A. Borel

Groupes d'homotopie des groupes de Lie, I

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. n° 12, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A12_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50.

GROUPES D'HOMOTOPIE DES GROUPES DE LIE, I.

(Exposé de A. BOREL, le 27.2.1950)

1.- Généralités sur les groupes de Lie.

Un groupe topologique dont l'espace est une variété est de Lie si l'on peut rapporter un voisinage de l'élément neutre à des coordonnées dans lesquelles le produit s'exprime par des fonctions analytiques. Deux groupes topologiques sont dits localement isomorphes s'il existe entre deux voisinages des éléments neutres respectifs un homéomorphisme respectant le produit ; si G et G' sont localement isomorphes, leurs composantes connexes de l'élément neutre admettent un revêtement commun (cf. Pontrjagin, Topological groups, p. 81), donc $\pi_n(G) = \pi_n(G')$ $(n \geq 2)$.

Un groupe de Lie est simple s'il ne possède pas de sous-groupe invariant de Lie non discret autre que lui-même. Tout groupe de Lie compact (c'est-à-dire dont la variété est compacte) est localement isomorphe à un produit direct de groupes de Lie compacts simples. On peut considérer des groupes localement isomorphes comme définissant une même structure de groupe de Lie. H. Weyl [1] a montré qu'il y a correspondance biunivoque entre les structures de groupes simples compacts à r paramètres réels et les structures simples à r paramètres complexes, dont la classification a été faite par Killing et E. Cartan. Il y a les structures "classiques" que nous désignerons par leur représentant linéaire le plus connu, qui sont :

$SO(n)$: groupe orthogonal réel unimodulaire sur R^n
$SU(n)$: groupe unitaire complexe unimodulaire sur C^n
$Sp(n)$: groupe unitaire quaternionien sur K^n

G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 à resp. 14 , 52 , 78 , 133 , 248 paramètres.

L'indice désigne le rang, qui sera défini plus loin.

L'espace d'un groupe de Lie est homéomorphe au produit topologique d'un espace euclidien par l'espace d'un sous-groupe compact (Malcev, Iwasawa). Pour l'homotopie, on peut se borner aux groupes compacts et même, d'après ce qui précède, aux groupes simples compacts.

Dans la proposition suivante, = signifie localement isomorphe

<u>Proposition 1</u>.- $SO(3) = SU(2) = Sp(1)$ $\quad SO(4) = SO(3) \times SO(3)$

$SU(4) = SO(6)$ $\quad Sp(2) = SO(5)$

Nous ne démontrerons pas les égalités de la 1ère ligne, qui sont bien connues.

$SU(4) = SO(6)$. Soit z_i $(i = 1 , 2 , 3 , 4)$ une base de dual de C^4 . Un élément $u = (u_{jk})$ de $SU(4)$ induit une transformation linéaire des formes extérieures $z_r \wedge z_s$ $(r < s)$; posons $y_j = z_1 \wedge z_{j+1}$ $(j = 1 , 2 , 3)$ $y_{-1} = z_3 \wedge z_4$, $y_{-2} = z_2 \wedge z_4$, $y_{-3} = z_2 \wedge z_3$. Soit $v = (v_{mn})$ $(m , n = 1 , 2 , 3 , -1 , -2 , -3)$ la matrice de cette transformation ; v est aussi unitaire unimodulaire et l'on voit aisément que les v_{mn} sont des mineurs d'ordre 2 de $|u_{ij}|$ et que v_{mn} et $v_{-m,-n}$ sont des mineurs complémentaires ; (u_{ij}) étant unitaire unimodulaire, on a $v_{mn} = v_{-m,-n}$ et

$$v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ \overline{v_2} & \overline{v_1} \end{pmatrix} \qquad v_1 , v_2 \text{ matrices carrées d'ordre } 3 .$$

on a ainsi une représentation de $SU(4)$ par des matrices du type v qui est évidemment localement biunivoque. Introduisons des coordonnées x_n par $\sqrt{2}\, y_n = x_n + i\, x_{-n}$, $\sqrt{2}\, y_{-n} = x_n - i\, x_{-n}$ $(n = 1 , 2 , 3)$. Dans ce nouveau système, V devient

$$2w = 2tvt^{-1} = \begin{pmatrix} v_1+v_1+v_2+v_2 & i(v_1-v_1+v_2-v_2) \\ i(v_1-v_1+v_2-v_2) & v_1+v_1-v_2-v_2 \end{pmatrix} \qquad 2\ t = \begin{pmatrix} I_3 & I_3 \\ -iI_3 & iI_3 \end{pmatrix}$$

w est unitaire unimodulaire comme t , v et de plus réelle ; nous obtenons donc un isomorphisme local de $SU(4)$ dans $SO(6)$ qui est sur pour des raisons de dimensions.

$Sp(2) = SO(5)$. $Sp(k)$ est isomorphe au groupe unitaire de C^{2k} laissant invariante la forme extérieure $z_1 \wedge z_2 + \dots + z_{2k-1} \wedge z_{2k}$ (voir par exemple Chevalley, Lie groups, Chapitre I). Ici, $Sp(2)$ est isomorphe au sous-groupe de $SU(4)$ laissant invariante $z_1 \wedge z_2 + z_3 \wedge z_4$. Il admet donc une représentation par des matrices v laissant invariante la formo linéaire $y_1 + y_{-1}$ et par des matrices $w = (w_{rs})$ laissant invariante $2x_1$, d'où $w_{11} = 1$, $w_{1s} = w_{s1} = 0$ $(s \neq 1)$ et nous avons un isomorphisme local de $Sp(2)$ dans $SO(5)$ qui est aussi sur pour des raisons de dimensions.

Remarque : Il n'y a pas d'autre égalité entre les structures indiquées dans la classification.

2.- Tores maximaux, éléments singuliers.

Dans ce numéro seront résumés quelques points de la théorie des groupes de Lie compacts utilisés pour démontrer le théorème 1 . G désigne un groupe de Lie compact simple non abélien, à n paramètres.

a) L'automorphisme intérieur $g \to a\, g\, a^{-1}$ $(a \in G)$ de G induit une transformation linéaire, notée $\mathrm{ad}\ a$, de l'espace tangent à G en l'élément neutre que l'on peut identifier à l'algèbre de Lie AG de G ; on obtient ainsi une représentation de G , dont le noyau est le centre de G ; G étant compact, on peut choisir des coordonnées dans lesquelles les transformations $\mathrm{ad}\ a$ sont données par des matrices orthogonales, que nous noterons aussi par $\mathrm{ad}\ a$.

b) Le normalisateur $N(g)$ de $g \in G$ est l'ensemble des éléments de G échangeables avec g . A sa composante connexe de l'élément neutre correspond une sous-algèbre de AG (car $N(g)$ est fermé, donc de Lie) formée de l'ensemble des vecteurs fixes par $\mathrm{ad}\ g$. On a : dimension $N(g)$ = dim. de l'espace des vecteurs fixes par $\mathrm{ad}\ g$ = multiplicité de la valeur propre $+1$ de $\mathrm{ad}\ g$ puisque cette dernière est orthogonale.

c) Un groupe de Lie compact connexe abélien est un tore. G contient des tores, par exemple l'adhérence d'un sous-groupe à 1 paramètre, donc des tores maximaux. Tous les tores maximaux de G sont conjugués (par des automorphismes intérieurs) et tout élément de G est contenu dans au moins un tore (Weyl [1]) .

La dimension commune des tores maximaux est le rang r de G . Pour tout $g \in G$, $N(g)$ contient au moins un tore maximal, donc $\dim N(g) \geq r$. g est régulier si $\dim N(g) = r$, singulier sinon. Soit S l'ensemble des points singuliers, R celui des points réguliers. S est fermé car si $g_n \to g$ et si $\mathrm{ad}\ g_n$ admet $+1$ comme valeur propre avec une multiplicité strictement plus grande que r , il en est de même de $\mathrm{ad}\ g$.

Nous tâcherons, sinon de démontrer complètement, du moins de rendre plausible le fait, essentiel pour la suite, que $\dim S = n - 3$.

d) Dans toute la suite, T sera un tore maximal choisi une fois pour toutes; d'après c) , il contient au moins un représentant de chaque classe d'éléments conjugués ; comme 2 éléments conjugués sont évidemment simultanément réguliers ou non, on voit que l'on obtient S en prenant les conjugués des éléments singuliers contenus dans T.

T admet l'espace affine R^r (avec l'addition vectorielle) comme groupe de revêtement. T est le quotient de R^r par un sous-groupe discret, représenté par un réseau de points Q à r dimensions. Soient $x_1, \ldots, x_r$ des coordonnées dans R^r. Pris modulo Q ils fournissent des coordonnées dans T. p désignera la projection de R^r sur T.

Les matrices ad t $(t \in T)$ constituent une représentation de T qui se prolonge en une représentation de R^r dont le noyau contient Q. T étant compact, la représentation se décompose en une somme de représentations irréductibles dans le complexe qui sont, comme on le sait, de degré 1. Parmi ces représentations se trouvent en tout cas r représentations triviales puisque chaque ad t laisse fixe point par point le sous-espace de AG correspondant à T. Il ne peut y en avoir plus car une transformation infinitésimale échangeable avec tous les éléments de T engendrerait avec T un tore à plus de r dimensions et T ne serait pas maximal. Les $(n-r)$ autres représentations sont de la forme

$$e^{2\pi i\, a_j(x)} \qquad a_j(x) = a_{j1}\, x_1 + \ldots + a_{jr}\, x_r$$

et aucune des formes $a_j(x)$ n'est identiquement nulle. Du fait que nous sommes partis d'une représentation réelle, on déduit que les formes $a_j(x)$, les racines du groupe, se divisent en m groupes de 2 racines opposées en signes $(n = r + 2m)$. Pour que ad t ait la valeur propre $+1$ avec une multiplicité $> r$, il faut et il suffit que pour un j au moins $a_j(x) \equiv 0\ (1)$, $(x \in p^{-1}(t))$; les éléments singuliers de T ont comme images réciproques dans R^r les points des plans $a_j \equiv 0 \pmod 1$ qui se répartissent en m familles de plans parallèles. Si x est sur exactement k plans, nous dirons que x ou plutôt $p(x)$ est singulier d'ordre k, alors $\dim N(p(x)) = r + 2k$. On peut montrer que 2 plans pris dans des familles différentes ne sont pas parallèles. Ces plans divisent l'espace en simplexes ([2]) ; soit P un simplexe, ayant l'origine comme sommet, choisi une fois pour toutes ; $p(P)$ contient au moins un représentant de chaque classe d'éléments conjugués [2]. Pour $x \in Q = p^{-1}(e)$, ad $p(x)$ est l'identité, donc par x passe un plan de chaque famille de plans parallèles et par suite seuls les sommets de P peuvent faire partie de Q.

e) dimension de S. Soit x sur un seul plan singulier, alors dim $N(p(x)) = r + 2$; il est facile de montrer que l'ensemble des conjugués d'un élément $g \in G$ est homéomorphe au quotient $G/N(g)$; les conjugués de $p(x)$ forment donc une sous-variété à $n-(r+2)$ dimensions. Soit V l'intersection du plan singulier de x (à $r-1$ dimensions) avec un voisinage dans R^r de x ne coupant pas d'autre plan singulier. Si $t' \in p(V)$, ad t et ad t' ont les mêmes vecteurs fixes d'où $N(t') = N(t)$ $(t = p(x))$; il est dès lors plausible que les conjugués des éléments de $p(V)$ remplissent une sous-variété à $(r-1) + n-(r+2) = n - 3$ dimensions. On peut même montrer que cette sous-variété est homéomorphe au produit topologique $V \times (G/N(p(x)))$.

Si maintenant x est sur k plans singuliers, les conjugués de $p(x)$ forment une variété à $n-r-2k$ dimensions ; soit V l'intersection d'un voisinage de x avec les plans singuliers de x (dim $V = r - k'$, k' nombre de plans indépendants par x) ; les conjugués de $p(V)$ formeront une variété à $n - 2k - k' \leq n-3$ dimensions.

En prenant des V fermés, on obtient des sous-espaces fermés et S apparaît comme réunion dénombrable de fermés de dim $\leq n-3$, certains ayant effectivement cette dimension, donc dim $S = n - 3$ d'après le "Théorème somme" de la théorie de la dimension.

3.- π_1 , π_2 , π_3 pour les groupes compacts.

Théorème 1.- Si G est simple compact non abélien

1) $\pi_1(G)$ est fini (Weyl)

2) $\pi_2(G) = 0$ (E. Cartan)

3) $\pi_3(G) = Z$ + groupe fini (J.L. Koszul) (Z = entiers)

Remarques : 1) $0 = \pi_2(G)$ est vrai pour les groupes compacts abéliens qui sont des tores donc aussi pour tous les groupes de Lie d'après les théorèmes indiqués au numéro 1 .

2) $\pi_1(G)$ fini a déjà été établi pour les groupes classiques (Exposé 10, théorème 4) ; pour ces groupes et G_2 , F_4 nous démontrerons plus tard par des méthodes topologiques que $\pi_2(G) = 0$ et $\pi_3(G) = Z$. La démonstration du théorème 1 esquissée ci-dessous n'est donc nécessaire que pour les 3 derniers groupes exceptionnels.

3) Elle permet de déterminer les centres des groupes simplement connexes des structures exceptionnelles. Ils se réduisent à l'élément neutre sauf celui de E_6 qui est d'ordre 3 [2] .

$\pi_1(G)$. Nous ne considérons que des lacets ayant e comme origine et extrémité. Un lacet ou un arc ou une surface seront dits réguliers s'ils ne contiennent que des éléments réguliers excepté éventuellement e . Soit, comme au numéro 2 , P un simplexe de R^r , $p(P)$ sa projection dans T . Le premier point est de montrer que tout élément de $\pi_1(G)$ peut être représenté par un lacet tracé dans $p(P)$.

Tout d'abord un lacet est homotope à un lacet régulier. Ce point ne présente pas de difficulté, il résulte de ce que a) il existe des arcs réguliers issus de e , b) $\dim S \leq n-2$, c) G est localement simplement connexe. Grâce à c) on peut de plus supposer que le lacet $g(s)$ $(0 \leq s \leq 1)$ régulier débute et se termine par des arcs situés dans $p(P)$.

On sait déjà que pour tout s il existe $a(s)$, $t(s)$, $(t(s) \in p(P))$ tels que $g(s) = a(s)\, t(s)\, (a(s))^{-1}$. L'important est de voir ici que l'on peut faire en sorte que a et t soient des fonctions continues de s . Si cela est, le lacet $t(s)$ qui commence dans $p(P)$ et qui ne rencontre jamais le bord de $p(P)$, puisque $t(s)$ est régulier comme $g(s)$, sera forcément contenu dans $p(P)$. Pour s petit on prend $a(s) = e$ ce qui est possible d'après ce qui a été convenu ci-dessus. Supposons $a(s)$, $t(s)$ définis pour $s \leq s_0$. On considère une section locale A par $a(s_0)$ de la fibration de G par T et un voisinage B dans $p(P)$ de $t(s_0)$ et on montre que l'application de $A \times B$ dans G donnée par $(a , t) \dashrightarrow a.t.a^{-1}$ est un homéomorphisme. Le point essentiel à vérifier est la biunivocité de cette application. Elle résulte de ce que 2 points voisins réguliers dans $p(P)$ ne sont pas conjugués ou si l'on veut de ce qu'il n'y a pas d'automorphisme intérieur de G laissant $p(P)$ invariant, (ce qui se déduit par exemple du théorème 7 de [3]) . On peut alors sans difficulté prolonger de façon continue la définition de $a(s)$ et $t(s)$ aux valeurs de s telles que $g(s)$ soit dans l'image de $A \times B$. Le théorème 7 de [3] montre aussi que $a(s) \dashrightarrow e$ lorsque l'on s'approche du segment de $g(s)$ déjà contenu dans $p(P)$. En prenant alors $a(s) = e$ $t(s) = g(s)$ pour s voisin de 1 , on aura bien des fonctions continues de s dans $[0 , 1]$.

Considérons la famille de courbes C_v $(0 \leq v \leq 1)$:
$a(v.s)\, g(s)\, a^{-1}(v.s)$; pour $v = 0$ on a $g(s)$, pour $v = 1$ on a $t(s)$. $t(s)$ est dans la même classe d'homotopie que $g(s)$.

A $t(s)$ correspond dans P une courbe de ~~revêtement~~ unique issue de l'origine. Cette courbe $x(s)$ se termine en un point de P projeté en e

par p , donc en un sommet de P . Si ce sommet est 0 lui-même, $x(s)$ est fermée, donc homotope à zéro et il en est de même de $t(s)$. Si 2 lacets tracés dans $p(P)$ sont recouverts par des courbes ayant même extrémité ils sont homotopes (évident), donc le nombre d'éléments de $\pi_1(G)$ est au plus égal au nombre de sommets du simplexe dont l'image par p est e , il est fini et même $\leq r+1$. On peut voir en outre qu'il est égal au nombre de points de $P \cap Q$. La borne supérieure $r+1$ pour l'ordre du groupe de Poincaré est atteinte par exemple par le quotient de $SU(r+1)$ par son centre.

$\pi_2(G) = 0$. On suppose G simplement connexe. On peut alors montrer que tout élément g de G a exactement un conjugué dans $p(P)$. Soit $g = a\, t\, a^{-1}$ ($t \in p(P)$ régulier). T est la composante connexe du normalisateur de tout élément régulier qu'il contient, en particulier tout sous-groupe à 1 paramètre par t est contenu dans T . Parmi eux, il en est un seul de régulier, celui qui est tracé dans $p(P)$; plus exactement c'est un segment de ce sous-groupe joignant e à t qui est régulier, le conjugué par a de ce segment sera le seul sous-groupe à 1 paramètre de G par g qui est régulier. On voit facilement que ce sous-groupe varie avec le point régulier de façon continue (dans un sens facile à préciser). Cela permet de montrer que le sous-espace $R + \{e\}$ est contractile en e , donc que toute application d'un espace dans $R + \{e\}$ est homotope à zéro.

Soit f une application de S_2 dans G . L'idée est alors la suivante : puisque $\dim S = n-3$, $\dim f(S_2) \leq 2$, on peut "séparer" $f(S_2)$ de S c'est-à-dire trouver une application homotope à f envoyant S_2 dans $R + \{e\}$; alors f est homotope à zéro et $\pi_2(G) = 0$. Cette possibilité de séparer n'a jamais été plus explicitement traitée dans la littérature. Le point délicat ici est que S n'est pas une variété au voisinage d'un point singulier d'ordre > 1 . Cependant on peut l'obtenir en complétant les renseignements sur S donnés au numéro 2 de la façon suivante : soit S_k ($k \geq 1$) l'ensemble des points singuliers d'ordre k ; S_k est vide pour $k > m$, se réduit à un nombre fini de points (le centre) pour $k = m$. Pour $i \leq k \leq m$, S_k se compose d'un nombre fini (éventuellement nul) de sous-variétés (non compactes) plongées analytiquement dans G (muni d'une structure de groupe analytique) ; le bord de S_k est contenu dans $\cup S_p$ ($p > k$) , qui est un sous-ensemble fermé de G . En particulier tout point de S_k a un voisinage ne contenant pas de point singulier d'ordre strictement supérieur à k .

Soit donnée une application $f : S_2 \longrightarrow G$ que l'on peut supposer différentiable. On séparera tout d'abord $f(S_2)$ de S_m (nombre fini de points).

Il existe alors, si S_{m-1} n'est pas vide, un voisinage de $f(S_2) \cap S_{m-1}$ ne contenant pas de points de S_m . Dans ce voisinage on séparera $f(S_2)$ de S_{m-1} ce qui sera possible puisque tout est plusieurs fois différentiable. On séparera ensuite de S_{m-2}, etc., en faisant attention de ne jamais retomber sur des éléments singuliers d'ordre supérieur. Finalement, $f(S_2)$ sera dans R et homotope à zéro. Il est vrai que durant cette homotopie aucun point de $f(S_2)$ n'est resté fixe, mais cela ne joue pas de rôle puisque G est n-simple en toute dimension.

$\pi_3(G) = Z$ + groupe fini. On peut supposer G simplement connexe. Alors $\pi_1(G) = 0 = \pi_2(G)$ et $\pi_3(G) = H_3(G , Z)$ (Exp. 2, coroll. 2 au th. 5). Or Koszul a montré que le 3ème nombre de Betti d'un groupe de lie simple compact non abélien est égal à 1 . Comme $H_3(G)$ a un nombre fini de générateurs on a bien le résultat annoncé.

BIBLIOGRAPHIE

Théorie des éléments singuliers

[1] H. WEYL. Theorie der Darstellung kontinuerlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, II, Math. Zeitschrift, 24, 1925, Kap. III, p. 328-376.

[2] E. CARTAN. La géométrie des groupes simples, Annali di Matematica, t. 4, 1927, p. 209-256 ; t. 5, 1928, p. 253-260.

[3] E. STIEFEL. Ueber eine Beziehung zwischen geschlossenen..., Comm. Math. helvetici, 14, 1941-42, p. 350-380.

sur π_1 :

[1] [2] et

[4] E. CARTAN. La topologie des groupes de Lie. Hermann 1936 ; et le volume de Selecta.

sur π_2 :

[4]

sur $H_3(G)$:

[5] J.L. KOSZUL. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 224 (1947) p. 251-253 ; et Thèse dans Bull. Soc. math. France, t. 78, (1950) p. 65-127.