H. CARTAN

Complexes simpliciaux

Séminaire Henri Cartan, tome 1 (1948-1949), exp. n° 1, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1948-1949__1__A1_0>

COMPLEXES SIMPLICIAUX.

(Exposé fait par H. CARTAN, le 8.11.1948).

1.- Simplexes euclidiens.

On considère l'espace R^n muni de sa structure affine (sans origine). Pour des points P_i en nombre fini, on sait définir le point $\sum_i \lambda_i P_i$ (λ_i nombres réels de somme un) : barycentre. Le lieu de ces barycentres est la variété linéaire engendrée par les P_i. Notion de points "affinement indépendants" ; coordonnées barycentriques qu'ils définissent dans la variété qu'ils engendrent. La dimension de cette variété est p si le nombre des générateurs indépendants est $p+1$; la dimension est indépendante du système particulier de générateurs (indépendants). La notion de dimension a un caractère purement algébrique.

Dans R^n, un système de $p+1$ points P_i affinement indépendants définit un simplexe (euclidien) : l'ensemble des $\sum_i \lambda_i P_i$ à coefficients $\geqslant 0$ (de somme un). Les P_i sont les sommets du simplexe S ; la dimension de S est, par définition, p (= dimension de la variété linéaire engendrée par les sommets). En particulier : simplexe de dimension 0 (se réduit à un point, son unique sommet) ; simplexe de dimension 1 (segment de droite) ; etc...

Un simplexe euclidien est muni de la topologie de l'espace ambiant. Deux simplexes quelconques, de même dimension, sont homéomorphes. Plus précisément : on peut se donner arbitrairement la correspondance (biunivoque) entre les sommets, et la prolonger, d'une manière unique, en une correspondance linéaire affine (biunivoque) entre les simplexes. Dans cette correspondance, les coordonnées barycentriques sont conservées.

Un simplexe de dimension p est un espace topologique compact, puisque c'est un sous-espace fermé borné d'un R^n. Si un simplexe S de dimension p est dans R^p, sa frontière se compose de la réunion de ses "faces" : on appelle face opposée au sommet P_i l'ensemble des points de S dont la coordonnée barycentrique λ_i est nulle ; c'est un simplexe de dimension $p-1$, ayant pour sommets tous les sommets de S sauf P_i. Plus généralement, toute partie de l'ensemble des sommets de S définit un sous-simplexe de S : le simplexe ayant pour sommets les éléments de cette partie. Si cette partie est vide, on convient de dire qu'elle définit le sous-simplexe vide, et que sa dimension est -1.

Immersion d'un simplexe dans un cube : soit I l'intervalle $[0, 1]$ de la droite numérique R . Soit K un ensemble (fini) en correspondance biunivoque avec les sommets d'un simplexe S . Tout point de S définit un point de l'espace produit I^K , savoir le point $(\lambda_k)_{k \in K}$, où les λ_k sont les coordonnées barycentriques du point considéré, par rapport aux sommets de S . Le simplexe S est ainsi appliqué sur un sous-espace du "cube" I^K ; cette application est un homéomorphisme qui respecte la structure affine de S et celle du cube.

2.- Complexe simplicial abstrait.

C'est, par définition, un ensemble abstrait K (fini ou infini) muni de la structure définie par la donnée d'une famille Φ de parties finies de K , satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $s \in K$ entraîne $\{s\} \in \Phi$;

b) $S \in \Phi$ et $T \subset S$ entraînent $T \in \Phi$.

Les éléments de K prennent le nom de sommets, ceux de Φ le nom de simplexes. On appelle dimension d'un simplexe le nombre de ses éléments diminué d'une unité. D'après b), la partie vide est un simplexe de dimension -1 .

Un complexe K est localement fini s'il satisfait en outre à la condition :

c) tout sommet n'appartient qu'à un nombre fini de simplexes.

Une application f d'un complexe K dans un complexe K' est dite simpliciale si l'image de tout simplexe de K est un simplexe de K' . Dans le cas particulier où f est biunivoque (c'est-à-dire transforme des sommets distincts de K en sommets distincts de K'), f permet d'identifier K à une partie H' de K' ; H' est alors muni d'une structure de complexe simplicial par transport de la structure de K ; pour cette structure, tout simplexe de H' est aussi un simplexe de K' (mais il se peut qu'une partie de H' soit un simplexe de K' sans être un simplexe de H'). On dit que H' est un sous-complexe de K' .

En particulier, soit S un simplexe de K ; l'ensemble de toutes les parties de S définit sur S une structure de complexe simplicial et fait de S un sous-complexe de K . On l'appellera le complexe sous-jacent du simplexe S .

Transitivité : si f est une application simpliciale de K dans K' , et g une application simpliciale de K' dans K'' , la composée $g \circ f$ est une application simpliciale de K dans K'' .

3.- Complexe simplicial topologique.

Soit K un complexe simplicial. Considérons le cube I^K, produit d'intervalles $I = [0,1]$, avec K pour ensemble d'indices. Considérons le sous-ensemble $\widetilde{K}$ de I^K, formé des points $(\lambda_k)_{k\in K}$ tels que :

1°) l'ensemble des $k \in K$ tels que $\lambda_k \neq 0$ soit un simplexe de K ;

2°) $\sum_k \lambda_k = 1$. Pour tout simplexe S de K, soit $\widetilde{S}$ l'ensemble des points (λ_k) de $\widetilde{K}$ tels que $\lambda_k = 0$ pour $k \notin S$; alors $\widetilde{S}$ est un simplexe affine, donc est muni d'une topologie. Si $S = S' \cap S''$, on a $\widetilde{S} = \widetilde{S'} \cap \widetilde{S''}$. L'ensemble $\widetilde{K}$ est réunion des simplexes $\widetilde{S}$ associés aux simplexes S de K ; sur $\widetilde{K}$, considérons la topologie dans laquelle les fermés sont les sous-ensembles F tels que, pour tout simplexe $\widetilde{S}$, l'ensemble $F \cap \widetilde{S}$ soit fermé dans $\widetilde{S}$. Ainsi $\widetilde{K}$ est un espace topologique, et les λ_k sont des applications continues de $\widetilde{K}$ dans I. On dit que $\widetilde{K}$ est un complexe simplicial topologique, de schéma K, et que les $\widetilde{S}$ sont les simplexes de $\widetilde{K}$; les simplexes $\widetilde{S}$ de dimension zéro sont les "sommets" de $\widetilde{K}$.

Si K est fini, l'espace $\widetilde{K}$ est réunion d'un nombre fini de simplexes, donc est un espace compact. Si K est localement fini, l'espace $\widetilde{K}$ est localement compact, car chaque point possède un voisinage ouvert qui ne rencontre qu'un nombre fini de simplexes : en effet, soit U_k l'ensemble (évidemment ouvert) des points de $\widetilde{K}$ dont la coordonnée λ_k est > 0 ; U_k est contenu dans la réunion des simplexes $\widetilde{S}$ tels que le sommet k appartienne à S.

Toute application simpliciale f d'un complexe K dans un complexe K' définit une application continue $\widetilde{f}$ (appelée encore simpliciale) de l'espace $\widetilde{K}$ dans l'espace $\widetilde{K'}$: $\widetilde{f}$ est définie par la condition d'appliquer chaque sommet de $\widetilde{K}$ sur le sommet de $\widetilde{K'}$ que f lui associe, et d'être une application linéaire-affine dans chaque simplexe de $\widetilde{K}$.

On démontre que si K est un complexe dénombrable (ou fini) dont tous les simplexes sont de dimension $\leq n$, il existe une réalisation affine de $\widetilde{K}$ dans l'espace euclidien de dimension $2n+1$.

4.- Décomposition simpliciale d'un espace topologique.

Jusqu'ici, nous sommes partis d'un schéma abstrait, d'où nous avons déduit un espace topologique. Inversement, partons d'un espace topologique E (espace de Hausdorff, satisfaisant à l'"axiome de séparation"). On appellera décomposition simpliciale de E , de schéma K , la donnée d'un complexe simplicial abstrait K , localement fini, et d'une application t de l'ensemble des simplexes de K dans l'ensemble des parties de E , satisfaisant aux conditions suivantes.:

a) E est la réunion des parties $t(S)$ lorsque S parcourt l'ensemble des simplexes de K ;

b) $t(S' \cap S") = t(S') \cap t(S")$;

c) pour chaque S , il existe un homéomorphisme d'un simplexe euclidien σ , de même dimension que S , sur $t(S)$, qui applique les sous-simplexes de σ respectivement sur les $t(T)$ relatifs aux sous-simplexes T de S ;

d) chaque point de E possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de $t(S)$.

La condition d) implique que l'espace E est localement compact. La condition c) peut être remplacée par la condition équivalente :

c') pour chaque simplexe $\tilde{S}$ de l'espace $\tilde{K}$, il existe un homéomorphisme φ_S de $\tilde{S}$ sur $t(S)$, qui applique chaque sous-simplexe $\tilde{T}$ de $\tilde{S}$ sur $t(T)$.

Il est clair que l'espace $\tilde{K}$ est muni d'une décomposition simpliciale de schéma K . On va voir que, à une homéomorphie près, $\tilde{K}$ est le seul espace qui jouisse de cette propriété :

Théorème.- Tout espace topologique E muni d'une décomposition simpliciale de schéma K est homéomorphe à $\tilde{K}$.

Voici une idée de la démonstration. On va définir un homéomorphisme de $\tilde{K}$ sur E , qui applique chaque $\tilde{S}$ sur $t(S)$. Il suffit de définir, pour chaque S , un homéomorphisme f_S de $\tilde{S}$ sur $t(S)$, de manière que, pour $T \subset S$, f_S soit un prolongement de f_T (cela suffit, à cause de la condition d)). On cherchera à mettre f_S sous la forme du composé $\varphi_S \circ \psi_S$, où ψ_S est un automorphisme (à déterminer) du simplexe $\tilde{S}$. On doit avoir, sur chaque sous-simplexe $\tilde{T}$ de $\tilde{S}$,

$$\psi_S = \varphi_S^{-1} \circ \varphi_T \circ \psi_T \quad .$$

On réalisera ces conditions en définissant les ψ_S par récurrence sur la dimension de $\tilde{S}$.

5.- Subdivisions.

On appelle subdivision simpliciale d'un complexe (topologique) $\widetilde{K}$ la donnée d'un complexe topologique $\widetilde{K'}$ et d'un homéomorphisme f de $\widetilde{K'}$ sur $\widetilde{K}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

1°) l'image par f de tout simplexe de $\widetilde{K'}$ est contenue dans un simplexe de $\widetilde{K}$; et f est linéaire-affine dans chaque simplexe de $\widetilde{K'}$;

2°) l'intersection d'un simplexe de $\widetilde{K}$ et de l'image d'un simplexe de $\widetilde{K'}$ est l'image d'un simplexe de $\widetilde{K'}$.

Pour tout sous-complexe $\widetilde{H}$ de $\widetilde{K}$, soit $\widetilde{H'}$ le sous-complexe de $\widetilde{K'}$, image réciproque de $\widetilde{H}$. Alors $\widetilde{H'}$ et la restriction de f à $\widetilde{H'}$ définissent une subdivision de $\widetilde{H}$ (subdivision induite). En particulier, on a une subdivision de tout simplexe $\widetilde{S}$ de $\widetilde{K}$, muni de la structure de complexe sous-jacent, et, plus particulièrement, $\widetilde{S}$ est réunion des images des simplexes de $\widetilde{K'}$ qui sont contenues dans $\widetilde{S}$.

Définition de la subdivision barycentrique (ou "normale") d'un complexe simplicial localement fini.

K étant donné, nous allons définir successivement le complexe simplicial abstrait K', puis l'homéomorphisme f de $\widetilde{K'}$ sur $\widetilde{K}$:

- les éléments de K' ("sommets" de K') sont les simplexes non vides de K ;
- les "simplexes" de K' sont les ensembles de simplexes non vides de K (tous distincts) qui sont totalement ordonnés par la relation d'inclusion.

On vérifie que K' satisfait aux axiomes a) et b) d'un complexe simplicial, parce que K est localement fini ; en outre, K' est localement fini.

Pour définir f, il suffit de définir f pour les sommets de $\widetilde{K'}$, de vérifier que les sommets d'un même simplexe de $\widetilde{K'}$ sont appliqués dans un même simplexe de $\widetilde{K}$ et sont affinement indépendants, puis de prolonger f par linéarité. Soit donc k' un sommet de $\widetilde{K'}$, c'est-à-dire un simplexe $\widetilde{S}$ de $\widetilde{K}$; $f(k')$ sera, par définition, le centre de gravité du simplexe $\widetilde{S}$ de $\widetilde{K}$. Si maintenant S' est un simplexe de K', c'est-à-dire une suite finie

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_{q+1} \tag{1}$$

de simplexes distincts de K, il est clair que les centres de gravité des simplexes $\widetilde{S}_1, \dots, \widetilde{S_{q+1}}$ sont tous dans $\widetilde{S_{q+1}}$ et sont affinement indépendants.

Avant de vérifier que la condition 2° des subdivisions est remplie, explicitons l'image, par f, du simplexe de $\widetilde{K'}$ défini par la suite (1). C'est l'ensemble des points (λ_k) jouissant des propriétés suivantes :

$\lambda_k \geqslant \lambda_h$ chaque fois que le premier simplexe de la suite (1) contenant k est contenu dans le premier simplexe de la suite contenant h ;

$\lambda_k = \lambda_h$ chaque fois que le premier simplexe contdnant k est le même que le premier simplexe contenant h.

De là on déduit facilement que la condition 2° est remplie.

En particulier, cherchons les simplexes de $\widetilde{K'}$ dont l'image est contenue dans un simplexe $\widetilde{S}$ de dimension p, et qui sont eux-mêmes de dimension p. La suite (1) a alors pour dernier terme le simplexe S, et est caractérisée par la donnée d'une permutation des $p+1$ sommets de S. Numérotons $1, 2, \ldots, p+1$ ces sommets ; les points de S qui appartiennent à l'image du simplexe considéré de $\widetilde{K'}$ sont ceux pour lesquels

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{p+1} .$$

Si on appelle $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{p+1}$ les coordonnées du point correspondant de $\widetilde{K'}$, on passe des λ_i aux λ'_i, et vice-versa, par les formules suivantes :

$$\lambda'_1 = \lambda_1 - \lambda_2 \ , \ \lambda'_2 = 2(\lambda_2 - \lambda_1) \ , \ \ldots \ , \ \lambda'_p = p(\lambda_p - \lambda_{p+1}) \ , \ \lambda'_{p+1} = (p+1)\lambda_{p+1}$$

$$\lambda_{p+1} = \frac{\lambda'_{p+1}}{p+1} \ , \ \lambda_p = \frac{\lambda'_{p+1}}{p+1} + \frac{\lambda'_p}{p} \ , \ \ldots \ , \ \lambda_2 = \frac{\lambda'_{p+1}}{p+1} + \ldots + \frac{\lambda'_2}{2} \ ,$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda'_{p+1}}{p+1} + \ldots + \lambda'_1 .$$