J-P. Serre

Groupes d'homotopie relatifs. Application aux espaces fibrés

Séminaire Henri Cartan, tome 2 (1949-1950), exp. nº 9, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1949-1950__2__A10_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1949/50.

GROUPES D'HOMOTOPIE RELATIFS
APPLICATION AUX ESPACES FIBRÉS
(Exposé de J-P. SERRE, le 23.1.1950)

1.- Définition des groupes d'homotopie relatifs.

Notations : Soient $x \in A \subset E$, E espace topologique.

Soit d'autre part I le segment $[o - 1]$. On identifiera I^{n-1} au sous-espace de I^n formé des points dont la dernière coordonnée est nulle. On posera F^{n-1} = frontière de I^n et $C^{n-1} = F^{n-1}$ diminué de l'intérieur de I^{n-1} ("couvercle").

Nous allons définir $\pi_n(E , A , x)$, n-ème groupe d'homologie de E modulo A en x .

Première définition.

Pour tout entier $p \geq 1$, soit $\mathcal{F}_p(E , A , x)$ l'espace des applications continues de C^{p-1} , F^{p-1} , I^p dans x , A , E (ceci signifie que l'on considère les applications continues de I^p dans E qui envoient F^{p-1} dans A et C^{p-1} en x). Nous noterons x_p l'application de I^p en x . Munissons $\mathcal{F}_p$ de la topologie de la convergence compacte (c'est-à-dire de la convergence uniforme, quand E est un espace uniforme). Nous poserons alors :

Définition 1. Pour $n \geq 2$, $\pi_n(E , A , x) = \pi_1(\mathcal{F}_{n-1}(E , A , x),x_{n-1})$.

Deuxième définition.

Définissons sur $\mathcal{F}_n$ $(n \geq 2)$ la loi de composition suivante :

$$f.g(x_1 , \dots , x_n) = \begin{cases} f(2x_1 , \dots , x_n) & \text{si } x_1 \leq 1/2 \\ g(2x_1-1 , \dots , x_n) & \text{si } x_1 \geq 1/2 \end{cases}$$

Cette loi est visiblement compatible avec la relation d'équivalence définie par la connexion par arc sur $\mathcal{F}_n$ et définit par passage au quotient le groupe $\pi_n(E , A , x)$.

Equivalence des deux définitions.

Elle résulte de l'homéomorphisme canonique entre $\mathcal{F}_n(E , A , x)$ et $\mathcal{F}_1(\mathcal{F}_{n-1}(E , A , x) , x_{n-1})$ défini par $f(x_1 , \dots , x_n) = f_{x_1}(x_2 ,\dots, x_n)$ et de la vérification que les deux lois de composition sont bien transformées l'une de l'autre.

Nous conviendrons de désigner par $\pi_1(E , A , x)$ l'ensemble des composantes connexes par arc de $\mathcal{F}_1(E , A , x)$. <u>Cè n'est pas un groupe</u> en général. Cependant, nous dirons que la classe de x_1 est son élément unité.

<u>Autres définitions.</u>

Le triplet $(C^{n-1} , F^{n-1} , I^n)$ a été utilisé pour pouvoir définir simplement la loi de composition de π_n et les relations récurrentes entre les $\mathcal{F}_n$. On peut en prendre d'autres, par exemple (a , F^{n-1} , I^n) ou (a , S^{n-1} , B^n) avec $a \in F^{n-1}$ et $a \in S^{n-1}$. Il est souvent commode de "voir" un élément de π_n comme une famille à 1 paramètre de sphères de dimension n-1 , commençant par une sphère réduite à un point et se terminant par une sphère de A .

<u>Remarques.</u>

1) Si $A = \{x\}$, on a : $\pi_n(E , x , x) = \pi_n(E , x)$, on retrouve les groupes d'homotopie absolus. D'ailleurs les définitions que nous venons de donner sont des généralisations directes de celles de l'exposé 2 .

2) Un élément de $\mathcal{F}_n(E , A , x)$ qui envoie I^n tout entier dans A définit l'élément neutre de π_n . Cela résulte de ce que C^{n-1} <u>est un rétracte de déformation de</u> I^n , comme on s'en assure par homothétie de centre "au-dessus" de I^n .

Ceci justifie dans une certaine mesure le terme d'<u>homotopie relative</u> à A .

3) Il ne faudrait cependant pas croire que $\pi_n(E , A , x)$ ne dépend que de l'espace différence E - A . C'est faux, même pour des polyèdres finis, contrairement à ce qui se passe pour l'homologie.

4) Il existe une correspondance canonique entre $\pi_n(E , A , x)$ et $\pi_1(\mathcal{F}_{n-1}(E , x) , \mathcal{F}_{n-1}(A , x) , x_{n-1})$ qui est biunivoque sur. Cette correspondance provient d'un homéomorphisme entre $\mathcal{F}_n(E , A , x)$ et $\mathcal{F}_1(\mathcal{F}_{n-1} \ldots$ etc) défini par $f(x_1 , \ldots , x_n) = f_{x_n}(x_1 , x_2 , \ldots , x_{n-1})$.

<u>Théorème 1.- Les groupes d'homotopie relatifs sont abéliens pour</u> $n \geqslant 3$.

La démonstration est la même que celle du théorème 2 de l'exposé 2. On utilise le fait que $\pi_n(E , A , x)$ est le groupe fondamental de $\mathcal{F}_{n-1}(E , A , x)$ espace qui est muni d'une loi de composition, à savoir celle que l'on obtient en le considérant comme espace des lacets de $\mathcal{F}_{n-2}(E,A,x)$.

On peut également se ramener au théorème en question en remarquant que l'on a : $\pi_n(E , A , x) = \pi_2(\mathcal{F}_{n-2}(E , A , x) , x_{n-2})$.

Système local des groupes d'homotopie relatifs.

On peut montrer que les groupes $\pi_n(E , A , x)$ où E et A sont fixes et où x parcourt A , forment un système local au sens de Steenrod sur A .

2.- La suite exacte de l'homotopie relative.

Soient tout d'abord deux espaces topologiques X et Y et une application continue de X dans Y , soit f . Si x et $x' \in X$ sont dans une même composante connexe par arc, il en est de même de $f(x)$ et de $f(x')$. Autrement dit, f définit par passage au quotient une application de l'ensemble $\pi_0(X)$ des composantes connexes par arc de X dans $\pi_0(Y)$.

Soit maintenant f une application de l'espace E dans l'espace F envoyant la partie A de E dans B et le point $x \in A$ en $y \in B$. En appliquant aux espaces $\mathcal{F}_n(E , A , x)$ et $\mathcal{F}_n(F , B , y)$ ce qui précède, on voit que l'on obtient une application f° de $\pi_n(E , A , x)$ dans $\pi_n(F , B , y)$. De plus, si $n \geqslant 2$ ou si $n=1$ et $A=\{x\}$ et $B = \{y\}$, f° est un homomorphisme, comme il résulte immédiatement de la définition du produit dans les $\mathcal{F}_n$.

En particulier les applications canoniques suivantes :

$$(x , x , A) \longrightarrow (x , x , E) \longrightarrow (x , A , E) \quad ,$$

définissent des homomorphismes canoniques :

$$\pi_n(A , x) \longrightarrow \pi_n(E , x) \longrightarrow \pi_n(E , A , x) \quad .$$

L'homomorphisme canonique de $\pi_n(E , A , x)$ dans $\pi_{n-1}(A , x)$.

Si f est une application $\in \mathcal{F}_n(E , A , x)$, faisons-lui correspondre l'élément $g \in \mathcal{F}_{n-1}(A , x)$ tel que $g(x_1 , \dots , x_{n-1}) = f(x_1 ,\dots,x_{n-1},0)$. On a une application continue respectant la loi de composition, d'où, par passage au quotient l'homomorphisme en question.

Théorème 2.- La suite d'homomorphismes canoniques :

$$\pi_0(E) \longleftarrow \pi_0(A) \longleftarrow \pi_1(E,A) \longleftarrow \pi_1(E) \longleftarrow \pi_1(A) \longleftarrow \pi_2(E,A) \longleftarrow \dots \pi_n(E) \longleftarrow \pi_n(A)$$
$$\longleftarrow \pi_{n+1}(E,A) \dots$$

est une suite exacte. (on a supprimé le point x des différents groupes écrits, pour des raisons typographiques).

Avant de démontrer ce théorème, remarquons que les trois derniers termes de la suite ne sont pas des groupes. Cependant, ils possèdent tous un élément neutre, et les noyaux des applications sont de ce fait bien définis.

Nous allons d'ailleurs ramener la démonstration du théorème 2 à l'exactitude de la suite formée des cinq premiers termes. Pour cela, rappelons (1, Remarque 4) que le groupe $\pi_n(E\ ,\ A)$ est isomorphe à $\pi_1(\mathcal{F}_{n-1}(E\ ,\ x)\ ,\ \mathcal{F}_{n-1}(A\ ,\ x))$. On a donc un homomorphisme de suites (où l'on a posé $\mathcal{F}_{n-1}(E\ ,\ x) = E'$ et $\mathcal{F}_{n-1}(A\ ,\ x) = A'$) :

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n-1}(E) & \pi_{n-1}(A) \arrow[l] \arrow[d] & \pi_n(E\ ,\ A) \arrow[l] \arrow[d] & \pi_n(E) \arrow[l] \arrow[d] & \pi_n(A) \arrow[l] \arrow[d] \\
\pi_0(E') & \pi_0(A') \arrow[l] & \pi_1(E',\ A') \arrow[l] & \pi_1(E') \arrow[l] & \pi_1(A') \arrow[l]
\arrow[from=1-1, to=2-1, crossing over]
\end{tikzcd}$$

Les applications verticales sont biunivoques sur et les compatibilités voulues sont remplies. Si l'on démontre l'exactitude de la deuxième suite, celle de la première suivra.

Nous devons faire 3 verifications : noyau = image.

a) <u>Noyau = image pour</u> $\pi_0(A)$.

Le noyau est formé des classes de points de A qui peuvent être joints à x dans E . L'image est l'ensemble des classes de points de A obtenus comme extrémité d'un chemin de E issu de x . L'identité est évidente.

b) <u>Noyau = image pour</u> $\pi_1(E\ ,\ A)$.

Le noyau est formé des classes de chemins joignant x à un point de A qui peut être joint à x dans A (condition 1).

L'image est formée des lacets de E (condition 2) .

L'identité des deux s'obtient en remarquant qu'un chemin vérifiant la condition 1 peut être déformé en un chemin vérifiant 2 .

c) <u>Noyau = image pour</u> $\pi_1(E)$.

L'image est formée des lacets tracés dans A ,

Le noyau est formé des lacets de E pouvant être déformés en le lacet o , lorsque l'on permet à leur extrémité de se déplacer dans A . Cette extrémité décrit alors un lacet de A visiblement homotope au lacet donné, ce qui établit l'identité dans ce cas, et achève la démonstration du théorème 2 .

Rapport avec l'homologie.

On sait que les groupes d'homologie singuliers de E , A , (E , A) forment une suite exacte analogue à celle de l'homotopie. De façon précise, on a un homomorphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \pi_{n-1}(E) & \leftarrow & \pi_{n-1}(A) & \leftarrow & \pi_n(E , A) & \leftarrow & \pi_n(E) & \leftarrow & \pi_n(A) & \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots & H_{n-1}(E) & \leftarrow & H_{n-1}(A) & \leftarrow & H_n(E , A) & \leftarrow & H_n(E) & \leftarrow & H_n(A) & \cdots
\end{array}$$

L'existence de cet homomorphisme et la démonstration des compatibilités qu'il suppose se font très facilement, à condition d'opérer en homologie cubique.

Remarque : On a mieux qu'une simple suite exacte de groupes : on peut voir que l'on a une suite exacte de système locaux sur A , ou, ce qui revient au même pour A connexe par arc, $\pi_1(A)$ opère sur la suite exacte des groupes d'homotopie.

3.- La suite exacte d'homotopie des espaces fibrés.

Soit E un espace fibré localement trivial, de base B , et de fibre F . Notons p la projection de E sur B .

Théorème de relèvement des homotopies.

Soit X un espace localement compact et paracompact et $f(x , t)$ une application continue de $X \times I$ dans B et g_o une application continue de X dans E telle que : $p \circ g_o(x) = f(x , o)$.

Il existe une application $g(x , t)$ de $X \times I$ dans E telle que : $p \circ g(x , t) = f(x , t)$ et que $g(x , o) = g_o(x)$. En outre si $f(x , t)$ est indépendante t pour un certain x , on peut choisir g de telle sorte qu'il en soit de même.

Ce théorème ne suppose pas que E soit un espace fibré à groupe structural. Pour sa démonstration, voir Exposé 8.

En utilisant ce théorème, nous allons montrer des relations remarquables entre les groupes d'homotopie de E , F , B .

Théorème 3.- La projection de E sur B définit un isomorphisme de $\pi_n(E , F)$ sur $\pi_n(B)$.

a) sur : Interprétons les éléments de $\pi_n(B)$ comme des lacets de sphères de dim. $n-1$, commençant et finissant à la sphère ponctuelle. Remontons la sphère ponctuelle en une sphère ponctuelle de E et appliquons le relèvement des homotopies. On obtient un chemin de S^{n-1} dans E, commençant à la sphère ponctuelle et finissant par une sphère dont on sait seulement qu'elle se projette suivant une sphère ponctuelle, c'est-à-dire qu'elle est dans une fibre. On a bien obtenu un élément de $\pi_n(E, F)$.

b) <u>biunivoque</u> : Si une sphère de E (mod F) a une projection homotope à un point dans B, on remonte l'homotopie et elle est homotope à o dans E modulo F.

<u>Remarque</u> : Pour les deux démonstrations, on a utilisé le complément donné plus haut au théorème de relèvement des homotopies (la constance de $g(x, t)$ quand $f(x, t)$ a la même propriété).

Si nous remplaçons $\pi_n(E, F)$ par $\pi_n(B)$ dans la suite exacte d'homotopie relative de E modulo F, nous obtenons :

<u>Théorème 4.- La suite des homomorphismes canoniques</u> :

$$0 \leftarrow \pi_0(B) \leftarrow \pi_0(E) \leftarrow \pi_0(F) \leftarrow \pi_1(B) \leftarrow \pi_1(E) \ldots \pi_{n-1}(F) \leftarrow \pi_n(B) \leftarrow$$

$$\leftarrow \pi_n(E) \leftarrow \pi_n(F) \cdots$$ <u>est une suite exacte</u>.

(On remarquera que l'on a ajouté au début de la suite les termes 0 et $\pi_0(B)$, ce qui est licite, comme on le voit immédiatement). Le théorème 4 a été démontré de façon à peu près simultanée par Eckmann, Ehresmann-Feldbau et Hurewicz-Steenrod sous des hypothèses légèrement différentes de celles qui sont énoncées ici.

4.- Application aux revêtements.

On dit que l'espace E est un <u>revêtement</u> de B si E est un espace fibré de base B et de fibre discrète. Un tel espace peut toujours être considéré comme un espace fibré à groupe structural totalement discontinu, et, dans les cas les plus importants, à groupe structural discret.

En appliquant la suite exacte du théorème 4, on voit que, $\pi_n(F)$ étant nul pour $n \geqslant 1$, on a :

<u>Théorème 5.</u>- (Hurewicz) <u>Les groupes d'homotopie supérieurs d'un revêtement sont isomorphes à ceux de la base.</u>

<u>Corollaire 1</u> : $\pi_n(S^1) = 0$ pour $n \geqslant 2$.

<u>Corollaire 2</u> : <u>Les groupes d'homotopie supérieure d'une surface compacte autre que la sphère sont nuls.</u> (En effet, leur revêtement est R^2).

Soit toujours E un revêtement de B que nous supposons <u>connexe</u>. On a alors :

$$0 \leftarrow \pi_0(F) = F \leftarrow \pi_1(B) \leftarrow \pi_1(E) \leftarrow 0 \ . \text{ D'où :}$$

<u>Théorème 6</u>.- <u>Si</u> E <u>est un revêtement connexe de</u> B , <u>le groupe fondamental de</u> E <u>est un sous-groupe de celui de</u> B <u>et la fibre est isomorphe à l'espace quotient</u>.

5.- <u>Application aux espaces homogènes</u>.

Signalons d'abord le résultat suivant, indépendant de la théorie des espaces fibrés :

<u>Proposition 1</u> (Hu) - <u>Soit</u> G <u>un groupe topologique et</u> g <u>un sous-groupe fermé de</u> G . <u>Le groupe</u> $\pi_2(G\ ,\ g)$ <u>est abélien</u>.

On supposera que le point de base est l'élément neutre du groupe G , soit e . Cela n'a aucune importance, vu que les translations à gauche sont des homéomorphismes.

Rappelons que $\pi_2(G\ ,g,\ x) = \pi_1(\mathcal{F}_1(G\ ,\ g\ ,\ e)\ ,\ e_1)$. Or, l'espace $\mathcal{F}_1(G\ ,\ g\ ,\ e)$ peut être muni d'une structure de groupe topologique en posant: $f.g(t) = f(t).g(t)$, ce dernier produit étant pris dans G . On applique alors le théorème 1 de l'Exposé 2 .

Soit encore G et g et supposons que G soit <u>fibré par</u> g de façon localement triviale. On peut alors appliquer le théorème 4 . Supposons en particulier que g soit connexe par arc, on a $0 \leftarrow \pi_1(B) \leftarrow \pi_1(G)$. Comme $\pi_1(G)$ est abélien, $\pi_1(B)$ aussi. C'est le théorème de Hu :

<u>Proposition 2</u> (Hu) - <u>Soit</u> G <u>un groupe topologique fibré localement trivial par un sous-groupe fermé connexe</u> g . <u>Le groupe fondamental de l'espace homogène</u> G/g <u>est abélien</u>.

On peut montrer (E. Cartan - Borel) que le second groupe d'homotopie de tout groupe de Lie est nul. Soit alors G un groupe de Lie simplement connexe et g un sous-groupe connexe invariant fermé de G .

<u>Proposition 3</u> (Iwasawa) - <u>Dans les conditions précédentes, les groupes</u> g <u>et</u> G/g <u>sont simplement connexes</u>.

Ecrivons en effet, le morceau de suite exacte :

$$\ldots\ \pi_0(g) \leftarrow \pi_1(G/g) \leftarrow \pi_1(G) \leftarrow \pi_1(g) \leftarrow \pi_2(G/g)\ \ \ldots$$

Les premier, troisième et cinquième termes sont nuls. Il en est donc de même des deux autres, ce qui constitue justement la proposition à démontrer.

BIBLIOGRAPHIE

Relèvement des homotopies et Suite exacte d'homotopie des espaces fibrés :

[1] B. ECKMANN. Zur homotopietheorie gefaserter Räume (Commentarii math. helvetici, t. 14, 1941/42, p. 141-192).

[2] C. EHRESMANN. Sur les applications continues d'un espace dans un espace fibré ou dans un revêtement. (Bull. Soc. math. France, t. 72, 1944, p. 38-66).

[3] C. EHRESMANN et J. FELDBAU. Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés. (C.R. Acad. Sci. Paris, t. 212, 1941, p. 945-948).

[4] HUREWICZ et STEENROD. Homotopy relations in fibre spaces. (Proc. nat. Acad. Sc., U.S.A., t. 27, 1941, p. 60-64).

Homotopie relative :

FOX. Homotopy groups and torus homotopy groups. (Annals of math., t. 49, 1948, p. 471-510).