiel mis à part) $\bar{B}$ s'identifie à la sous-algèbre des éléments <u>invariants</u> de $F \otimes S(G)$. Or l'homomorphisme canonique de $E \otimes A(G)$ sur son quotient E (par l'idéal engendré par les éléments de degrés ≥ 1 de $A(G)$) applique <u>biunivoquement</u> la sous-algèbre F <u>sur</u> E ; et cette application de F sur E est compatible avec les $\theta(x)$. On en déduit un isomorphisme de $F \otimes S(G)$ sur $E \otimes S(G)$, qui applique la sous-algèbre des éléments invariants de $F \times S(G)$ sur la sous-algèbre des éléments invariants de $E \otimes S(G)$. Ainsi $\bar{B}$ s'identifie canoniquement à la <u>sous-algèbre</u> C <u>des éléments invariants de</u> $E \otimes S(G)$. Reste à expliciter la différentielle Δ que l'on obtient en transportant à C la différentielle de $\bar{B}$; on trouve que c'est l'antidérivation induite sur C par la différence $d - h$ des deux antidérivations d et h de $E \otimes S(G)$ définies comme suit :

d prolonge à $E \otimes S(G)$ la différentielle d de E , et est nulle sur $S(G)$;

h , nulle sur $S(G)$, est donnée par $h = \sum_k i(x_k)e(\widehat{x'_k})$ (où (x_k) et (x'_k) désignent deux bases duales de $\mathfrak{A}(G)$ et de $A^1(G)$) ; cet opérateur h généralise celui défini dans l'algèbre de Weil $A(G) \otimes S(G)$ (cf. formule (8) de 19).

Noter que le carré de $d-h$ n'est pas nul, en général, sur $E \otimes S(G)$; mais sa restriction Δ à C a un carré nul.

Résumons :

<u>Théorème 4</u>.- L'algèbre de cohomologie $H(B)$ de la sous-algèbre B des éléments basiques de E s'identifie canoniquement (s'il existe une connexion dans E) à l'algèbre de cohomologie de la sous-algèbre C des éléments invariants de $E \otimes S(G)$, C étant munie de la différentielle Δ définie ci-dessus. En outre, l'application canonique de $E \otimes S(G)$ sur son quotient E applique $\bar{C}$ sur la sous-algèbre I_E des éléments invariants de E , et l'homomorphisme

$H(C) \longrightarrow H(I_E)$ qu'on en déduit n'est autre que l'homomorphisme canonique $H(B) \longrightarrow H(E)$. (On a fait les hypothèses nécessaires pour que $H(I_E) \longrightarrow H(E)$ soit un isomorphisme sur).

8.- Utilisation de la théorie de Hirsch-Koszul.

La théorie de Hirsch (Comptes Rendus, décembre 1948, t. 227, p. 1328) mise au point par Koszul (non encore publié) permet, dans le cas de l'algèbre différentielle C, de prouver ceci :

Théorème 5.- Il existe une application linéaire biunivoque φ (non déterminée de manière unique) de l'espace vectoriel gradué $H(E) \otimes I_S(G)$ sur un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel gradué C, qui conserve les degrés et possède les propriétés suivantes :

1) sur $I_S(G)$, φ se réduit à l'application identique (on identifie canoniquement $I_S(G)$ à un sous-espace de $H(E) \otimes I_S(G)$, et à un sous-espace de C);

2) φ applique chaque élément $\alpha \otimes 1$ de $H(E) \otimes 1$ sur un élément de C dont l'image canonique dans I_E est un cocycle de la classe de α ;

3) l'image de $H(E) \otimes I_S(G)$ par φ est stable pour Δ,

Ces propriétés entraînent alors que l'image de $H(E) \otimes I_S(G)$ dans C est un sous-espace dont la cohomologie s'identifie à celle de C ; par transport de structure (en identifiant $H(E) \otimes I_S(G)$ à son image dans C par φ), on obtient sur $H(E) \otimes I_S(G)$ un opérateur cobord (déduit de Δ) de carré nul, et l'espace de cohomologie de $H(E) \otimes I_S(G)$, pour ce cobord, est isomorphe à l'espace vectoriel $H(B)$ (en général, on perd la structure multiplicative). Mieux : l'isomorphisme de $H(H(E) \otimes I_S(G))$ sur $H(B)$ est compatible avec les homomorphismes

$$\text{(2)} \qquad \begin{tikzcd} & H(H(E) \times I_S(G)) \arrow[dr] \arrow[dd, leftrightarrow] & \\ I_S(G) \arrow[ur] \arrow[dr] & & H(E) \\ & H(B) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Application : nouvelle interprétation des "classes caractéristiques" (cf. fin du numéro 7 de 19). Soit $\mathcal{E}$ un espace fibré principal de groupe G, tel que ses groupes d'homotopie $\pi_m(\mathcal{E})$ soient nuls pour $0 \leq m \leq N$. On sait (exposé 8, théorème 6) que, pour tout espace de base $\mathcal{B}'$, les structures fibrées principales de groupe G, de base $\mathcal{B}'$, correspondent biunivoquement aux classes d'applications de $\mathcal{B}'$ dans l'espace de base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{E}$, pourvu que la dimension de $\mathcal{B}'$ soit $\leq N$; on dit que l'espace fibré $\mathcal{E}$ est classifiant pour la dimension N. Chaque structure fibrée de base $\mathcal{B}'$ définit alors un homomorphisme de

$H^m(\mathcal{B})$ dans $H^m(\mathcal{B}')$ $(m \leq N)$. En composant les 2 homomorphismes

$$I_S(G) \longrightarrow H(\mathcal{B}) \quad \text{et} \quad H(\mathcal{B}) \longrightarrow H(\mathcal{B}') ,$$

on obtient évidemment l'homomorphisme canonique de $I_S(G)$ dans $H(\mathcal{B}')$. Or je dis que le premier homomorphisme $I_S(G) \longrightarrow H(\mathcal{B})$ est un isomorphisme sur, pour toutes les valeurs du degré $\leq N$. En effet, $H^m(\mathcal{E})$ est nul pour $1 \leq m \leq N$, en vertu de l'hypothèse faite sur les groupes d'homotopie de $\mathcal{E}$; l'assertion résulte alors aussitôt du théorème 5 . Ceci prouve deux choses : 1° les groupes de cohomologie $H^m(\mathcal{B})$ de la base d'un espace classifiant pour la dimension N , sont nuls pour tous les degrés impairs $\leq N$; 2° si on identifie $I_S^p(G)$ à $H^{2p}(\mathcal{B})$ pour tous les p tels que $2p \leq N$; l'homomorphisme $H^m(\mathcal{B}) \longrightarrow H^m(\mathcal{B}')$ défini par l'espace classifiant $\mathcal{E}$ pour les dimensions $m \leq N$, s'identifie à l'homomorphisme caractéristique défini à la fin du numéro 7 de l'exposé 19. Ceci précise le rôle d'"algèbre universelle" de l'algèbre de Weil (cf. numéro 8 de 19).

9.- La cohomologie des espaces homogènes.

Soit G un groupe de Lie compact et connexe, g un sous-groupe fermé connexe de G ; on notera G/g l'espace homogène, quotient de G par g (espace des classes à gauche suivant g) ; le groupe G opère à gauche dans G/g . Ici, c'est G qui est l'espace fibré principal (noté $\mathcal{E}$ auparavant), g est le groupe structural (noté G auparavant), G/g est l'espace de base (noté $\mathcal{B}$ auparavant).

Prenons pour E l'algèbre différentielle $A(G)$ des formes différentielles de l'espace G , invariantes à gauche ; les opérateurs $i(x)$ et $\theta(x)$ (pour $x \in \mathfrak{A}(g)$) y sont définis. La sous-algèbre B des éléments basiques de E s'identifie alors à l'algèbre des formes différentielles de l'espace G/g , invariantes à gauche par G . On sait que l'algèbre de cohomologie de B s'identifie à l'algèbre de cohomologie de l'espace homogène G/g ; nous la noterons $H(G/g)$.

Pour pouvoir appliquer la théorie précédente, on doit s'assurer de l'existence d'une "connexion" dans l'algèbre $E = A(G)$, c'est-à-dire d'une application linéaire f de $A^1(g)$ dans $A^1(G)$, compatible avec les $i(x)$ et les $\theta(x)$ relatifs aux $x \in \mathfrak{A}(g)$. Une telle connexion est définie par un projecteur de l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}(G)$ sur la sous-algèbre $\mathfrak{A}(g)$, compatible avec les $\theta(x)$; autrement dit, par un sous-espace de $\mathfrak{A}(G)$, supplémentaire de

$\mathfrak{A}(g)$, et invariant par g . Or l'existence d'un tel sous-espace est assurée parce que g est une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{A}(G)$ (cf. Thèse de Koszul, paragraphe 9 , p. 86).

Ici, l'algèbre C est celle des éléments g-invariants de $A(G) \otimes S(g)$. Nous la noterons C_g . Son algèbre de cohomologie s'identifie canoniquement à l'algèbre cherchée $H(G/g)$, d'après le théorème 4. Ici, on va pouvoir compléter le théorème 5 , en astreignant l'isomorphisme φ de ce théorème à être multiplicatif. En effet, le produit tensoriel $H(E) \otimes I_S(G)$ de ce théorème est ici $I_A(G) \otimes I_S(g)$; pour définir l'application φ de $I_A(G) \otimes I_S(g)$ dans C_g , prenons d'abord pour φ l'application identique sur $I_S(g)$; pour définir φ partout, il suffira de définir φ sur le sous-espace $P_A(G)$ des éléments primitifs de $I_A(G)$, identifié à un sous-espace de $I_A(G) \otimes I_S(g)$, et ensuite on prolongera multiplicativement. Pour cela, remarquons que tout élément de $P_A(G)$ est transgressif dans l'algèbre C_g ; en effet, considérons l'homomorphisme canonique

$$A(G) \otimes S(G) \longrightarrow A(G) \otimes S(g) \quad \text{défini par} \quad S(G) \longrightarrow S(g) \ ;$$

il applique la sous-algèbre $I_W(G)$ des éléments G-invariants de $A(G) \otimes S(G) = W(G)$ dans la sous-algèbre C_g des éléments g-invariants de $A(G) \otimes S(g)$, et cette application (multiplicative) est compatible avec les différentielles Δ_G et Δ_g de ces sous-algèbres, telles qu'elles ont été définies à la fin du numéro 7 (juste avant le théorème 4). D'ailleurs Δ_G n'est autre, au signe près, que la différentielle induite par celle de l'algèbre de Weil $W(G)$; or tout élément de $P_A(G)$ est transgressif dans $I_W(G)$, comme on l'a vu au numéro 4. L'image, dans C_g , d'une cochaîne de transgression pour $a \in I_A(G)$, sera une cochaîne de transgression dans C_g , et c'est cette cochaîne que nous prendrons comme $\varphi(a)$. Ceci achève de préciser comment on choisit l'homomorphisme φ du théorème 4.

Ainsi, l'algèbre $I_A(G) \otimes I_S(g)$ peut être identifiée à une sous-algèbre de C_g , engendrée par $I_S(g)$ et des cochaînes de transgression. Si on transporte à $I_A(G) \otimes I_S(g)$ la différentielle de C_g ,

, on trouve sur l'algèbre $I_A(G) \otimes I_S(g)$ la différentielle que voici : elle est nulle sur $I_S(g)$, et, sur le sous-espace $P_A(G)$ des éléments primitifs de $I_A(G)$, sa valeur s'obtient en composant une transgression $P_A(G) \longrightarrow I_S(G)$ et l'homomorphisme canonique $I_S(G) \longrightarrow I_S(g)$. Bien entendu, la transgression n'est pas déterminée de manière unique. Résumons les résultats obtenus :

Théorème 6.- Faisons choix d'une transgression dans le groupe G : c'est une application linéaire τ de $P_A(G)$ dans $I_S(G)$, qui applique $P_A^{2p-1}(G)$ dans $I_S^p(G)$. Composons τ avec l'application canonique de $I_S(G)$ dans $I_S(g)$; on obtient une application linéaire de $P_A(G)$ dans $I_S(g)$, qu'on prolonge en une antidérivation de l'algèbre $I_A(G) \otimes I_S(g)$, nulle sur $I_S(g)$. On obtient une différentielle δ de degré +1. Alors l'algèbre de cohomologie de $I_A(G) \otimes I_S(g)$, pour δ, est isomorphe à l'algèbre de cohomologie $H(G/g)$ de l'espace homogène G/g, par un isomorphisme qui satisfait au diagramme de compatibilité

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & H(I_A(G) \otimes I_S(g)) & \searrow & \\ I_S(g) & & \updownarrow & & I_A(G) = H(G) \\ & \searrow & H(G/g) & \nearrow & \end{array}$$

Corollaire : l'algèbre de cohomologie $H(G/g)$ est entièrement déterminée (à un isomorphisme près, compatible avec les homomorphismes $I_S(g) \longrightarrow H(G/g)$ et $H(G/g) \longrightarrow H(G)$) par la connaissance de l'homomorphisme $I_S(G) \longrightarrow I_S(g)$, qui caractérise ainsi la "position homologique" du sous-groupe g dans le groupe G.

Toute étude plus approfondie de $H(G/g)$ revient donc à une étude de l'homomorphisme de l'algèbre $I_S(G)$ (algèbre de polynomes dont le nombre des variables est le rang de G) dans l'algèbre $I_S(g)$ (algèbre de polynomes dont le nombre des variables est le rang de g).

10.- Quelques résultats relatifs à $H(G/g)$.

Nous énoncerons, sans démonstration, quelques-uns des résultats que l'on peut déduire du théorème 6.

Notons $I_S^+(g)$ (resp. $I_S^+(G)$) l'idéal des éléments de degrés > 0 dans $I_S(g)$ (resp. $I_S(G)$). Alors :

Le noyau de l'homomorphisme $I_S(g) \longrightarrow H(G/g)$ est l'idéal J engendré dans $I_S(g)$ par l'image de $I_S^+(G)$. Donc : la sous-algèbre caractéristique de $H(G/g)$ (formée des "classes caractéristiques") s'identifie canoniquement à l'algèbre $I_S(g)/J$, quotient de l'algèbre $I_S(g)$ par l'idéal J. Les éléments de la sous-algèbre caractéristique sont de degrés pairs.

L'image $H_g(G)$ de $H(G/g)$ dans $H(G)$ est une sous-algèbre engendrée par un sous-espace $P'(G)$ de l'espace $P(G)$ des éléments primitifs de $H(G)$ (théorème de SAMELSON : Annals of Math., 42, 1941, Satz V). On obtient $P'(G)$ de la façon suivante : la transgression choisie τ applique biunivoquement

$P(G)$ sur un sous-espace V de $I_S(G)$; lequel s'applique sur un sous-espace V' de $I_S(g)$ par l'homomorphisme canonique $I_S(G) \longrightarrow I_S(g)$. Soit J' l'idéal de $I_S(g)$, formé des combinaisons linéaires d'éléments de V' à coefficients dans $I_S^+(g)$; J' est indépendant du choix de τ . Alors $P'(G)$ est le sous-espace formé des éléments de $P(G)$ que la différentielle δ applique dans J' . La dimension de $P'(G)$ est au plus égale à la différence des rangs $r(G)$ et $r(g)$ des groupes G et g .

L'image de $I_S^+(g)$ dans $H(G/g)$ est toujours contenue dans le noyau de l'homomorphisme $H(G/g) \longrightarrow H(G)$. Pour que ce noyau soit exactement l'idéal engendré par les éléments de degré > 0 de la sous-algèbre caractéristique de $H(G/g)$, il faut et il suffit que

$$\dim P'(G) = r(G) - r(g) . \tag{3}$$

La condition (3) est trivialement vérifiée si $r(g) = r(G)$. Elle est aussi vérifiée si l'espace G/g est symétrique (au sens de E. Cartan). La condition (3) est aussi nécessaire et suffisante pour que $H(G/g)$ s'identifie au produit tensoriel d'algèbres $(I_S(g)/J) \otimes H_g(G)$. On peut alors déterminer le "polynome de Poincaré" de $H(G/g)$ à l'aide de ceux de $H(G)$ et $H(g)$, pourvu que l'on connaisse les degrés des éléments primitifs qui engendrent $P'(G)$.

Lorsque $\dim P'(G) < r(G) - r(g)$, l'algèbre $H(G/g)$ est encore isomorphe à un produit tensoriel $K \otimes H_g(G)$, mais K contient, outre la sous-algèbre caractéristique, des générateurs de degré impair. On connaît des cas où $P'(G)$ est réduit à 0 , bien que $r(g) < r(G)$.