H. Cartan

Opérateurs d'homotopie (suite et fin) : déformations ; homologie singulière d'un complexe simplicial

Séminaire Henri Cartan, tome 1 (1948-1949), exp. n° 9, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1948-1949__1__A9_0>

OPÉRATEURS D'HOMOTOPIE (Suite et fin) : DÉFORMATIONS ; HOMOLOGIE SINGULIÈRE D'UN COMPLEXE SIMPLICIAL.

(Exposé fait par H. CARTAN, le 31.1.1949).

1.- Opérateur d'homotopie défini par une déformation.

Soit E un espace topologique. Rappelons qu'une application continue ψ de E dans E définit un endomorphisme permis h du groupe $S(E)$ des chaînes singulières de E. On dit que l'application ψ provient d'une déformation si, désignant par I l'espace topologique constitué par le segment $[0\,,\,1]$ de la droite réelle, il existe une application continue φ de l'espace produit $E \times I$ dans E, telle que $\varphi(M,1) = M$ pour tout M de E, et $\varphi(M,0) = \psi(M)$ pour tout M de E.

Théorème 1.- Si ψ provient d'une déformation, l'endomorphisme h défini par ψ est un opérateur d'homotopie.

Nous allons démontrer un théorème plus général. Soit V un recouvrement de E par des ensembles tels que tout point de E soit intérieur à l'un au moins d'entre eux, et soit $S_V(E)$ le sous-groupe des chaînes singulières petites d'ordre V. Un endomorphisme permis h du groupe $S_V(E)$ sera dit provenir d'une déformation des chaînes singulières (petites d'ordre V) si: on peut attacher à chaque simplexe x petit d'ordre V un "prisme singulier" y, c'est-à-dire (en supposant x de dimension p) une fonction $y(\lambda_o,\dots,\lambda_p;t)$ de $p+1$ variables $\lambda_i \geqslant 0$ de somme un, et d'une variable réelle t parcourant le segment $I = [0,1]$, cette fonction étant continue et telle que

$$y(\lambda_o,\dots,\lambda_p;1) = x(\lambda_o,\dots,\lambda_p) \quad \text{(c'est-à-dire le simplexe donné } x\text{)}$$

$$y(\lambda_o,\dots,\lambda_p;0) \quad \text{soit le simplexe "déformé" } h(x)\ .$$

On suppose en outre que ces déformations de simplexes singuliers satisfont à une condition d'"hérédité" : la déformation d'une face du simplexe singulier x doit être induite (sur la "face" correspondante du prisme de déformation) par la déformation de x. Enfin, on suppose que le prisme de déformation est petit d'ordre V. Le théorème 1 est alors un cas particulier du

Théorème 1 bis.- Si un endomorphisme permis du groupe $S_V(E)$ provient d'une déformation des chaînes singulières petites d'ordre V, c'est un opérateur d'homotopie dans $S_V(E)'$.

<u>Démonstration</u> : y est une application continue d'un "prisme" euclidien. Notons pour un instant a_i le i-ième sommet du simplexe qui constitue la "base" de ce prisme relative à $t = 1$, c'est-à-dire le point de coordonnées $t=1$, $\lambda_i=1$, $\lambda_j=0$ pour $j \neq i$. Notons de même b_i le i-ième sommet de la "base" relative à $t = 0$. On va définir, dans le groupe $S_V(E)$, un endomorphisme k de degré $+1$, tel que h soit l'opérateur d'homotopie <u>associé à</u> k. Pour cela, on définira $k(x)$ pour chaque simplexe singulier x ; $k(x)$ sera la somme des simplexes singuliers obtenus par restriction de l'application continue y aux simplexes euclidiens suivants, que nous désignons par la suite (ordonnée) de leurs sommets :

$$(b_o a_o a_1 \ldots a_p)\ ,\quad -(b_o b_1 a_1 \ldots a_p)\ ,\quad +(b_o b_1 b_2 a_2 \ldots a_p)\ ,\ \ldots,\quad (-1)^p (b_o b_1 \ldots b_p a_p)\ .$$

(ceci est suggéré par la décomposition géométrique d'un prisme en simplexes).

L'opérateur k étant ainsi défini, une vérification de calcul montre que l'on a bien

$$dk(x) + kd(x) = x - h(x)$$

pour tout simplexe singulier x, petit d'ordre V (on écrit ici d au lieu de ∂). Il importe de remarquer que tous les simplexes de $k(x)$ sont alors petits d'ordre V, de sorte que k et h opèrent bien dans le groupe $S_V(E)$. Ceci achève la démonstration du théorème.

<u>Remarque</u> : si la déformation des chaînes singulières de $S_V(E)$ est telle que, pour un sous-espace F de E, le prisme de déformation de chaque simplexe de F est contenu dans F, alors h et k opèrent dans $S_V(F)$ et $S_V(E \bmod F)$, donc h est opérateur d'homotopie dans $S_V(F)$ et $S_V(E \bmod F)$. Le transposé h^* est opérateur d'homotopie dans $S^*_V(E)$, $S^*_V(F)$ et $S^*_V(E \bmod F)$.

2.- <u>Comparaison de l'homologie simpliciale et de l'homologie singulière</u>.

Jusqu'à la fin de cet exposé, K désigne un complexe simplicial <u>localement fini</u>, et $\widetilde{K}$ l'espace topologique (localement compact) qui lui est associé (cf. exposé 1, paragraphe 3). Si L est un sous-complexe de K, $\widetilde{L}$ s'identifie à un sous-espace de $\widetilde{K}$. Chaque sommet k de K définit un "sommet" $\widetilde{k}$, point de $\widetilde{K}$ de coordonnées (λ_j) telles que $\lambda_k = 1$, $\lambda_j = 0$ pour $j \neq k$. Chaque simplexe ordonné de K (élément du groupe des chaînes simpliciales $C(K)$) étant défini par la suite de ses sommets, la suite des points correspondants de $\widetilde{K}$ définit un simplexe singulier <u>affine</u> de l'espace $\widetilde{K}$; on obtient ainsi un isomorphisme (dit canonique) de $C(K)$ sur un sous-groupe permis de $S(\tilde{K})$. Pour tout sous-complexe L, $C(L)$ est appliqué dans $S(\tilde{L})$, et, par passage au quotient, on a un isomorphisme canonique de $C(K \bmod L)$ sur un sous-groupe de $S(\tilde{K} \bmod \tilde{L})$. En transposant, on trouve des homomorphismes canoniques de $S^*(\tilde{K})$ sur $C^*(K)$, etc... De plus, soit $\mathcal{C}(K)$ le groupe des chaînes simpliciales de deuxième espèce (combinaisons linéaires, éventuellement infinies, de simplexes ordonnés, mais telles qu'un sommet, quel qu'il soit, n'appartienne qu'à un nombre fini de simplexes de cette combinaison). On a un isomorphisme canonique de $\mathcal{C}(K)$ sur un sous-groupe du groupe $\mathcal{S}(\tilde{K})$ des chaînes singulières de deuxième espèce ; de même, un homomorphisme canonique du groupe $\mathcal{S}^*(\tilde{K})$ des cochaînes singulières de deuxième espèce sur le groupe $\mathcal{C}^*(K)$ des cochaînes simpliciales de deuxième espèce (cochaînes "finies").

Tous les homomorphismes précédents sont des homomorphismes permis. Ils donnent donc lieu à des homomorphismes (dits aussi canoniques) des groupes dérivés correspondants, c'est-à-dire des groupes d'homologie (resp. cohomologie) simpliciale et singulière. D'une façon précise, on a les homomorphismes canoniques

$$H(K) \to H(\tilde{K}) , \quad H(K \bmod L) \to H(\tilde{K} \bmod \tilde{L}) , \quad H^*(\tilde{K}) \to H^*(K) , \quad H^*(\tilde{K} \bmod \tilde{L}) \to H^*(K \bmod L)$$

$$\mathcal{H}(K) \to \mathcal{H}(\tilde{K}) , \quad \mathcal{H}^*(\tilde{K}) \to \mathcal{H}^*(K) \quad .$$

<u>Théorème 2</u>.- Tous les homomorphismes précédents sont des <u>isomorphismes sur</u>.

C'est ce qu'on exprime brièvement en disant que les groupes d'homologie et de cohomologie <u>simpliciale</u> sont des <u>invariants topologiques</u> de l'espace $\tilde{K}$ associé à K (resp. du couple $\tilde{K},\tilde{L}$ associé au couple K,L).

Avant de démontrer ce théorème faisons deux remarques :

1) les homomorphismes relatifs aux cochaînes sont des homomorphismes d'<u>anneau</u> (si on a une structure d'anneau sur γ) ; donc les isomorphismes des groupes de cohomologie singulière sur les groupes de cohomologie simpliciale seront aussi des isomorphismes pour la structure multiplicative.

2) si on a un autre complexe simplicial K', une application simpliciale f de K dans K', et l'application continue $\tilde{f}$ de $\tilde{K}$ dans $\tilde{K'}$ qu'elle définit (cf. exposé 1, paragraphe 3), on a le diagramme de compatibilité suivant

$$\begin{array}{ccc} C(K) & \longrightarrow & S(\tilde{K}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(K') & \longrightarrow & S(\tilde{K'}) \end{array}$$

où les flèches horizontales désignent les homomorphismes canoniques, et les flèches verticales les homomorphismes définis par f et $\tilde{f}$ respectivement.

On en déduit le diagramme de compatibilités

$$\begin{array}{ccc} H(K) & \longrightarrow & H(\widetilde{K}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(K') & \longrightarrow & H(\widetilde{K}') \end{array}$$

qui exprime que si l'on identifie, par le théorème 2, $H(K)$ et $H(\widetilde{K})$, $H(K')$ et $H(\widetilde{K}')$, l'homomorphisme de $H(K)$ dans $H(K')$ défini par l'application simpliciale f s'identifie à l'homomorphisme de $H(\widetilde{K})$ dans $H(\widetilde{K}')$ défini par l'application continue $\widetilde{f}$.

3.- Démonstration du théorème 2 (théorème de "l'invariance topologique").

On va définir un recouvrement V de l'espace $\widetilde{K}$, tel que tout point de $\widetilde{K}$ soit intérieur à au moins un ensemble de V, et que $C(K) \subset S_V(\widetilde{K})$ ($C(K)$ étant désormais canoniquement identifié à un sous-groupe permis de $S(\widetilde{K})$). Puis on définira une déformation des chaînes de $S_V(\widetilde{K})$ (donc un opérateur d'homotopie d'après le théorème 1) qui soit un projecteur sur $C(K)$. En vertu du théorème 2 de l'exposé 7 (paragraphe 2), il en résultera que

$$H(K) \rightarrow H_V(\widetilde{K}) \text{ est un isomorphisme sur ;}$$

et comme $H_V(\widetilde{K})$ s'identifie à $H(\widetilde{K})$ (cf. exposé 8, paragraphe 3), on aura bien prouvé que $H(K) \rightarrow H(\widetilde{K})$ est un isomorphisme sur. De plus, pour tout sous-complexe L, il se trouvera que la déformation envisagée applique $S_V(\widetilde{L})$ sur $C(L)$, le sous-groupe $S_V(\widetilde{L})$ étant stable pour l'opérateur k ; h opèrera donc comme opérateur d'homotopie dans tous les groupes $S_V(\widetilde{K} \bmod \widetilde{L})$, et le théorème 2 en résultera.

Définition du recouvrement V : pour tout simplexe A (partie finie de K, contenue dans l'ensemble de parties qui définit précisément la structure simpliciale de K), définissons le sous-espace U_A de $\widetilde{K}$, formé des points (λ_k) tels que l'on ait $\lambda_i > \lambda_j$ chaque fois que $i \in A$ et $j \notin A$; l'ensemble U_A est ouvert, et les U_A recouvrent $\widetilde{K}$. Soit V_A la réunion de U_A et de $\widetilde{A}$; les V_A (quand A parcourt l'ensemble des simplexes de K) constituent un recouvrement V de l'espace $\widetilde{K}$, tel que tout point soit intérieur à au moins un ensemble de ce recouvrement.

Dans le cube I^K, le segment joignant un point de $\widetilde{A}$ et un point de V_A est tout entier dans V_A, et en particulier dans $\widetilde{K}$. En effet : 1) le segment joignant deux points de $\widetilde{A}$ est dans $\widetilde{A}$; 2) tout point intérieur au segment joignant un point de U_A et un point de $\widetilde{A}$ est dans U_A.

Nous allons définir un endomorphisme h dans le groupe $S_V(\widetilde{K})$ des chaînes singulières petites d'ordre V . Pour cela, ordonnons totalement l'ensemble des sommets de K . Puis définissons le transformé $h(s)$ d'un point s de $\widetilde{K}$ (simplexe singulier de dim. 0) comme suit : $h(s)$ sera le <u>premier</u> des sommets $\widetilde{k}$ de $\widetilde{K}$ tels que λ_k ait la plus grande valeur parmi les coordonnées du point s . Alors, si des points s_i sont dans un même ensemble V_A , leurs transformés $h(s_i)$ sont dans $\widetilde{A}$. Soit alors x un simplexe singulier petit d'ordre V ; les transformés de ses sommets seront tous dans un même ensemble $\widetilde{A}$, donc on pourra envisager le simplexe affine qu'ils définissent ; ce sera un élément de $S_V(\widetilde{K})$, qui sera par définition le transformé $h(x)$.

L'endomorphisme h du groupe $S_V(\widetilde{K})$ étant maintenant défini, il reste à définir la "déformation" dont h provient. Or, étant donné un simplexe singulier x et son transformé $h(x)$, le segment de droite qui joint un point quelconque de x à son transformé dans $h(x)$ est tout entier contenu dans V_A si le simplexe x est dans V_A ; la déformation se définit alors d'une manière évidente par linéarité. De plus, pour tout sous-complexe L de K , la déformation opère dans $S_V(\widetilde{L})$; et comme $h(x) = x$ pour tout $x \in C(K)$, h est un projecteur de $S_V(\widetilde{K})$ sur $C(K)$. Ceci achève la démonstration du théorème 2.

4.- <u>Groupes relatifs et groupes de deuxième espèce</u>.

Dans l'exposé 8 (paragraphe 5), on a défini, pour un espace <u>compact</u> E et un sous-espace fermé F , le groupe d'homologie singulière relative de deuxième espèce $\mathcal{H}(E \bmod F)$, groupe dérivé du groupe des chaînes singulières relatives de deuxième espèce $\mathcal{S}(E \bmod F)$. On a un homomorphisme canonique $S(E \bmod F) \to$ $\to \mathcal{S}(E \bmod F)$, qui est <u>permis</u>, d'où un homomorphisme canonique $H(E \bmod F) \to$ $\to \mathcal{H}(E \bmod F)$. De plus on a montré (loc. cit.) que $\mathcal{H}(E \bmod F)$ est canoniquement isomorphe au groupe d'homologie singulière de deuxième espèce $\mathcal{H}(E-F)$ de l'espace localement compact $E-F$. D'où un homomorphisme canonique :

$$H(E \bmod F) \to \mathcal{H}(E-F) .$$

On a de même, pour la cohomologie, un homomorphisme canonique

$$\mathcal{H}^*(E-F) \to H^*(E \bmod F) .$$

Ceci s'applique, en particulier, si E est l'espace $\widetilde{K}$ associé à un complexe simplicial <u>fini</u> K , et F le sous-espace $\widetilde{L}$ associé à un sous-complexe L de K . Mais, dans ce cas, on a en outre :

<u>Théorème 3</u>.- Les homomorphismes canoniques

$$H(K \bmod L) \to \mathcal{H}(\widetilde{K}-\widetilde{L}) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^*(\widetilde{K}-\widetilde{L}) \to H^*(K \bmod L)$$

sont des <u>isomorphismes sur</u>. (On a identifié, grâce au théorème 2, les groupes simpliciaux $H(K \bmod L)$ et $H^*(K \bmod L)$ respectivement aux groupes singuliers $H(\tilde{K} \bmod \tilde{L})$ et $H^*(\tilde{K} \bmod \tilde{L})$).

<u>Corollaire</u> : les groupes simpliciaux $H(K \bmod L)$ et $H^*(K \bmod L)$ sont, lorsque K est un complexe simplicial <u>fini</u>, des invariants topologiques de l'espace localement compact $\tilde{K}-\tilde{L}$.

Principe de la démonstration : on montre que h définit un projecteur de $\mathcal{S}(\tilde{K} \bmod \tilde{L})$ sur $C(K \bmod L)$. Par transposition, on a aussi un projecteur de $\mathcal{S}^*(\tilde{K} \bmod \tilde{L})$ sur $C^*(K \bmod L)$. Ces projecteurs sont des opérateurs d'homotopie, d'où le théorème.

5.- <u>Application à l'homologie des boules et des sphères</u>.

Raisonnons sur l'homologie ; il en serait de même pour la cohomologie. Pour avoir les groupes d'homologie <u>de deuxième espèce</u> d'une <u>boule ouverte</u> de <u>dimension</u> n $(n \geqslant 1)$, on prend pour K un simplexe de dimension n , pour L sa frontière, et on calcule les groupes $H_p(K \bmod L)$. Ils sont évidemment nuls pour tout $p \neq n$; pour $p = n$, si on utilise les chaînes orientées, on trouve aussitôt que $H_n(K \bmod L)$ est isomorphe au groupe additif des entiers Z . Conséquence : <u>invariance topologique de la dimension d'une boule ouverte</u>.

On sait (par exemple par l'exposé 7, paragraphe 6) que $H_p(K) = 0$ pour $p \geqslant 1$, et $H_o(K) \approx Z$. En utilisant la suite exacte

$$\cdots \leftarrow H_p(K \bmod L) \leftarrow H_p(K) \leftarrow H_p(L) \leftarrow H_{p+1}(K \bmod L) \leftarrow \cdots$$

on obtient aisément les groupes d'homologie $H_p(L)$, qui sont ceux de la <u>sphère de dimension</u> $n-1$:

- si $n=1$, $H_o(L) \approx Z+Z$, $H_p(L) = 0$ pour $p \geqslant 1$;
- si $n \geqslant 2$, $H_o(L) \approx H_{n-1}(L) \approx Z$, $H_p(L) = 0$ pour $p \neq 0$, $n-1$.

Si B_n désigne la boule ouverte de dimension $n \geqslant 1$ (resp. S_n la sphère de dimension $n \geqslant 1$), le groupe $\mathcal{H}_n(B_n)$ (resp. $H_n(S_n)$), étant isomorphe à Z , possède <u>deux</u> éléments générateurs possibles (dont chacun engendre le groupe) choisir l'un de ces éléments, c'est par définition <u>orienter</u> la boule B_n (resp. la sphère S_n) .