P. SAMUEL

Dualité, cochaînes et cohomologie

Séminaire Henri Cartan, tome 1 (1948-1949), exp. n° 4, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1948-1949__1__A4_0>

DUALITÉ, COCHAÎNES ET COHOMOLOGIE.
(Exposés de P. SAMUEL, les 7 et 13.12.1948)

1.- Groupes d'homomorphismes.

Soient G et γ deux groupes abéliens (la théorie vaut, plus généralement, pour des modules sur un même anneau commutatif avec élément unité). Les homomorphismes de G dans γ forment un groupe abélien, noté $\mathrm{Hom}(G,\gamma)$. On a une application bilinéaire de $G \times \mathrm{Hom}(G,\gamma)$ dans γ, savoir celle qui, au couple d'un élément x de G et d'un élément x' de $\mathrm{Hom}(G,\gamma)$ associe la valeur de l'homomorphisme x' pour l'élément x, valeur qui est dans γ. On notera $\langle x,x'\rangle$ cette fonction bilinéaire à valeurs dans γ ; on se rapellera que si x' est tel que $\langle x,x'\rangle = 0$ pour tout x, alors $x' = 0$ (par contre, un $x \neq 0$ peut être tel que $\langle x,x'\rangle = 0$ pour tout x'). On dit parfois qu'un x de G et un x' de $\mathrm{Hom}(G,\gamma)$ sont orthogonaux si $\langle x,x'\rangle = 0$.

Dans ce qui suit, γ est fixé, et on fait varier G. Soit f un homomorphisme de G_1 dans G_2 ; il lui correspond un homom. f^* de $\mathrm{Hom}(G_2,\gamma)$ dans $\mathrm{Hom}(G_1,\gamma)$, à savoir celui qui, à $x_2' \in \mathrm{Hom}(G_2,\gamma)$, fait correspondre l'homom. composé $x_2' \circ f$. La relation caractéristique qui définit f^* à l'aide de f est

$$\langle f(x_1),x_2'\rangle = \langle x_1,f^*(x_2')\rangle$$

pour tout $x_1 \in G_1$ et tout x_2' dans $\mathrm{Hom}(G_2,\gamma)$.

Si $f = g + h$, alors $f^* = g^*+h^*$. Si on a trois groupes G_1,G_2,G_3, un homomorphisme g de G_1 dans G_2, et un homom. h de G_2 dans G_3, on a

$$(h\circ g)^* = g^*\circ h^* \quad \text{(homom. de } \mathrm{Hom}(G_3,\gamma) \text{ dans } \mathrm{Hom}(G_1,\gamma)\text{).}$$

Ceci prouve notamment que le transposé d'un projecteur de G est un projecteur de $\mathrm{Hom}(G,\gamma)$.

Soit G un groupe, F un sous-groupe, G/F le groupe quotient ; considérons la suite des homom. naturels

$$F \xrightarrow[f]{} G \xrightarrow[g]{} G/F .$$

On a la suite des homom. transposés

$$\mathrm{Hom}(F,\gamma) \xleftarrow[f^*]{} \mathrm{Hom}(G,\gamma) \xleftarrow[g^*]{} \mathrm{Hom}(G/F,\gamma) \quad .$$

g^* est <u>biunivoque</u>, et on identifiera toujours $\mathrm{Hom}(G/F,\gamma)$ à un sous-groupe de $\mathrm{Hom}(G,\gamma)$. De plus la suite est <u>exacte</u> : en effet, si x' est un homom. de G dans γ , $f^*(x')$ est l'homom. de F dans γ obtenu par restriction de l'homomorphisme x' ; le noyau de f^* se compose donc des homom. x' qui prennent la valeur zéro sur F , et c'est précisément le sous-groupe image de g^* , sous-groupe qu'on a identifié à $\mathrm{Hom}(G/F,\gamma)$.

On prendra garde que, en général, f^* n'est pas une application de $\mathrm{Hom}(G,\gamma)$ <u>sur</u> $\mathrm{Hom}(F,\gamma)$: un homom. de F dans γ ne peut pas toujours être prolongé en un homom. de G dans γ . Toutefois, il <u>suffit</u> que F soit facteur direct de G pour qu'un tel prolongement soit possible ; dans ce cas, $\mathrm{Hom}(F,\gamma)$ s'identifie à un quotient du groupe $\mathrm{Hom}(G,\gamma)$.

Réciproquement, soient G un groupe et F un sous-groupe, tels que, pour tout groupe γ , l'application $\mathrm{Hom}(G,\gamma) \rightarrow \mathrm{Hom}(F,\gamma)$ soit une application <u>sur</u>. Alors F est facteur direct de G . En effet, prenons $\gamma = F$; l'application identique de F dans F est prolongeable en un homom. de G sur F , qui est nécessairement un projecteur ; ce qui prouve que F est facteur direct de G .

Lorsque F est facteur direct de G , un projecteur de G sur F permet d'identifier $\mathrm{Hom}(F,\gamma)$ à un facteur direct de $\mathrm{Hom}(G,\gamma)$. En effet, on a une suite d'homomorphismes : $F \rightarrow G \rightarrow F$, dont le premier est l'homom. naturel de F dans G , et dont le composé est l'automorphisme identique de F ; la suite des homomorphismes transposés : $\mathrm{Hom}(F,\gamma) \leftarrow \mathrm{Hom}(G,\gamma) \leftarrow \mathrm{Hom}(F,\gamma)$ montre que le composé de ces homom. étant l'identité, le second est biunivoque : il identifie donc $\mathrm{Hom}(F,\gamma)$ à un sous-groupe de $\mathrm{Hom}(G,\gamma)$, et avec cette identification le premier homom. est un projecteur.

2.- Cas d'un groupe gradué à dérivation.

Soit $G = \sum_n G_n$ un groupe gradué à dérivation (cf. Exp. 2) ; soit d l'opérateur de dérivation, qui applique G_n dans G_{n+r}. Soit $G^n = \mathrm{Hom}(G_n, \gamma)$; le transposé d^* applique G^{n+r} dans G^n, et on a $d^* \circ d^* = 0$. Ainsi $G^* = \sum_n G^n$ est un groupe gradué à dérivation, et son opérateur de dérivation est de degré $-r$. Bien que G^* soit distinct, comme groupe abélien, du groupe $\mathrm{Hom}(G, \gamma)$, nous emploierons souvent, par abus de langage, la notation $\mathrm{Hom}(G, \gamma)$ pour désigner G^*.

Soient G et G' deux groupes gradués à dérivation, dont les opérateurs d et d' soient de même degré r. Soit f un homom. permis de G dans G', c'est-à-dire tel que $f \circ d = d' \circ f$, $f \circ \theta_n = \theta'_n \circ f$; on sait que f définit des homomorphismes des groupes dérivés ("groupes d'homologie") : $H_n(G) \to H_n(G')$. Soit maintenant $G^* = \mathrm{Hom}(G, \gamma)$ et $G'^* = \mathrm{Hom}(G', \gamma)$; l'homom. transposé f^* de G'^* dans G^* est un homom. permis (transposer les relations précédentes) et définit donc des homom. des groupes dérivés : $H^n(G'^*) \to H^n(G^*)$.

Si on a trois groupes, il y a une propriété évidente de transitivité.

3.- Cochaînes d'un complexe simplicial.

Soit K un complexe simplicial. Prenons pour G le groupe $C(K)$ des chaînes ordonnées ; c'est un groupe gradué à dérivation. Le groupe $\mathrm{Hom}(G, \gamma)$ se notera $C^*(K, \gamma)$ (ou $C^*(K)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté au sujet de γ). Les éléments de $C^*(K, \gamma)$ s'appellent cochaînes de K (à valeurs dans γ). On distingue le sous-groupe des cochaines de degré n (ou dimension n), qui s'identifie au groupe $\mathrm{Hom}(C_n(K), \gamma)$; on le note souvent $C^n(K, \gamma)$. L'opérateur transposé de ∂ (opérateur "bord" dans les chaînes) se note δ ; il est de degré $+1$ et s'appelle opérateur "cobord". Notons la relation qui définit δ :

$$\langle \partial x, x' \rangle = \langle x, \delta x' \rangle \quad .$$

On désigne par $Z^*(K, \gamma)$ le sous-groupe des cocycles, c'est-à-dire des cochaînes x' telles que $\delta x' = 0$; ce sont les cochaînes orthogonales aux bords. $Z^n(K, \gamma)$ désignera le sous-groupe des cocycles de degré n. Une cochaîne x' est un "cobord" si elle a la forme $x' = \delta y'$; on note $B^*(K, \gamma)$ le groupe des cobords, et $B^n(K, \gamma)$ le groupe des cobords de degré n. Enfin, on notera $H^*(K, \gamma)$ le groupe quotient $Z^*(K, \gamma)/B^*(K, \gamma)$, qu'on appelle groupe de cohomologie du complexe K (relativement à γ) ; et $H^n(K, \gamma)$ le quotient

$Z^n(K,\gamma)/B^n(K,\gamma)$, groupe de cohomologie pour la dimension n .

Puisque $C_n(K)$ est un groupe <u>libre</u> ayant pour base l'ensemble des simplexes ordonnés de K , une cochaîne de degré n peut être considérée comme une fonction des simplexes (ordonnés) de dimension n , à valeurs dans γ . La formule donnant le cobord d'une telle fonction f est :

$$\delta f(a_0,\dots a_{n+1}) = \sum_i (-1)^i \delta f(a_0,\dots,\hat{a}_i,\dots,a_{n+1}) \quad .$$

Les cochaînes de degré 0 ne sont autres que les fonctions de sommets ; parmi elles, le sous-groupe des <u>fonctions constantes</u> (qui sont des cocycles) sera identifié au groupe γ lui-même.

Le groupe $c(K)$ des chaînes <u>orientées</u> est un quotient de $C(K)$; le groupe $\mathrm{Hom}(c(K),\gamma)$ s'identifie donc à un sous-groupe du groupe $C^*(K,\gamma)$ de toutes les cochaînes ; c'est le sous-groupe des <u>cochaînes alternées</u> : une cochaîne est alternée (de degré n) si c'est une fonction $f(a_0,\dots,a_n)$ des simplexes ordonnés de dimension n , nulle quand 2 au moins des sommets a_i sont égaux, et qui est multipliée par $\varepsilon_\sigma = \pm 1$ quand on effectue une permutation σ sur les sommets. Le groupe des cochaînes alternées est aussi un groupe gradué à dérivation ; on verra plus tard que le groupe de cohomologie correspondant est canoniquement isomorphe au groupe de cohomologie $H^*(K,\gamma)$ obtenu à partir de toutes les cochaînes.

Soit φ une <u>application simpliciale</u> d'un complexe K dans un complexe K' , et f l'homomorphisme permis de $C(K)$ dans $C(K')$ qu'elle définit. Le transposé f^* est un homomorphisme permis de $C^*(K')$ dans $C^*(K)$. On obtient ainsi, outre un homomorphisme $\bar{f}$ de $H(K)$ dans $H(K')$ (cf. exposé 2), un homomorphisme, en sens inverse, de $H^*(K')$ dans $H^*(K)$. Condition évidente de transitivité dans le cas de trois complexes simpliciaux.

4.- <u>Accouplement entre homologie et cohomologie</u>.

Ce qui va être expliqué pour l'homologie et la cohomologie vaudrait pour tout groupe à dérivation G et pour $G^* = \mathrm{Hom}(G,\gamma)$. Ici, nous supposons que G est $C(K)$, K désignant un complexe simplicial. La relation $\langle \partial x,x' \rangle = \langle x,\delta x' \rangle$ montre qu'un cycle et un cobord sont toujours "orthogonaux", et de même un bord et un cocycle. Donc, si y et y' sont respectivement un cycle et un cocycle, la quantité $\langle y,y' \rangle$ ne change pas si on ajoute un bord à y , ou un cobord à y' ; par passage au quotient, on obtient une application <u>bilinéaire</u> de

$$H(K) \times H^*(K,\gamma) \quad \text{dans} \quad \gamma \quad .$$

Le "produit scalaire" d'une classe d'homologie de K et d'une classe de cohomologie de K, qui est un élément de γ, s'appelle parfois l'"indice de Kronecker" des deux classes.

Il revient au même de dire qu'on a un homomorphisme <u>canonique</u>

$$H^*(K,\gamma) \to \mathrm{Hom}(H(K),\gamma) .$$

Ce résultat vaut pour tout groupe à dérivation. Mais dans le cas de l'homologie et de la cohomologie simpliciales, on a un résultat supplémentaire, qui tient au fait que le groupe $C(K)$ est <u>libre</u> : l'homomorphisme de $H^*(K,\gamma)$ dans $\mathrm{Hom}(H(K),\gamma)$ est une application <u>sur</u> ; autrement dit, $\mathrm{Hom}(H(K),\gamma)$ s'identifie à un quotient de $H^*(K,\gamma)$. La démonstration est laissée au lecteur.

Si nous revenons au cas d'une application simpliciale d'un complexe K dans un complexe K', les homomorphismes qu'elle définit pour les groupes d'homologie et de cohomologie de K et de K' est <u>compatible</u> avec l'accouplement, dans le sens du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H(K) & \longrightarrow & H(K') \\ \| & & \| \\ H^*(K) & \longleftarrow & H^*(K') \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \gamma & & \gamma \end{array}$$

Ceci signifie que si l'on part d'un élément α de $H(K)$ et d'un élément β' de $H^*(K')$, on peut en déduire un même élément de γ par deux voies différentes : la première consiste à prendre l'image α' de α dans $H(K')$, puis à procéder à l'accouplement de α' et β' ; la seconde consiste à prendre l'image β de β' dans $H^*(K)$, puis à procéder à l'accouplement de α et β.

5.- <u>Cochaînes et cohomologie relatives</u>.

Soit L un sous-complexe d'un complexe simplicial K. On sait (exposé 2) que $C(L)$ s'identifie à un sous-groupe permis de $C(K)$, et qu'on note $C(K/L)$ le groupe quotient $C(K)/C(L)$. Soit $C^*(K/L,\gamma)$ le groupe $\mathrm{Hom}(C(K/L),\gamma)$; il s'identifie à un sous-groupe (permis) de $C^*(K,\gamma)$: le sous-groupe des cochaînes de K qui s'annulent sur les chaînes de L.

Ce qu'on a dit plus haut sur l'accouplement entre homologie et cohomologie vaut pour le groupe d'homologie de K modulo L (groupe $H(K/L)$) et le groupe de cohomologie de K modulo L (groupe $H^*(K/L,\gamma)$). De même, puisque $C(K/L)$ est libre, on a un homomorphisme canonique de $H^*(K/L,\gamma)$ <u>sur</u> $\mathrm{Hom}(H(K/L),\gamma)$.

Puisque $C(L)$ est facteur direct de $C(K)$, on peut identifier $C^*(L,\gamma)$

au groupe quotient $C^*(K,\gamma)/C^*(K/L,\gamma)$. On aura donc les deux <u>suites exactes</u>

$$\begin{tikzcd} H(L) \arrow[r] & H(K) \arrow[dl] \\ H(K/L) \arrow[u, "\partial"] \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} H^*(L,\gamma) \arrow[d, "\delta"'] & H^*(K,\gamma) \arrow[l] \\ H^*(K/L,\gamma) \arrow[ur] \end{tikzcd}$$

De plus, elles donnent lieu au diagramme de compatibilités suivant, en ce qui concerne les accouplements :

$$\begin{array}{ccccccc} H(L) & \longrightarrow & H(K) & \longrightarrow & H(K/L) & \longrightarrow & H(L) \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ H^*(L) & \leftarrow & H^*(K) & \leftarrow & H^*(K/L) & \leftarrow & H^*(L) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \gamma & & \gamma & & \gamma & & \gamma \end{array}$$

6.- <u>Un théorème sur le groupe de oohomologie d'un groupe libre</u>.

Soit G un groupe libre avec opérateur de dérivation. Nous verrons plus tard comment la structure de $H(G)$ détermine celle de $H^*(G,\gamma)$. Pour le moment, bornons-nous à démontrer :

<u>Théorème</u>.- <u>Soit</u> G <u>un groupe libre avec opérateur de dérivation</u>. <u>Si</u> $H(G) = 0$, <u>on a</u> $H^*(G,\gamma) = 0$ <u>quel que soit le groupe</u> γ .

D'abord, si G est libre, le groupe des bords $B(G)$, sous-groupe d'un groupe libre, est libre (exposé 3) ; et comme l'endomorphisme ∂ identifie $B(G)$ au quotient $G/Z(G)$, $Z(G)$ est <u>facteur direct</u> de G . Mais l'hypothèse $H(G) = 0$ exprime que $Z(G)$ se réduit à $B(G)$; donc tout homomorphisme de $B(G)$ dans γ peut se prolonger en un homomorphisme de G dans γ . Cela dit, nous voulons montrer que si un homom. f de G dans γ est un "cocycle", c'est-à-dire si $f(\partial x) = 0$ pour tout x , alors f est un "cobord", c'est-à-dire qu'il existe un homom. g de G dans γ tel que $f(x) = g(\partial x)$ pour tout x de G . Or f s'annule sur $Z(G)$, puisque $Z(G) = B(G)$; donc $f(x)$ ne dépend que de ∂x . $\partial x \to f(x)$ définit ainsi un homomorphisme de $B(G)$ dans γ ; d'après ce qu'on a vu, il se laisse prolonger en un homomorphisme g de G dans γ . Et ceci démontre le théorème.

On laisse au lecteur le soin de démontrer ; si G est un groupe libre <u>gradué</u> avec opérateur de dérivation de degré -1 , et si $H_n(G)$ et $H_{n-1}(G)$ sont nuls, alors $H^n(G,\gamma)$ est nul pour tout groupe abélien γ .

7.- <u>Cochaînes finies</u> ; <u>groupe de cohomologie compacte</u>.

Soit K un complexe simplicial. Appelons <u>cochaîne finie</u> toute cochaîne(fonction de simplexes ordonnés de K) qui s'annule sauf sur un nombre fini de simplexes. Les cochaînes finies de degré n constituent un *groupe libre* (au contraire, le groupe de toutes les cochaînes n'est pas libre en général).

Supposons désormais que le complexe K soit *localement fini*. Alors le sous-groupe des cochaînes finies est *stable* pour δ, car si x' est une cochaîne finie de degré n, il n'existe qu'un nombre fini de simplexes x de dimension $n+1$ tels que $\langle \partial x, x' \rangle \neq 0$. Donc le groupe $C_f^*(K,\gamma)$ des cochaînes finies est un groupe libre gradué avec opérateur de dérivation δ ; son groupe dérivé, noté $H_f^*(K,\gamma)$, s'appelle le *groupe de cohomologie compacte* du complexe K (relativement à γ). On verra plus tard que c'est un invariant topologique de l'espace localement compact K.

On pourrait introduire le groupe quotient $C^*(K,\gamma)/C_f^*(K,\gamma)$; son groupe dérivé exprime des "propriétés à l'infini" du complexe localement fini K. On a une suite exacte d'homomorphismes reliant ce groupe dérivé au groupe de cohomologie (ordinaire) de K et au groupe de cohomologie compacte de K.

Soient K et K' deux complexes localement finis. Une application simpliciale φ de K dans K' sera dite *propre* si l'image réciproque de tout sommet de K' est un ensemble *fini* de sommets de K. Cette condition exprime que l'application continue $\tilde{\varphi}$ de $\tilde{K}$ dans $\tilde{K}'$, définie par φ (cf. exposé 1) est telle que l'image réciproque de tout ensemble compact de $\tilde{K}'$ est un ensemble compact de $\tilde{K}$. Cela dit, si φ est une application simpliciale propre, l'homomorphisme de $C^*(K')$ dans $C^*(K)$ défini par φ (cf. cet exposé, paragraphe 3) transforme toute cochaîne finie de K' dans une cochaîne finie de K ; on obtient donc un homomorphisme des groupes de cohomologie compacte :

$$H_f^*(K',\gamma) \longrightarrow H_f^*(K,\gamma) \quad .$$

Soit L un sous-complexe de K localement fini. On définit le groupe $C_f^*(K/L)$ des *cochaînes finies de* K *modulo* L, comme le sous-groupe de $C_f^*(K)$ formé des cochaînes finies de K qui s'annulent sur L. Le groupe $C_f^*(L)$ s'identifie au quotient $C_f^*(K)/C_f^*(K/L)$. On a donc une *suite exacte* d'homomorphismes concernant les trois groupes de cohomologie compacte

$$\begin{tikzcd} H_f^*(L) \arrow[dr, "\delta"'] & & H_f^*(K) \arrow[ll] \\ & H_f^*(K/L) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

8.- *Structure multiplicative de l'anneau des cochaînes et de l'anneau de cohomologie.*

Supposons que γ soit le groupe additif d'un *anneau*, non nécessairement commutatif. On suppose donc définie une application <u>bilinéaire</u> $(x,y) \rightarrow xy$ de $\gamma \times \gamma$ dans γ. Il ne sera pas indispensable de supposer cette multiplication associative.

Soit alors K un complexe simplicial ; dans le groupe des cochaînes $C^*(K,\gamma)$, on va définir une multiplication ; il suffira de définir le "produit" d'une cochaîne f de degré p et d'une cochaîne g de degré q ; ce sera une cochaîne h de degré $p+q$, qui sera une fonction bilinéaire de f et g. La définition de h est :

$$(1) \qquad h(a_o,\ldots,a_{p+q}) = f(a_o,\ldots,a_p)\, g(a_p,\ldots,a_{p+q}) ,$$

où, au second membre, on a le produit de deux éléments de γ. Si la multiplication de γ est associative, il en est de même de la multiplication des cochaînes.

$C^*(K,\gamma)$ est ainsi muni d'une structure d'<u>anneau gradué</u> (définition évidente). On identifiera l'anneau γ au sous-anneau des cochaînes constantes de degré 0 (qui sont des cocycles). Si γ a un élément unité, il est aussi élément unité de $C^*(K,\gamma)$.

Dans $C^*(K,\gamma)$, l'opérateur δ et la multiplication sont liés par la relation fondamentale

$$(2) \qquad \delta(fg) = (\delta f)g + (-1)^p f(\delta g) \quad \text{pour } f \text{ de degré } p$$

(vérification aisée). On peut écrire une formule valable pour des cochaînes non homogènes, en introduisant l'automorphisme involutif $f \rightarrow \bar{f}$ qui, à une somme de cochaînes homogènes f^p de degrés p, associe la cochaîne $\sum_p (-1)^p f^p$. On a alors

$$(2)' \qquad \delta(fg) = (\delta f)g + \bar{f}(\delta g) .$$

Nous sommes conduits à la notion générale d'<u>anneau gradué à dérivation</u> : on appellera ainsi un anneau A, dont le groupe additif est gradué, et qui est muni d'un opérateur de dérivation δ de degré $+1$, de manière que :

- le produit d'un élément de degré p et d'un élément de degré q soit de degré $p+q$;

- la relation (2)' soit satisfaite.

<u>Exemple</u> : les formes différentielles extérieures sur une variété différentiable (δ étant alors l'opérateur de différentiation extérieure).

En général, soit A un anneau gradué à dérivation. Dans le groupe dérivé

$H(A)$ du groupe additif de A (groupe gradué à dérivation), on peut définir une structure multiplicative de la façon suivante : l'ensemble $Z(A)$ des cocycles est un sous-anneau de A, car (2)' montre que le produit de 2 cocycles est un cocycle. L'ensemble $B(A)$ des cobords est un <u>idéal bilatère</u> dans $Z(A)$, car (2)' prouve que le produit d'un cocycle et d'un cobord (resp. d'un cobord et d'un cocycle) est un cobord. En passant au quotient, on trouve donc une structure d'anneau dans $Z(A)/B(A) = H(A)$: <u>anneau de cohomologie</u> de l'anneau à dérivation A. On notera que le produit d'un élément de $H^p(A)$ et d'un élément de $H^q(A)$ est dans $H^{p+q}(A)$: $H(A)$ est un anneau gradué.

Dans le cas où A est l'anneau des cochaînes d'un complexe simplicial, on voit que le groupe $H^*(K,\gamma)$ est muni d'une structure multiplicative : <u>anneau de cohomologie du complexe</u> K (relativement à l'anneau γ).

Soit L un sous-complexe de K. Le produit de deux cochaînes de K qui s'annulent sur les chaînes de L s'annule sur les chaînes de L : $C^*(K/L,\gamma)$ est donc un sous-anneau de $C^*(K,\gamma)$. On a donc un <u>anneau de cohomologie de</u> K <u>modulo</u> L, noté $H^*(K/L,\gamma)$. De plus, $C^*(K/L,\gamma)$ est un idéal bilatère de $C^*(K,\gamma)$; et l'anneau $C^*(L,\gamma)$ s'identifie à l'anneau quotient $C^*(K,\gamma)/C^*(K/L,\gamma)$. Ceci permet de préciser la nature des homomorphismes de la suite exacte relative aux 3 anneaux de cohomologie : les deux homom.

$$H^*(K/L) \to H^*(K) \quad \text{et} \quad H^*(K) \to H^*(L)$$

sont des <u>homomorphismes d'anneaux</u> (transforment les produits en produits) ; par contre, l'homom. $H^*(L) \to H^*(K/L)$, qui élève le degré d'une unité, ne transforme pas les produits en produits (dans la formule (2), le cobord d'un produit fg n'est pas égal au produit des cobords de f et de g).

Cette propriété des homom. de la suite exacte aura lieu chaque fois qu'on aura un anneau à dérivation A, un idéal bilatère I, et l'anneau quotient A/I.

<u>Remarques</u>.- 1°) Si K est <u>localement fini</u>, le sous-groupe $C^*_f(K,\gamma)$ des cochaînes <u>finies</u> est stable pour la multiplication ; c'est donc un anneau gradué à dérivation. Le groupe $H^*_f(K,\gamma)$ est donc muni d'une structure d'anneau : <u>anneau de cohomologie compacte</u> du complexe K. On observera que $C^*_f(K,\gamma)$ est même un idéal bilatère de $C^*(K,\gamma)$.

2°) Le produit de 2 cochaînes <u>alternées</u> n'est pas une cochaîne alternée. La multiplication des cochaînes n'induit donc pas de multiplication sur le sous-groupe des cochaînes alternées. On verra plus tard qu'on peut néanmoins définir, de plusieurs manières, une structure d'anneau sur l'ensemble des cochaînes alternées.

3°) Si la multiplication de l'anneau γ est <u>commutative</u>, la multiplication des cochaînes ne l'est pas, en général ; mais on peut alors montrer que si x et y sont 2 éléments de $H^p(K,\gamma)$ et $H^q(K,\gamma)$ respectivement, on a

$$yx = (-1)^{pq}\, xy \quad \text{dans l'anneau} \quad H^{p+q}(K,\gamma) \ .$$

4°) Au lieu de supposer donnée une loi multiplicative <u>interne</u> dans γ , on pourrait, plus généralement, considérer 3 groupes abéliens γ_1 , γ_2 , γ_3 , et une application bilinéaire de $\gamma_1 \times \gamma_2$ dans γ_3 . Alors la formule (1) définit une application bilinéaire de $C^p(K,\gamma_1) \times C^q(K,\gamma_2)$ dans $C^{p+q}(K,\gamma_3)$. On a une formule analogue à (2)', d'où l'on déduit une application bilinéaire de $H^p(K,\gamma_1) \times H^q(K,\gamma_2)$ dans $H^{p+q}(K,\gamma_3)$.