H. Cartan

Carrés de Steenrod, II

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. n° 15, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A15_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50

CARRÉS DE STEENROD, II.
(Exposé de H.CARTAN, le 20.3.1950)

1.-Rappel de quelques résultats.

Dans l'exposé précédent (14) on a défini ce qu'on entend par un <u>système de i-produits</u> $(A , A' , p_i , \overline{p_i})$; on suppose toujours que $p_i = \overline{p_i}$ pour tout i (type "symétrique"), ou $p_i = - \overline{p_i}$ pour tout i (type "antisymétrique"). L'homomorphisme

$$Sq_i = Sq^{m-i} : H^m(A) \longrightarrow H^{2m-i}(A')$$

est alors défini pour $m-i$ impair dans le cas symétrique,
$m-i$ pair dans le cas antisymétrique.

Si, dans A', tout élément est d'ordre 2 , on se trouve à la fois dans le cas symétrique et le cas antisymétrique, donc Sq_i est défini pour toutes les valeurs des entiers m et i .

Rappelons quelques formules importantes ; d'abord,la formule (I) de l'exposé 14, qui sert en quelque sorte de définition à un système de i-produits :

$$\text{(I)} \qquad \delta p_i(f , g) = p_i(\delta f , g) + (-1)^m p_i(f , \delta g) + (-1)^{m+n+i} p_{i-1}(f , g) + (-1)^{m+n+mn}\overline{p_{i-1}}(g , f) ,$$

(m est le degré de f , n le degré de g).
En outre, m désignant toujours le degré de f , on a, lorsque $m-i$ est impair (dans le cas symétrique), et lorsque $m-i$ est pair (dans le cas antisymétrique) :

$$\text{(II)} \qquad \delta p_i(f , f) = 0 \quad \text{si} \quad \delta f = 0 \ ;$$

$$\text{(III)} \qquad p_i(f , g) + p_i(g , f) = (-1)^{i+1} \delta p_{i+1}(f , g) \quad (g \text{ du même degré que } f , \ \delta f = 0 , \ \delta g = 0) \ ;$$

$$\text{(IV)} \qquad p_{i+1}(\delta f , \delta f) = \delta p_{i+1}(f , \delta f) + \delta \bar{p}_i(f , f) .$$

<u>Remarque</u> : dans le cas des carrés de Steenrod définis dans la cohomologie de Čech-Alexander, d'un espace topologique E , on a oublié (en 14) de spécifier que Sq_i est nul sur $H^m(E)$ dès que $i > m$. En effet, $p_i(f , f) = 0$ si $i >$ degré m de f . Ainsi, $Sq^j = 0$ pour $j < 0$.

2.- Homomorphismes.

Soient deux systèmes de i-produits $(A, A', p_i, \bar{p}_i)$ et $(B, B', q_i, \bar{q}_i)$, tous deux de même espèce (c'est-à-dire tous deux de type symétrique, ou tous deux de type antisymétrique). Un homomorphisme de $(A, A', p_i, \bar{p}_i)$ dans $(B, B', q_i, \bar{q}_i)$ est défini par la donnée d'une paire d'homomorphismes permis :

$$\Phi : A \longrightarrow B \quad , \qquad \Phi' : A' \longrightarrow B' \quad ,$$

("permis" signifie : compatibles avec les structures graduées et les opérateurs δ), qui soient en outre compatibles avec les applications bilinéaires p_i et q_i, c'est-à-dire tels que

$$\Phi'(p_i(f, g)) = q_i(\Phi(f), \Phi(g)) . \tag{1}$$

Les homomorphismes Φ et Φ' définissent, on le sait, des homomorphismes des groupes de cohomologie

$$\Phi^* : H^m(A) \longrightarrow H^m(B) \quad , \qquad \Phi'^* : H^n(A') \longrightarrow H^n(B') \quad ;$$

de plus, la relation (1) entraîne que, chaque fois que les Sq_i sont définis,

$$\Phi'^* \circ Sq_i = Sq_i \circ \Phi^* \quad , \quad \text{ou encore} \quad \Phi'^* \circ Sq^j = Sq^j \circ \Phi^* \quad . \tag{2}$$

Exemple : prenons $B = A/2A$, $B' = A'/2A'$, et définissons q_i et $\bar{q}_i$ à partir de p_i et $\bar{p}_i$ en passant au quotient. Alors (1) est vérifiée ; (2) exprime la compatibilité du diagramme (14, page 7)

$$\begin{array}{ccc} H^m(A) & \xrightarrow{Sq_i} & H^{2m-i}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^m(A/2A) & \xrightarrow{Sq_i} & H^{2m-i}(A'/2A') \end{array}$$

3.- Suites exactes et carrés de Steenrod.

Soit $(A, A', p_i, \bar{p}_i)$ un système de i-produits ; soit C un sous-groupe permis de A, et C' un sous-groupe permis de A'. On sait qu'on a deux suites exactes

$$(3) \quad \begin{cases} \longrightarrow H^m(C) \xrightarrow{\alpha} H^m(A) \xrightarrow{\beta} H^m(A/C) \xrightarrow{\gamma} H^{m+1}(C) \longrightarrow \cdots \\ \longrightarrow H^m(C') \xrightarrow{\alpha'} H^m(A') \xrightarrow{\beta'} H^m(A'/C') \xrightarrow{\gamma'} H^{m+1}(C') \longrightarrow \cdots \end{cases}$$

Faisons en outre l'hypothèse suivante : $p_i(f, g) \in C'$ dès que f ou g appartient à C. Alors la paire des homomorphismes $C \longrightarrow A$ et $C' \longrightarrow A'$ est compatible avec les applications bilinéaires p_i et $\bar{p}_i$; donc

$$\alpha' \circ Sq_i = Sq_i \circ \alpha \tag{4}$$

chaque fois que Sq_i est défini (dans $H^m(C)$, resp. $H^m(A)$) .

De plus, p_i et $\bar{p}_i$ définissent, par passage aux quotients, des applications bilinéaires q_i et $\bar{q}_i$ de $(A/C) \times (A/C)$ dans A'/C' , qui satisfont à la relation fondamentale (I) . On a donc un système de i-produits $(A/C\ ,\ A'/C'\ ,\ q_i\ ,\ \bar{q}_i)$ qui donne lieu aux relations

(5) $$\beta' \circ Sq_i = Sq_i \circ \beta$$

chaque fois que Sq_i est défini (dans $H^m(A)$, resp. $H^m(A/C)$) .

Montrons enfin que l'on a

(6) $$\gamma' \circ Sq_i = Sq_{i+1} \circ \gamma \quad ; \text{ en diagramme}$$

$$\begin{array}{ccc} H^m(A/C) & \longrightarrow & H^{m+1}(C) \\ \downarrow Sq_i & & \downarrow Sq_{i+1} \\ H^{2m-i}(A'/C') & \longrightarrow & H^{2m-i+1}(C') \end{array}$$

Observons d'abord que, dans le cas symétrique, l'homomorphisme Sq_i du membre de gauche est défini pour $m-i$ impair, et l'homomorphisme Sq_{i+1} du membre de droite est défini pour $m+1-(i+1)$ impair ; les deux membres de (6) sont donc définis simultanément. Même résultat dans le cas antisymétrique.

Pour prouver (6) , partons d'un élément $f \in A$, de degré m , tel que $\delta f \in C$; pour obtenir $\gamma' \circ Sq_i$, on prend d'abord $p_i(f\ ,\ f) \in A'$, puis $\delta p_i(f\ ,\ f) \in C'$. Pour obtenir $Sq_{i+1} \circ \gamma$, on prend d'abord $\delta f \in C$, puis $p_{i+1}(\delta f\ ,\ \delta f) \in C'$. Tout revient à montrer que $\delta p_i(f\ ,\ f)$ et $p_{i+1}(\delta f\ ,\ \delta f)$ ne diffèrent que par le <u>cobord d'un élément de</u> C' . Or c'est ce que prouve la formule (IV) : en effet, $p_{i+1}(f\ ,\ \delta f) \in C'$ puisque $\delta f \in C$, et d'autre part $p_i(f\ ,\ f)$ et $\bar{p}_i(f\ ,\ f)$ définissent la même classe dans $H^{2m-i}(A'/C')$, puisque la classe de $p_i(f\ ,\ f)$ est un élément d'ordre 2 .

La formule (6) s'écrit aussi

(6bis) $$\gamma' \circ Sq^j = Sq^j \circ \gamma$$ (j impair dans le cas symétrique, j pair dans le cas antisymétrique).

Les formules (4), (5) et (6bis) montrent que <u>tous les homomorphismes des deux suites exactes (3) sont compatibles avec les</u> Sq^j <u>chaque fois que ceux-ci sont définis</u>.

4.- <u>Application à la cohomologie des espaces topologiques</u>.

Soient E et F deux espaces localement compacts et paracompacts. Une application continue λ de F dans E définit, on le sait, un homomorphisme permis Φ du groupe A des cochaînes de E dans le groupe B des cochaînes de F ; il s'agit des cochaînes de Čech-Alexander, à valeurs dans un même groupe abélien G . Par définition :

$$\Phi f(x_0 , \ldots , x_m) = f(\lambda(x_0) , \ldots , \lambda(x_n)) . \tag{7}$$

La même définition s'étend aux cochaînes à valeurs dans un système local de groupes, à condition de prendre, dans l'espace E , le système local, image réciproque du système local considéré dans F .

De même, étant donné un autre groupe G' (ou un autre système local), λ définit un homomorphisme permis Φ' du groupe A' des cochaînes de E (à valeurs dans G') dans le groupe B' des cochaînes de F (à valeurs dans G'). La donnée d'une application bilinéaire φ de $G \times G$ dans G' (symétrique, ou antisymétrique) définit (cf. 14, numéro 2) un système de i-produits $(A , A' , p_i , \bar{p}_i)$ et un système de i-produits $(B , B' , q_i , \bar{q}_i)$. Il est clair que la relation (1) est satisfaite : les homomorphismes Φ et Φ' sont compatibles avec les i-produits définis par φ . Il en résulte que les homomorphismes

$$\Phi^* : H^m(E , G) \longrightarrow H^m(F , G) , \quad \Phi'^* : H^n(E , G') \longrightarrow H^n(F , G')$$

sont compatibles avec les Sq_i chaque fois que ceux-ci sont définis :

$$\begin{array}{ccc} H^m(E , G) & \longrightarrow & H^m(F , G) \\ \downarrow Sq_i & & \downarrow Sq_i \\ H^{2m-i}(E , G') & \longrightarrow & H^{2m-i}(F , G') \end{array}$$

Le même résultat vaut pour la cohomologie à supports compacts, pourvu que l'application continue λ soit propre, c'est-à-dire telle que l'image réciproque d'un compact de E soit un compact de F : en effet, on prend alors pour A et A' (resp. B et B') les groupes des cochaînes à supports compacts de E (resp. de F).

Soit, en particulier, F un sous-espace fermé d'un espace E ; le complémentaire $E - F$ est donc ouvert. Dans le groupe A (resp. A') des cochaînes de E à valeurs dans G (resp. dans G') , soit C (resp. C') le sous-groupe permis des cochaînes dont le support est contenu dans $E - F$. On sait que $H^m(A/C)$ (resp. $H^m(A'/C')$) s'identifie au groupe de cohomologie de l'espace F , à coefficients dans G (resp. dans G'). Les suites exactes (3) donnent ici

$$(8) \quad \begin{cases} \longrightarrow \mathcal{H}^m(E-F,G) \xrightarrow{\alpha} H^m(E,G) \xrightarrow{\beta} H^m(F,G) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{H}^{m+1}(E-F,G) \longrightarrow \quad \ldots \\ \longrightarrow \mathcal{H}^n(E-F,G') \xrightarrow{\alpha'} H^n(E,G') \xrightarrow{\beta'} H^n(F,G') \xrightarrow{\gamma'} \mathcal{H}^{n+1}(E-F,G') \longrightarrow \quad \ldots \end{cases}$$

où $\mathcal{H}^m(E-F)$ désigne une espèce particulière de cohomologie de l'espace E-F : par exemple, si E est un espace compact, $\mathcal{H}^m(E-F)$ est le groupe de cohomologie à supports compacts de l'espace localement compact E-F ; plus généralement, la suite (8) est valable lorsque tous les groupes qui y figurent sont les groupes de cohomologie à supports compacts.

Cela dit, il résulte du numéro 3 que tous les homomorphismes de la suite (8) sont compatibles avec les carrés de Steenrod Sq^j, chaque fois que ceux-ci sont définis ; ce qui se traduit par les formules (4), (5), (6) et (6bis).

5.- Carrés de Steenrod en cohomologie singulière.

Soit E un espace topologique ; le groupe $S^*(E, G)$ des cochaînes singulières de E, à valeurs dans G, est le groupe des fonctions (à valeurs dans G) de simplexes singuliers (ordonnés) de E. Or un simplexe singulier est défini par la donnée d'un simplexe euclidien (avec un ordre de ses sommets) et d'une application continue de ce simplexe euclidien dans E ; par convention un isomorphisme (pour la structure affine) d'un simplexe euclidien sur un autre (avec conservation de l'ordre des sommets) transforme un simplexe singulier en un simplexe singulier équivalent.

Considérons alors, pour commencer, les cochaînes, fonctions de simplexes singuliers affines d'un espace euclidien R^q donné. La correspondance biunivoque canonique entre les simplexes singuliers affines et les simplexes abstraits de l'ensemble R^q (suite de points de R^q) permet de transposer aux fonctions de simplexes singuliers affines la définition des i-produits donnée en 14, formule récurrente (5) ; d'ailleurs, l'opérateur T_a qui figure dans cette formule peut être interprété directement dans le groupe des fonctions de simplexes singuliers affines.

Soit maintenant à définir le i-produit $p_i(f, g)$ de 2 cochaînes singulières f et g de l'espace E (cochaînes à valeurs dans G) ; ce sera une cochaîne de E (à valeurs dans G'), qui sera définie par sa valeur sur chaque simplexe singulier s ; voici comment on définit cette valeur : s est la paire d'un simplexe euclidien σ et d'une application continue λ de σ dans E. Considérons l'ensemble A(s) formé des simplexes singuliers (λ', σ') tels que λ' soit composée d'une application affine $\sigma' \longrightarrow \sigma$, et de l'application λ de σ dans E. Les cochaînes f et g définissent des fonctions des simplexes de A(s) ; comme telles, leur i-produit $p_i(f, g)$ est défini ; c'est une fonction des simplexes de A(s), et cette fonction a une certaine valeur pour le simplexe singulier $s \in A(s)$. C'est la valeur cherchée. On vérifie qu'elle est la même pour deux simplexes singuliers équivalents.

Les i-produits ainsi définis satisfont évidemment à la condition (I), et définissent par conséquent des carrés de Steenrod, comme chaque fois que l'on a un système de i-produits. De plus, si on considère les supports des cochaînes singulières (cf. exposé 8 de 1948-49, p.4), le support de $p_i(f , g)$ est contenu dans l'intersection des supports de f et de g ; donc les produits p_i se définissent dans le groupe réduit des cochaînes singulières, obtenu en faisant le quotient par le sous-groupe des cochaînes singulières de support vide. On sait que ce groupe réduit a même groupe de cohomologie que le groupe non réduit (cf. loc. cit.)

Or on a un homomorphisme canonique du groupe $\check{C}(E , G)$ des cochaînes de Čech-Alexander dans le groupe réduit des cochaînes singulières (cf. loc. cit.), et il est clair qu'il est compatible avec les i-produits. Donc, en vertu du numéro 2 :

L'homomorphisme canonique de la cohomologie de Čech dans la cohomologie singulière :

$$\check{H}^m(E , G) \longrightarrow H^m(E , G) \quad , \quad \check{H}^n(E , G') \longrightarrow H^n(E , G')$$

est compatible avec les carrés de Steenrod dans chacun de ces deux groupes de cohomologie, quand ces carrés sont définis.

6.- Carrés de Steenrod en cohomologie simpliciale.

Si K est un complexe simplicial, le groupe $C^*(K , G)$ des cochaînes de K (à valeurs dans G) s'identifie au quotient du groupe des cochaînes de l'ensemble abstrait K , par le sous-groupe des cochaînes qui s'annulent sur les simplexes de K . La définition des i-produits $p_i(f , g)$ passe au quotient. On a donc des carrés de Steenrod dans le groupe de cohomologie d'un complexe simplicial ; de même, dans le groupe de cohomologie déduit des cochaînes "finies" (c'est-à-dire qui s'annulent sauf sur un nombre fini de simplexes).

Soit $\tilde{K}$ l'espace topologique (localement compact et paracompact) associé au simplexe K (exposé 1 de 1948/49). On a un homomorphisme canonique du groupe des cochaînes singulières $S^*(\tilde{K} , G)$ dans le groupe des cochaînes simpliciales $C^*(K , G)$. Il est évidemment compatible avec les i-produits. Or l'homomorphisme qu'il définit $H^*(\tilde{K} , G) \longrightarrow H^*(K , G)$ est, on le sait, un isomorphisme du groupe de cohomologie singulière sur le groupe de cohomologie simpliciale ; comme cet homomorphisme est compatible avec les carrés de Steenrod, on voit que l'isomorphisme de la cohomologie singulière sur la cohomologie simpliciale transporte les carrés de Steenrod de l'une dans les carrés de Steenrod de l'autre.

7.- Carrés de Steenrod dans les faisceaux.

Pour la notion de faisceau sur un espace localement compact et paracompact, voir exposé XII à XVII de 1948/49. Un système de i-produits sur un espace E sera constitué par la donnée de deux faisceaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sur E, et d'applications bilinéaires p_i et $\overline{p}_i$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$ (il s'agit d'homomorphisme au sens des faisceaux (XII de 1948/49, p.2), qui satisfassent aux conditions 1°, 2° et 3° de la p. 5 de l'Exp.14(n° 5) ; conditions relatives aux degrés, condition de "symétrie" ou d'"antisymétrie", et formule (I) du cobord.

Soient $H(\mathcal{A})$ et $H(\mathcal{A}')$ les faisceaux de cohomologie de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$. Alors les Sq_i sont définis comme des homomorphismes du faisceau $H(\mathcal{A})$ dans les faisceau $H(\mathcal{A}')$, au moins pour les valeurs convenables du degré m de $H^m(\mathcal{A})$: $m-i$ impair dans le cas symétrique, $m-i$ pair dans le cas antisymétrique.

8.- Système de i-produits dans un produit tensoriel.

Soient deux systèmes de i-produits $(A, A', p_i, \overline{p}_i)$ et $(B, B', q_i, \overline{q}_i)$. Considérons les produits tensoriels $C = A \otimes B$ et $C' = A' \otimes B'$. On sait que C et C' peuvent être munis d'une structure graduée ("graduation totale") et d'un opérateur cobord défini par

$$\delta(f \otimes g) = (\delta f) \otimes g + (-1)^m f \otimes (\delta g)\text{ , si } m \text{ est le degré}$$

de f (cf. exposé XI de 1948/49, numéro 7). On va définir des applications bilinéaires r_i et $\overline{r}_i$ de $C \times C$ dans C', qui feront de $(C, C', r_i, \overline{r}_i)$ un système de i-produits ("produit tensoriel de deux systèmes de i-produits").

Les applications r_i sont définies par la formule suivante : pour f_1 et f_2 dans A, g_1 et g_2 dans B (f_1 de degré m_1, f_2 de degré m_2, g_1 de degré n_1, g_2 de degré n_2), on pose

$$(P) \quad r_i(f_1 \otimes g_1, f_2 \otimes g_2) = (-1)^{m_2 n_1} \sum_j p_{2j}(f_1, f_2) \otimes q_{i-2j}(g_1, g_2) + $$
$$+ (-1)^{n_1(m_2+n_2)+n_1+n_2} \sum_j p_{2j+1}(f_1, f_2) \otimes \overline{q_{i-2j-1}}(g_2, g_1)$$

(formule analogue pour $\overline{r}_i$).

Un calcul pénible, mais sans difficulté essentielle, permet de vérifier la relation (I), ce qui prouve qu'on a bien un système de i-produits, d'où pourront être déduits des homomorphismes Sq_i si $r_i = \overline{r}_i$ ou si $r_i = -\overline{r}_i$; le premier cas se présente notamment si $p_i = \overline{p}_i$ et $q_i = \overline{q}_i$; le second cas se présente notamment si $p_i = -\overline{p}_i$ et $q_i = \overline{q}_i$ (attention !).

9.- <u>Application : théorie axiomatique des carrés de Steenrod d'un espace localement compact et paracompact.</u>

Soit E un tel espace, $\mathcal{A}$ un faisceau <u>fin</u> (1948/49, XIV) à degrés ≥ 0, tel que le faisceau $H(\mathcal{A})$ soit <u>localement de degré</u> 0 : ce qui veut dire que, pour tout point $x \in E$, $H^m(\mathcal{A}_x) = 0$ pour $m \geq 1$. Les $H^o(\mathcal{A}_x)$ constituent alors un faisceau de <u>coefficients locaux</u>. On sait (1948/49, XVI, p.11, théorème 3) que le faisceau $H(\mathcal{A})$ s'identifie canoniquement au faisceau de cohomologie (de Čech) de l'espace E, relatif au système G des $H^o(\mathcal{A}_x)$.

Résultat analogue pour les autres sortes de cohomologie, par exemple la cohomologie à supports compacts.

Soient alors deux tels faisceaux fins $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$, G et G' les coefficients locaux correspondants. Supposons données des applications bilinéaires (de faisceaux) p_i et $\bar{p}_i$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$, qui satisfassent aux conditions d'un système de i-produits (4, page 5, conditions 1°, 2°, 3°). Soient Sq_i les homomorphismes qu'on en déduit : Sq_i est défini pour m-i impair (dans le cas symétrique), ou pour m-i pair (dans le cas antisymétrique), et est un homomorphisme du <u>faisceau</u> de cohomologie $H^m(\mathcal{A})$ dans le faisceau de cohomologie $H^{2m-i}(\mathcal{A}')$, c'est-à-dire du faisceau de cohomologie de l'espace E (relatif à G) dans le faisceau de cohomologie de E (relatif à G').

<u>Théorème fondamental</u> : <u>ces homomorphismes</u> Sq_i <u>ne sont autres que les carrés de Steenrod de la cohomologie de l'espace</u> E, <u>relativement aux systèmes</u> G <u>et</u> G', <u>et à l'application bilinéaire symétrique (resp. antisymétrique) de</u> $G \times G$ <u>dans</u> G' <u>définie à partir de</u> p_o :

$$H^o(\mathcal{A}_x) \times H^o(\mathcal{A}_x) \longrightarrow H^o(\mathcal{A}'_x) \quad .$$

<u>Démonstration abrégée</u> : Soit $\mathcal{B}$ le faisceau des cochaînes entières de Čech-Alexander, $q_i = \bar{q}_i$ les i-produits définis dans ce faisceau comme il a été expliqué en 14, numéros 3,4, et 8. La cohomologie de Čech-Alexander est donnée par le faisceau $\overline{G \otimes \mathcal{B}}$ (produit tensoriel complété des faisceaux G et $\mathcal{B}$: cf. 1948/49, XV, page 3), où les i-produits sont définis par la formule (P) du numéro 8 ci-dessus. Or la démonstration du théorème fondamental de la théorie des faisceaux (1948/49, XVI, page 11, théorème 3) consiste à définir des isomorphismes de faisceaux :

$$(9) \qquad H(\mathcal{A}) \longrightarrow H(\overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}) \longleftarrow H(\overline{G \otimes \mathcal{B}})$$

qui permettent précisément d'identifier canoniquement $H(\mathcal{A})$ au faisceau de cohomologie de Čech-Alexander à coefficients dans G, à savoir $H(\overline{G \otimes \mathcal{B}})$.

Rappelons comment sont définis les isomorphismes (9) : ils proviennent des homomorphismes de faisceaux

(10) $$\mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}} \longleftarrow \overline{G \otimes \mathcal{B}} \ .$$

De même, les homomorphismes $\mathcal{A}' \longrightarrow \overline{\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}} \longleftarrow \overline{G' \otimes \mathcal{B}}$ définissent des isomorphismes $H(\mathcal{A}') \longrightarrow H(\overline{\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}}) \longleftarrow H(\overline{G' \otimes \mathcal{B}})$.

Or, la paire d'homomorphismes $\mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ et $\mathcal{A}' \longrightarrow \overline{\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}}$ est compatible avec les produits p_i et r_i ; de même, la paire d'homomorphismes $\overline{G \otimes \mathcal{B}} \longrightarrow \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ et $\overline{G' \otimes \mathcal{B}} \longrightarrow \overline{\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}}$ est compatible avec les produits q_i et r_i . C'est ce que montre l'inspection de la formule (P) du numéro précédent. De là résulte que les isomorphismes des faisceaux de cohomologie sont compatibles avec les homomorphismes Sq_i : et c'est le théorème qu'il s'agissait d'établir.

10.- <u>Application : carré de Steenrod d'un produit</u>.

Considérons un espace-produit $E \times F$; soit $\mathcal{A}$ un faisceau fin de E , tel que $H(\mathcal{A})$ soit localement de degré 0 , et $\mathcal{B}$ un faisceau fin de F , tel que $H(\mathcal{B})$ soit localement de degré 0 . Soit G le système local des $H^0(\mathcal{A}_x)$ sur E , et Γ le système local des $H^0(\mathcal{B}_x)$ sur F . Le produit tensoriel complété $\overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ (il s'agit de produit tensoriel <u>sur l'espace-produit</u> $E \times F$) est un faisceau <u>fin</u> de $E \times F$, et son système local est $G \otimes \Gamma$. A ce titre, on peut l'utiliser pour avoir la cohomologie de Čech de l'espace $E \times F$ (relative à $G \times T$) .

<u>Remarque</u> : si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des <u>carapaces</u> fines (1948/49, XII, page 4), et si E et F sont <u>compacts</u>, il n'est pas nécessaire de "compléter" le produit tensoriel $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$; de sorte que la cohomologie de $E \times F$ est donnée par le groupe $\mathcal{A}_E \otimes \mathcal{B}_F$, produit tensoriel des groupes de cochaînes des espaces E et F . Il en est encore de même si E et F ne sont pas compacts, pourvu que l'on considère la cohomologie "de deuxième espèce", donnée par les cochaînes à supports compacts.

Soit maintenant ξ une classe de cohomologie de E : élément de $H(\mathcal{A}_E)$; et soit η une classe de cohomologie de F : élément de $H(\mathcal{B}_F)$. On a une application canonique, linéaire, de

$$H(\mathcal{A}_E) \otimes H(\mathcal{B}_F) \longrightarrow H((\overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}})_{E\times F}) \ ,$$

déduite de l'application bilinéaire canonique de faisceaux :

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}} \ .$$

Par abus de langage, l'image du couple (ξ, η) se note $\xi \otimes \eta$, élément du groupe de cohomologie de l'espace produit $E \times F$.

Prenons maintenant un autre faisceau fin $\mathcal{A}'$ de E, tel que $H(\mathcal{A}')$ soit localement de degré 0 ; soit G' le système local des $H^0(\mathcal{A}'_x)$. Soit aussi un faisceau fin $\mathcal{B}'$ sur F, tel que $H(\mathcal{B}')$ soit localement de degré 0, et soit Γ' le système local des $H^0(\mathcal{B}'_x)$. Le faisceau $\overline{\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'}$ sur l'espace $E \times F$ donne le faisceau de cohomologie de $E \times F$ relatif au système $G' \otimes \Gamma'$. Supposons enfin définis des i-produits p_i dans $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$, et des i-produits q_i dans $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$; d'où des i-produits r_i dans $(\overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}, \overline{\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'})$. Les produits p_i (resp. q_i, resp. r_i) donnent les carrés de Steenrod dans la cohomologie de E (resp. de F, resp. de $E \times F$), en vertu du théorème fondamental du numéro précédent.

<u>Nous supposerons désormais que, dans</u> $\mathcal{A}'$ <u>et</u> $\mathcal{B}'$, <u>tous les éléments sont d'ordre 2</u> ; et par suite aussi dans $\overline{\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'}$. Alors les Sq_i sont définis pour toutes les valeurs de i et du degré. Soit alors f un cocycle de $\mathcal{A}_E$, g un cocycle de $\mathcal{B}_F$; $f \otimes g$ est un cocycle de $(\overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}})_{E \times F}$ et la formule (P) donne

$$r_i(f \otimes g\,,\, f \otimes g) = \sum_j p_j(f\,,\, f) \otimes q_{i-j}(g\,,\, g)\,.$$

Toutes les quantités écrites sont des cocycles ; en passant à la cohomologie, il vient la formule importante :

$$Sq_i(\xi \otimes \eta) = \sum_j Sq_j(\xi) \otimes Sq_{i-j}(\eta)\,. \tag{11}$$

Supposons maintenant $E = F$; dans $\overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$, faisons le quotient par le sous-faisceau des éléments dont le support ne rencontre pas la diagonale : on obtient, sur la diagonale, un faisceau qui donne la cohomologie de la diagonale ; dans l'homomorphisme $H(E \times E) \longrightarrow H(E)$ ainsi obtenu, l'image de $\xi \otimes \eta$ est le <u>cup-product</u> $\xi \cup \eta$. Alors (11) donne :

$$Sq_i(\xi \cup \eta) = \sum_j Sq_j(\xi) \cup Sq_{i-j}(\eta)\,. \tag{12}$$
