H. Cartan

La cohomologie de Čech-Alexander

Séminaire Henri Cartan, tome 1 (1948-1949), exp. n° 6, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1948-1949__1__A6_0>

LA COHOMOLOGIE DE ČECH-ALEXANDER.

(Exposé fait par H. CARTAN, le 10.1.1949).

N.B.- Les définitions qui suivent valent pour un espace <u>localement compact</u>. Pour un espace <u>compact</u>, les groupes (resp. anneaux) de cohomologie auxquels elles conduisent sont les mêmes que ceux définis par Čech pour les espaces <u>normaux</u> ; mais, pour un espace localement compact non compact, même s'il est normal (ce qui arrive notamment s'il est réunion dénombrable de compacts), les résultats obtenus ici sont différents de ceux auxquels conduisent les définitions de Čech, qui, semble-t-il, sont sans intérêt pour un espace non compact. Ceci dit, nous appellerons néanmoins <u>cohomologie de Čech-Alexander</u> la cohomologie telle que nous allons la définir pour un espace localement compact ; cette dénomination permet de la distinguer de la cohomologie singulière (exposé 5). La définition adoptée ici est équivalente à celle de SPANIER (Ann. of Math., 1948), qui s'inspire d'une définition proposée antérieurement par ALEXANDER. Il faudrait aussi citer les noms de KOLMOGOROFF et de LERAY.

1.- <u>RAPPEL</u> : <u>Chaînes et cochaînes d'un complexe</u> "<u>simple</u>".

Soit E un ensemble abstrait ; il définit un complexe simplicial <u>simple</u> (exposé 2, paragraphe 3), c'est-à-dire pour lequel <u>toutes</u> les parties finies de E sont des "simplexes". Tout ensemble abstrait E définit donc un groupe de chaînes $C(E)$ (chaînes "ordonnées") et, pour chaque groupe γ de coefficients, un groupe de cochaînes $C^*(E,\gamma)$ (resp. un anneau de cochaînes si γ est un anneau). On a démontré (exposé 2, paragraphe 3) que le groupe d'homologie $H(E)$ est trivial, dans le sens suivant : $H_p(E)$ est nul pour tout entier $p \neq 0$, et isomorphe au groupe additif des entiers pour $p = 0$. On retrouvera ce résultat dans l'exposé suivant, où l'on montrera aussi que le groupe de cohomologie $H^p(E)$ est nul pour $p \neq 0$ et isomorphe à γ pour $p = 0$.

Soit, sur l'ensemble E , une structure de complexe simplicial. Notons K l'ensemble E muni de cette nouvelle structure ; K est un sous-complexe du complexe simple E . Le groupe des chaînes $C(K)$ s'identifie à un sous-groupe permis de $C(E)$, et $C^*(K,\gamma)$ s'identifie au quotient du groupe $C^*(E,\gamma)$ par le sous-groupe des cochaînes qui s'annulent sur tous les simplexes de K . Au point de vue de la structure multiplicative (si γ est un anneau) : $C^*(K,\gamma)$ est l'anneau quotient de l'anneau $C^*(E,\gamma)$ par l'idéal des cochaînes qui s'annulent sur tous les simplexes de K .

2.- Cochaînes d'un espace localement compact.

Supposons désormais que l'ensemble E soit muni d'une structure topologique qui fasse de E un espace localement compact (c'est le cas le plus intéressant). Soit V un recouvrement de E tel que tout point de E soit intérieur à au moins un ensemble de V , par exemple un recouvrement de E par des ensembles ouverts (c'est ici qu'intervient la topologie de E). Un tel recouvrement V définit un sous-complexe K_V du complexe simple E : une partie finie de E est un "simplexe" de K_V si elle est "petite d'ordre V ", c'est-à-dire contenue dans au moins un ensemble de V . Le groupe des cochaînes de K_V (à valeurs dans γ) est le quotient de $C^*(E,\gamma)$ par le sous-groupe (resp. idéal s'il s'agit de la structure multiplicative quand γ est un anneau) I_V que voici : une cochaîne f homogène de degré p appartient à I_V si $f(x_o,\ldots,x_p) = 0$ chaque fois que l'ensemble des points $x_o,\ldots,x_p$ est petit d'ordre V .

Soit I la réunion des I_V relatifs à tous les recouvrements V du type dit (on pourrait se borner à considérer les recouvrements ouverts ; cela ne changerait pas la réunion des I_V). I est un sous-groupe (resp. idéal) permis de $C^*(E,\gamma)$. Le groupe quotient (resp. anneau quotient) $C^*(E,\gamma)/I$ est un groupe gradué à dérivation (resp. anneau gr. à dér.), où l'opérateur δ est de degré $+1$. Ce groupe (resp. anneau) sera noté $\check{C}(E,\gamma)$, et appelé le groupe (resp. anneau) des cochaînes d'Alexander de l'espace topologique E , relativement à γ . On écrira $\check{C}^p(E,\gamma)$ pour le sous-groupe des cochaînes homogènes de degré p .

3.- Supports.

Nous allons donner une autre définition de I : soit $f(x_o,\ldots,x_p)$ une cochaîne de degré p . Considérons l'espace produit E^{p+1} , et soit Δ la "diagonale" de cet espace ; f est une fonction définie sur l'espace topologique E^{p+1} , et l'application $x \rightarrow (x,x,\ldots,x)$ est l'homéomorphisme canonique de E sur Δ . Relativement à f , les points de Δ sont de deux sortes : ceux au voisinage desquels f est identiquement nulle, et les autres. Ces derniers forment un ensemble fermé ; les points correspondants de E constituent, par définition, le support de la cochaîne f ; c'est un ensemble fermé. On voit alors que les cochaînes de degré p qui appartiennent à I sont celles qui prennent la valeur 0 dans tout un voisinage de la diagonale Δ , autrement dit, ce sont les cochaînes de support vide.

Deux cochaînes équivalentes modulo I ont évidemment même support. On définit donc le support d'un élément de $\check{C}(E,\gamma)$ (cochaîne d'Alexander). On notera que le support de δf est contenu dans le support de f .

4.- Cohomologie de Čech-Alexander.

Le groupe dérivé (resp. anneau dérivé si γ est un anneau) de $\check{C}(E,\gamma)$ se notera $\check{H}(E,\gamma)$ et s'appellera le groupe (resp. anneau) de cohomologie (de Čech-Alexander) de l'espace localement compact E , relativement à γ . C'est un groupe gradué (resp. anneau gradué) ; notation $\check{H}^p(E,\gamma)$ pour le sous-groupe des éléments de degré p .

Signification de $\check{H}^o(E,\gamma)$.- Ce groupe s'identifie au groupe des cocycles de degré 0 . Or les cochaînes de degré 0 sont les fonctions de point $f(x)$; une telle cochaîne est un cocycle si $f(x) = f(y)$ chaque fois que les points x et y sont suffisamment voisins, c'est-à-dire si f est localement constante. Or une fonction localement constante est une fonction constante sur chaque composante connexe, et réciproquement ; mais il faut préciser le sens que l'on donne à "composante connexe", et qui est ici différent de celui rencontré en homologie singulière (exposé 5, paragraphe 1), où il s'agissait de la connexion "par arcs". Ici, un point y appartient à la composante connexe de x si, pour tout recouvrement ouvert V de l'espace E , il existe une suite finie $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'ensembles U_i de V , tels que $x \in U_1$, $y \in U_n$, et que chaque U_i $(i \leq n-1)$ rencontre U_{i+1} . On obtient bien ainsi une relation d'équivalence, dont les classes (les "composantes connexes" de E) sont des ensembles fermés. Un espace E sera dit connexe s'il n'a qu'une seule composante connexe ; les composantes connexes sont des espaces connexes. Pour que E soit non connexe, il faut et il suffit qu'il n'existe pas de partition de E en deux sous-ensembles ouverts non vides.

En résumé, le groupe de cohomologie de Čech-Alexander, pour la dimension 0 , s'identifie au groupe des applications, dans γ , de l'ensemble des composantes connexes de E ; il se réduit à γ si E est connexe.

5.- Effet d'une application continue de E dans E' .

Une telle application φ définit une application simpliciale du complexe simple E dans le complexe simple E' , d'où un homomorphisme permis de $C^*(E',\gamma)$ dans $C^*(E,\gamma)$. C'est celui qui, à $f(x'_o,\dots,x'_p)$, associe $f(\varphi(x_o),\dots,\varphi(x_p))$. Cet homomorphisme applique I' dans I , parce que φ est

<u>continue</u>. D'où, par passage au quotient, un homomorphisme permis :

$$\psi \ : \ \check{C}(E',\gamma) \longrightarrow \check{C}(E,\gamma) \ .$$

On en déduit, comme d'habitude, un homomorphisme : $\check{H}(E',\gamma) \rightarrow \check{H}(E,\gamma)$. Si γ est un anneau, c'est un homomorphisme pour les structures d'anneaux. Condition évidente de <u>transitivité</u> dans le cas de trois espaces.

<u>Remarque</u> : si $f \in \check{C}(E')$, le support de $\psi(f)$ est contenu dans l'image réciproque du support de f .

6.- <u>Cohomologie de deuxième espèce</u>, <u>ou à supports compacts</u>.

On va donner de nouvelles définitions, mais qui, dans le cas d'un espace compact, ne conduisent à rien de nouveau.

On a déjà défini le <u>support</u> (fermé) d'une cochaîne de $\check{C}(E,\gamma)$. Dans le groupe (resp. anneau) $\check{C}(E,\gamma)$, les cochaînes <u>dont le support est compact</u> forment un sous-groupe (sous-anneau) permis $\mathcal{C}(E,\gamma)$. Le groupe(anneau) dérivé s'appelle le <u>groupe</u> (resp. anneau) <u>de cohomologie compacte</u> de l'espace localement compact E ; nous le noterons $\check{\mathcal{H}}(E,\gamma)$.

<u>Interprétation de</u> $\check{\mathcal{H}}^0(E,\gamma)$.- C'est le groupe des fonctions qui sont nulles sur chaque composante connexe non compacte et constantes sur les composantes connexes compactes. Si E est connexe et non compact, le groupe de cohomologie compacte, pour la dimension 0 , est <u>nul</u>.

Une application continue <u>propre</u> de E dans E' (cf. définition, exposé 5, paragraphe 6) définit un homomorphisme permis de $\mathcal{C}(E')$ dans $\mathcal{C}(E)$, donc un homomorphisme de $\check{\mathcal{H}}(E')$ dans $\check{\mathcal{H}}(E)$.

La cohomologie compacte donne lieu à une théorie relative lorsqu'on envisage un sous-espace fermé de E et son complémentaire (ouvert). Cette théorie, fort importante, sera exposée plus tard.