J. P. Serre
H. Cartan

Produits tensoriels

Séminaire Henri Cartan, tome 1 (1948-1949), exp. n° 11, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1948-1949__1__A11_0>

PRODUITS TENSORIELS.

(Exposés de J.P. SERRE et H. CARTAN,
les 28.2 et 15.3.1949).

La première partie (1er exposé)se rapporte à la théorie générale des produits tensoriels de A-modules (voir détails dans BOURBAKI, Alg., Ch. III, paragraphe 1) ; la deuxième partie (2e exposé), à la théorie plus particulière des A-modules gradués à dérivation.

1.- Définition du produit tensoriel.

A désigne un anneau commutatif donné une fois pour toutes, ayant un élément unité. Lorsque A est l'anneau des entiers, la notion de A-module se confond avec celle de groupe abélien.

Le produit tensoriel $F \otimes G$ de deux A-modules F et G est un A-module, muni d'une application bilinéaire $(x,y) \rightarrow x \otimes y$ de $F \times G$ dans $F \otimes G$, telle que

1) l'image de $F \times G$ par cette application engendre $F \otimes G$ (comme A-module) ;

2) pour toute application A-bilinéaire f de $F \times G$ dans un A-module quelconque K, il existe une application A-linéaire g (et une seule) de $F \otimes G$ dans K, telle que $f(x,y) = g(x \otimes y)$ identiquement.

Ce produit tensoriel $F \otimes G$ existe et est unique à une isomorphie près. Tout élément de $F \otimes G$ s'écrit (de plusieurs manières) comme somme finie $\sum x_i \otimes y_i$; la bilinéarité s'exprime par

$$(x+x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y \quad , \quad (\alpha x) \otimes y = \alpha(x \otimes y) \quad \text{pour} \quad \alpha \in A ,$$

et deux autres relations analogues.

L'existence du produit tensoriel peut être prouvée ainsi : soit L le module des combinaisons linéaires formelles (finies à coefficients dans A) des éléments (x,y) de l'ensemble produit $F \times G$; soit R le sous-module engendré par les éléments de la forme

$$\text{(I)} \qquad \begin{array}{ll} (x+x',y) - (x,y) - (x',y) , & (\alpha x,y) - \alpha(x,y) \\ (x,y+y') - (x,y) - (x,y') , & (x,\alpha y) - \alpha(x,y) \end{array}$$

Le module quotient L/R, muni de l'application $(x,y) \rightarrow$ classe de (x,y) dans L/R, répond à la question. De là on déduit

<u>Proposition 1</u>.- Si une somme $\sum x_i \otimes y_i$ est nulle $(x_i \in F, y_i \in G)$, il existe deux sous-modules F_1 et G_1, à un nombre fini de générateurs, contenant respectivement les x_i et les y_i, et tels que la somme $\sum x_i \otimes y_i$ soit <u>nulle dans</u> $F_1 \otimes G_1$. (Car si $\sum (x_i, y_i) \in R$, $\sum (x_i, y_i)$ est combinaison linéaire d'un nombre <u>fini</u> d'éléments du type (I)).

2.- Premières propriétés du produit tensoriel.

<u>Isomorphisme canonique de</u> $A \otimes F$ <u>sur</u> F : il est défini par $\varphi(\alpha \otimes x) = \alpha x$; l'isomorphisme réciproque Ψ est défini par $\Psi(x) = 1 \otimes x$.

On a de même un isomorphisme canonique de $F \otimes A$ sur F. Cas particulier : isomorphisme de $A \otimes A$ sur A.

<u>Commutativité</u> : isomorphisme canonique φ de $F \otimes G$ sur $G \otimes F$, défini par

$$\varphi(x \otimes y) = y \otimes x \quad .$$

<u>Associativité</u> : isomorphisme canonique φ de $(F \otimes G) \otimes K$ sur $F \otimes (G \otimes K)$ défini par

$$\varphi((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z) \quad .$$

3.- Produit tensoriel d'homomorphismes (i.e: applications A-linéaires).

Soient $F \xrightarrow[f]{} F'$, $G \xrightarrow[g]{} G'$ deux homomorphismes ; l'homomorphisme $f \otimes g$ est, par définition, l'homomorphisme h de $F \otimes G$ dans $F' \otimes G'$ défini par

$$h(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y) \quad .$$

On a $$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \otimes g = \alpha_1.(f_1 \otimes g) + \alpha_2.(f_2 \otimes g) \quad .$$

De plus, transitivité : si $F \xrightarrow[f]{} F' \xrightarrow[f']{} F''$, et $G \xrightarrow[g]{} G' \xrightarrow[g']{} G''$, alors l'homomorphisme $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$ de $F \otimes G$ dans $F'' \otimes G''$ est identique au composé $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$. Conséquence : si f et g sont des <u>projecteurs</u> de F et G respectivement, $f \otimes g$ est un <u>projecteur</u> de $F \otimes G$.

Si f et g sont des homomorphismes <u>sur</u>, $f \otimes g$ est un homomorphisme <u>sur</u>, (voir théorème 1 ci-dessous). Par contre, si f et g sont biunivoques, $f \otimes g$ n'est pas nécessairement biunivoque (à ce sujet, voir théorèmes 2 et 4 ci-dessous).

Soient F' un <u>sous-module</u> de F ; φ l'homomorphisme canonique de F' dans F, Ψ l'homomorphisme canonique de F sur le module quotient F/F' ; g l'automorphisme identique d'un module G. Alors les homomorphismes

$$\varphi \otimes g : F' \otimes G \to F \otimes G$$

$$\varphi \otimes g : F \otimes G \to (F/F') \otimes G$$

prennent le nom de <u>canoniques</u>.

On remarquera l'analogie avec les homomorphismes canoniques définis dans l'exposé 4 (paragraphe 1) :

$$\mathrm{Hom}(F',G) \leftarrow \mathrm{Hom}(F,G) \leftarrow \mathrm{Hom}(F/F',G) .$$

On avait alors prouvé que la suite

$$\mathrm{Hom}(F',G) \leftarrow \mathrm{Hom}(F,G) \leftarrow \mathrm{Hom}(F/F',G) \leftarrow 0$$

est exacte. Il y a ici une proposition analogue :

<u>Théorème 1</u>.- La suite d'homomorphismes canoniques

$$F' \otimes G \to F \otimes G \to (F/F') \otimes G \to 0$$

une <u>suite exacte</u>.

Cet énoncé affirme deux choses : 1) l'application $F \otimes G \to (F/F') \otimes G$ est <u>sur</u> : ceci résulte du fait que $F \to F/F'$ et l'automorphisme identique de G sont des homomorphismes <u>sur</u>. 2) le noyau de $F \otimes G \to (F/F') \otimes G$ est identique à l'image canonique, dans $F \otimes G$, de $F' \otimes G$. Ceci va résulter, plus généralement, de la

<u>Proposition 2</u>.- Si F' est un sous-module de F, et G' un sous-module de G, le noyau de l'homomorphisme canonique $F \otimes G \to (F/F') \otimes (G/G')$ est engendré par les images canoniques de $F' \otimes G$ et $F \otimes G'$.

Soit en effet φ cet homomorphisme canonique, et K le sous-module de $F \otimes G$ engendré par les images canoniques de $F' \otimes G$ et $F \otimes G'$. On définit un homomorphisme ψ de $(F/F') \otimes (G/G')$ dans $(F \otimes G)/K$ de la manière suivante : si $\hat{x} \in F/F'$ et $\hat{y} \in G/G'$, on choisit un élément $x \in F$ dont l'image canonique soit $\hat{x}$, un élément $y \in G$ dont l'image canonique soit $\hat{y}$, puis on prend, dans $(F \otimes G)/K$, l'image de $x \otimes y \in F \otimes G$; cet élément ne dépend pas du choix de x et de y, et définit l'homomorphisme ψ cherché. En composant φ et ψ, on constate que $\psi \circ \varphi$ est l'homomorphisme canonique de $F \otimes G$ sur son quotient $(F \otimes G)/K$. Donc tout élément du noyau de φ est dans K. La réciproque est évidente.

<u>Application</u> : Soit Z le groupe additif des entiers, Z_n le groupe Z/nZ des entiers modulo n. Pour tout groupe abélien G, on a un isomorphisme canonique du produit tensoriel (au sens des groupes abéliens) $Z_n \otimes G$ sur le groupe quotient G/nG. - On a un isomorphisme du produit tensoriel $Z_p \otimes Z_q$ sur

le quotient de Z par le sous-groupe $pZ+qZ$, qui n'est autre que nZ, où n est le p.g.c.d. de p et q ; ainsi $Z_p \otimes Z_q$ est canoniquement isomorphe à Z_n.

4.- Accouplement.

Soient F un A-module, F' un sous-module de F ; G_1 et G_2 deux A-modules ; supposons donné un accouplement $G_1 \times G_2 \to \Gamma$ (Γ étant un A-module), ou ce qui revient au même, un homomorphisme de $G_1 \otimes G_2$ dans Γ. Alors on a le diagramme de compatibilités

$$\begin{tikzcd}
F' \otimes G_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & F \otimes G_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & (F/F') \otimes G_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathrm{Hom}(F',G_2) \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{Hom}(F,G_2) \arrow[l] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{Hom}(F/F',G_2) \arrow[l] \arrow[d, Rightarrow] & 0 \arrow[l] \\
\Gamma \arrow[r, leftrightarrow] & \Gamma \arrow[r, leftrightarrow] & \Gamma &
\end{tikzcd}$$

(les deux premières lignes horizontales donnent lieu à des suites exactes).

5.- Produit tensoriel de sommes directes.

Théorème 2.- Pour que l'homomorphisme canonique $F' \otimes G \to F \otimes G$ (où F' désigne un sous-module de F) soit biunivoque, il suffit que F' soit facteur direct de F.

En effet, soient f l'application canonique de F' dans F, p un projecteur de F sur F' ; alors $p \circ f$ est l'automorphisme identique de F'. En faisant le produit tensoriel de f, p avec l'automorphisme identique de G, on obtient des automorphismes $F' \otimes G \to F \otimes G \to F' \otimes G$, dont le composé est l'automorphisme identique de $F' \otimes G$. Donc $F' \otimes G \to F \otimes G$ est biunivoque (et de plus $F \otimes G \to F' \otimes G$ est un projecteur). Dans ce cas, on identifie toujours $F' \otimes G$ à un sous-module de $F \otimes G$.

Remarque : la condition du théorème 2 est toujours remplie dans le cas des espaces vectoriels sur un corps commutatif.

Supposons maintenant que F soit somme directe de sous-modules F_i (en nombre fini ou infini). D'après le théorème 2, les $F_i \otimes G$ s'identifient à des sous-modules de $F \otimes G$. Je dis que $F \otimes G$ est somme directe des $F_i \otimes G$. En effet :

1) $F \otimes G$ est somme des $F_i \otimes G$, car tout élément de $F \otimes G$ est somme finie d'éléments de la forme $x \otimes y$, où x est une somme finie $\sum x_i$ $(x_i \in F_i)$

2) les projecteurs p_i de F sur les F_i définissent des projecteurs p_i' de $F \otimes G$ sur les $F_i \otimes G$, et puisque $p_i p_j = 0$ pour $i \neq j$, on a $p_i' p_j' = 0$,

ce qui signifie que la somme des $F_i \otimes G$ est directe.

Application : si F est un module libre de base (f_i), tout élément de $F \otimes G$ s'écrit d'une seule manière comme somme finie $\sum f_i \otimes g_i$ (où $g_i \in G$); le module $F \otimes G$ est isomorphe au module des combinaisons linéaires formelles (finies) d'éléments (f_i) à coefficients dans G.

En supposant que G soit aussi décomposé en somme directe, on obtient :

Théorème 3.- Si F est somme directe de sous-modules F_i et G somme directe de sous-modules G_j, les $F_i \otimes G_j$ s'identifient à des sous-modules de $F \otimes G$, qui en est la somme directe.

Application : si F est un module libre de base (f_i), G un module libre de base (g_j), les $f_i \otimes g_j$ forment une base de $F \otimes G$, qui est donc libre.

Produit tensoriel de modules gradués : si F et G sont gradués (F étant somme directe de sous-modules F_p et G somme directe de sous-modules G_q), $F \otimes G$ est somme directe des sous-modules $F_p \otimes G_q$, donc est bigradué. On obtient une graduation sur $F \otimes G = K$ en définissant le sous-module K_n des éléments homogènes de degré n comme étant $\sum_{p+q=n} F_p \otimes G_q$; $p+q$ s'appelle le degré total d'un élément de $F_p \otimes G_q$.

6.- Cas particulier des groupes abéliens.

Outre le théorème 2 ci-dessus, on a d'autres conditions suffisantes pour que $F' \otimes G \to F \otimes G$ soit biunivoque (F' sous-module de F).

Théorème 4.- Si l'un des groupes G et F/F' est sans torsion, l'homomorphisme $F' \otimes G \to F \otimes G$ est biunivoque.

Démonstration : 1er cas : supposons d'abord que F et G aient un nombre fini de générateurs. Si F/F' est sans torsion, F/F' est libre, donc F' est facteur direct de F, et on applique le théorème 2. Si G est sans torsion, G est libre ; si (g_i) est une base de G, un élément de $F' \otimes G$ s'écrit d'une seule manière $\sum f_i \otimes g_i$, où $f_i \in F'$; l'image canonique de cet élément dans $F \otimes G$ ne peut être nulle que si les f_i sont nuls. C.Q.F.D.

2e cas : cas général. Soient f'_i des éléments de F' en nombre fini, et g_i des éléments de G (même ensemble d'indices). On veut montrer que si $\sum f'_i \otimes g_i = 0$ dans $F \otimes G$, alors $\sum f'_i \otimes g_i = 0$ dans $F' \otimes G$. Or si $\sum f'_i \otimes g_i = 0$ dans $F \otimes G$, il existe (proposition 1) des sous-modules F_1 et G_1 à un nombre fini de générateurs, contenant les f'_i et les

g_i respectivement, tels que $\sum f'_i \otimes g_i = 0$ dans $F_1 \otimes G_1$. D'après ce qu'on vient de démontrer dans le premier cas, l'homomorphisme $(F' \cap F_1) \otimes G_1 \longrightarrow$ $\rightarrow F_1 \otimes G_1$ est biunivoque ; donc $\sum f'_i \otimes g_i = 0$ dans $(F' \cap F_1) \otimes G_1$, et a fortiori dans $F' \otimes G$. C.Q.F.D.

7.- Produit tensoriel de modules gradués à dérivation.

Soit G un module gradué à dérivation (par exemple, un groupe gradué à dérivation), et g un module quelconque (par exemple, un groupe abélien quelconque). Les projecteurs p_n de la graduation de G définissent des projecteurs dans $G \otimes g$, qui devient un module gradué. On supposera que G est somme directe des $G_n = p_n(G)$; alors $G \otimes g$ est somme directe des $G_n \otimes g$.

$G \otimes g$ étant ainsi gradué, on considère l'endomorphisme $d \otimes 1$ de $G \otimes g$, où d désigne l'opérateur de dérivation de G, et 1 l'automorphisme identique de g. Cet endomorphisme, que nous désignerons encore par d, définit, avec la graduation, une structure de module gradué à dérivation sur $G \otimes g$; on a

$$d(x \otimes \alpha) = (dx) \otimes \alpha \quad (x \in G, \alpha \in g) .$$

Exemple : G est le groupe des chaînes (à coefficients entiers) d'un complexe simplicial, ou des chaînes singulières d'un espace topologique. Dans les deux cas, G est un groupe libre, et $G \otimes g$ s'identifie au groupe des combinaisons linéaires formelles de simplexes à coefficients dans le groupe g (chaînes "à coefficients dans g"). C'est un groupe à dérivation.

Dans le cas général, on a un module dérivé $H(G \otimes g)$, qui est gradué. Par exemple : le groupe d'homologie (simpliciale ou singulière) à coefficients dans un groupe g. Problème : étudier les relations entre $H(G \otimes g)$, $H(G)$ et g. On reviendra tout à l'heure sur ce problème, au moins dans le cas des groupes abéliens, et dans celui des espaces vectoriels sur un corps.

Soient maintenant G et G' deux groupes (ou, plus généralement modules) gradués à dérivation (N.B. : désormais, pour fixer les idées, on parlera de groupes, sauf mention du contraire). Soient d et d' leurs opérateurs de dérivation, supposés du même degré r $(r = \pm 1)$. $G \otimes G'$ est bigradué, et aussi gradué (ci-dessus, fin du paragraphe 5). Dans $G \otimes G'$, on a deux opérateurs $d \otimes 1$ et $1 \otimes d'$, que, par abus de langage, nous noterons d et d'. Vis-à-vis de la graduation de $G \otimes G'$, ils sont de degré r ; et comme $dd = 0$, $d'd' = 0$, on a deux structures de groupe gradué à dérivation sur $G \otimes G'$.

Mais c'est à une troisième structure que nous nous intèresserons. Nous appellerons d et d' des opérateurs de dérivation "partielle" sur $G \otimes G'$. Avant de définir une "dérivation totale", observons que $d+d'$ n'est pas de carré nul, puisque $dd' = d'd$. Mais définissons, sur $G \otimes G'$, l'opérateur $\bar{d}'$ par

$$\bar{d}'(x \otimes y) = \bar{x} \otimes (d'y) \quad (\text{où } \bar{x} = (-1)^p x \text{ si } x \text{ de degré } p);$$

on a $d\bar{d}'+\bar{d}'d = 0$, donc $(d+\bar{d}')(d+\bar{d}') = 0$. L'opérateur $d+\bar{d}' = D$ est un opérateur de dérivation, de degré r. Sauf mention du contraire, quand on parlera de $G \otimes G'$ comme groupe gradué à dérivation, on le supposera muni de D.

Quand tous les éléments de G' sont de degré 0, on retrouve la définition donnée d'abord de $G \otimes g$.

<u>Exemple</u> : étant donnés deux complexes simpliciaux, les "cellules" du complexe-produit forment la base d'un groupe de "chaînes", isomorphe au produit tensoriel des groupes de chaînes des deux complexes ; et D est l'opérateur "bord" de ce groupe de chaînes.

Dans tous les cas, le nouveau groupe à dérivation $G \otimes G'$ a un groupe dérivé $H(G \otimes G')$. On s'occupera plus loin des relations entre $H(G)$, $H(G')$ et $H(G \otimes G')$.

8.- <u>Quelques propriétés du produit tensoriel de deux groupes gradués à dérivation</u>.

<u>Isomorphisme canonique de</u> $G \otimes G'$ <u>sur</u> $G' \otimes G$: ce n'est pas tout à fait celui défini ci-dessus (paragraphe 2), à cause de la <u>structure graduée</u>. L'isomorphisme canonique est ici défini par

$$x \otimes y \to (-1)^{pq}\, y \otimes x \quad \text{pour } x \text{ de degré } p \text{ et } y \text{ de degré } q.$$

Si tous les éléments sont de degré 0, on retrouve l'ancienne définition. On vérifie que c'est un isomorphisme <u>permis</u>, vis-à-vis de l'opérateur de dérivation "totale". On en déduit donc un isomorphisme $H(G \otimes G') \to H(G' \otimes G)$.

<u>Associativité</u> : rien à changer à ce qui a été dit à la fin du paragraphe 2 ; on obtient un isomorphisme <u>permis</u> de $G \otimes (G' \otimes G'')$ sur $(G \otimes G') \otimes G''$; d'où un isomorphisme (canonique) de leurs groupes dérivés.

<u>Produit tensoriel d'homomorphismes permis</u> : soient deux homomorphismes permis

$G \xrightarrow[\varphi]{} F$ et $G' \xrightarrow[\psi]{} F'$; le produit tensoriel Φ de φ et ψ est un homomorphisme <u>permis</u> de $G \otimes G'$ dans $F \otimes F'$ (1° il conserve le degré total ; 2° $D\Phi = \Phi D$, la vérification étant aisée). D'où un homomorphisme

$$H(G \otimes G') \to H(F \otimes F').$$

<u>Opérateur d'homotopie</u> : <u>Proposition 3</u>.- Si h est un opérateur d'homotopie dans G, alors $h \otimes 1$ (où 1 désigne l'automorphisme identique de G') est un opérateur d'homotopie dans $G \otimes G'$.

Plus précisément, supposons h associé à un endomorphisme k, de degré $-r$

$$x-h(x) = dk(x) + kd(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in G \quad ;$$

alors $h \otimes 1$ est associé à $k \otimes 1$ (qui est bien de degré $-r$), car

$$D(k(x) \otimes y) + (k \otimes 1) . D(x \otimes y) = dk(x) \otimes y + \overline{k(x)} \otimes (d'y) + kd(x) \otimes y + k(\bar{x}) \otimes \otimes (d'y)$$

et puisque $\overline{k(x)} + \bar{k}(x) = 0$, le second membre se réduit à

$$dk(x) \otimes y + kd(x) \otimes y = x \otimes y - h(x) \otimes y \quad .$$

C.Q.F.D.

9.- <u>Application canonique</u> $H(G) \otimes H(G') \to H(G \otimes G')$.

Ceci vaut aussi bien pour des A-modules que pour des groupes abéliens. Partons de l'application bilinéaire canonique de $G \otimes G'$ dans $G \otimes G'$. La formule qui donne $D(x \otimes y) = (dx) \otimes y + \bar{x} \otimes (d'y)$ montre que si x et y sont des cycles (i.e: $dx = 0$ et $d'y = 0$), $x \otimes y$ est un cycle de $G \otimes G'$; de plus, si x est un "bord" $(x = dz)$, et y un cycle, $x \otimes y$ est un "bord" (égal à $D(z \otimes y)$) ; de même, si x est un cycle et y un bord, $x \otimes y$ est un bord. Par passage au quotient, l'application $(x,y) \to x \otimes y$ définit donc une application bilinéaire (dite canonique) de $H(G) \otimes H(G')$ dans $H(G \otimes G')$, à laquelle est canoniquement associée une application <u>linéaire</u> :

$$H(G) \otimes H(G') \longrightarrow H(G \otimes G') .$$

Si G est une <u>algèbre</u> à dérivation, la multiplication de G définit une application bilinéaire de $G \times G$ dans G, donc une application linéaire de $G \otimes G$ dans G ; et la formule donnant le d d'un produit (exposé 4, paragraphe 8, formule (2)) montre que $G \otimes G \to G$ est un homomorphisme <u>permis</u>. D'après ce qu'on vient de voir, on en déduit une application $H(G) \otimes H(G) \to \to H(G)$, c'est-à-dire une <u>multiplication</u> dans $H(G)$. Ce n'est pas autre chose que la multiplication dans l'<u>algèbre</u> dérivée $H(G)$, telle qu'elle a été définie (exposé 4, paragraphe 8).

10.- <u>Etude de</u> $H(G \otimes G')$

Nous supposons désormais que nous sommes dans l'un des cas suivants :

- cas (a) : G et G' sont des <u>groupes</u> (abéliens) gradués à dérivation, et G est sans torsion ;

- cas (b) : G et G' sont des <u>espaces vectoriels</u> (sur un même corps), gradués à dérivation.

<u>Théorème 5</u>.- Dans ces hypothèses, l'homomorphisme canonique

$$H(G) \otimes H(G') \to H(G \otimes G')$$

défini au paragraphe 9, est <u>biunivoque</u> (ce qui permet d'identifier $H(G) \otimes H(G')$ à un sous-groupe (resp. sous-espace vectoriel) de $H(G \otimes G')$. De plus, le quotient $H(G \otimes G')/H(G) \otimes H(G')$ est canoniquement isomorphe au noyau de l'application canonique

$$B(G) \otimes H(G') \to Z(G) \otimes H(G') \quad ,$$

où $Z(G)$ désigne (comme d'habitude) le groupe (resp. espace vectoriel) des "cycles", et $B(G)$ le sous-groupe des "bords".

On peut montrer que ce noyau ne dépend que de $H(G)$ et $H(G')$, et même ne dépend que des <u>sous-groupes de torsion</u> de $H(G)$ et $H(G')$.

<u>Corollaire</u> : dans le cas d'<u>espaces vectoriels</u>, le noyau est évidemment nul; d'où un <u>isomorphisme canonique</u> de $H(G) \otimes H(G')$ <u>sur</u> $H(G \otimes G')$.- Dans le cas (a), nous tirerons plus des conséquences particulières du théorème.

<u>Démonstration du théorème 5</u>.-

<u>Lemme</u> : si l'opérateur d de G est nul, et si l'on est dans l'un des cas (a) ou (b), alors $Z(G \otimes G')$ s'identifie à $G \otimes Z(G')$, $H(G \otimes G')$ s'identifie à $G \otimes H(G')$.

Tout d'abord l'homomorphisme canonique $G \otimes Z(G') \to G \otimes G'$ est biunivoque puisque G est sans torsion (théorème 4) ou qu'il s'agit d'espaces vectoriels (théorème 2). Ainsi $G \otimes Z(G')$ est identifié à un sous-groupe de $G \otimes G'$. Montrons que c'est exactement le sous-groupe $Z(G \otimes G')$. Or ce dernier est le <u>noyau</u> de l'homomorphisme $\overline{d'}$ de $G \otimes G'$ dans $G \otimes G'$, qui est composé de l'homomorphisme $G \otimes G' \to G \otimes B(G')$ (défini par $\overline{d'}$) et de l'homomorphisme canonique $G \otimes B(G') \to G \otimes G'$. Mais ce dernier est <u>biunivoque</u> à cause de l'hypothèse faite sur G ; donc $Z(G \otimes G')$ est le noyau de l'homomorphisme de $G \otimes G'$ <u>sur</u> $G \otimes B(G')$, noyau qui, d'après le théorème 1 (ou la proposition 2) est l'image, dans $G \otimes G'$, du produit tensoriel de G par le noyau de l'homomorphisme $G' \to B(G')$, c'est-à-dire précisément $G \otimes Z(G')$.

Ainsi $Z(G \otimes G') = G \otimes Z(G')$. Il est évident que $B(G \otimes G') = G \otimes B(G')$; le quotient $H(G \otimes G') = Z(G \otimes G')/B(G \otimes G')$ s'identifie alors à $G \otimes (Z(G')/B(G'))$ d'après le théorème 1, c'est-à-dire à $G \otimes H(G')$. Ce qui établit le lemme.

Passons à la démonstration dans le cas général où d n'est plus supposé nul. L'application canonique $Z(G) \otimes G' \to G \otimes G'$ est biunivoque, car le quotient $G/Z(G) \approx B(G)$ est sans torsion dans le cas (a) (on applique le théorème 4). $Z(G) \otimes G'$ sera désormais identifié à un sous-groupe (resp. sous-espace vectoriel) de $G \otimes G'$; et c'est un sous-groupe <u>stable</u> pour l'opérateur de dérivation totale D, qui du reste se réduit à $\overline{d'}$ sur $Z(G) \otimes G'$. L'homomorphisme d identifie le quotient $(G/Z(G)) \otimes G'$ à $B(G) \otimes G'$. On a une <u>suite exacte</u> d'homomorphismes pour les groupes dérivés (cf. exposé 2, paragraphe 7)

$$\begin{tikzcd} H(Z(G) \otimes G') \arrow[rr, "\varphi"] & & H(G \otimes G') \arrow[dl, "\psi"] \\ & H(B(G) \otimes G') \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

où φ est de degré 0, ψ de degré r (à cause de l'identification qui a été faite de $(G/Z(G)) \otimes G'$ à $B(G) \otimes G'$), et δ de degré 0 (même raison).

Je dis : δ est l'homomorphisme qui provient, par passage aux quotients, de l'homomorphisme canonique $B(G) \otimes G' \to Z(G) \otimes G'$ ($B(G)$ étant considéré comme sous-groupe de $Z(G)$).

Pour le montrer, remontons à la définition de δ (exposé 2, paragraphe 7) : on veut définir $\delta(\dot{\alpha})$, $\dot{\alpha}$ étant un élément de $H(B(G) \otimes G')$. Pour cela, on prend un $\alpha \in Z(B(G) \otimes G')$ tel que $\dot{\alpha}$ soit la classe de α ; ici, en vertu du lemme, α est dans $B(G) \otimes Z(G')$. Puis on choisit un $\beta \in G \otimes G'$ qui donne naissance à α par l'application d de $G \otimes G'$ dans $B(G) \otimes G'$; ici, on pourra prendre β dans $G \otimes Z(G')$. Alors, on doit prendre $D\beta$, qui sera un "cycle" de $Z(G) \otimes G'$, cycle dont la classe d'homologie est l'élément de $H(Z(G) \otimes G')$ qu'on veut définir, à savoir $\delta(\dot{\alpha})$. Ici, $D\beta$ est égal à $d\beta$, donc à α, qu'on considère non plus comme élément de $B(G) \otimes G'$, mais comme élément de $Z(G) \otimes G'$. Et ceci établit ce qui avait été affirmé.

Appliquons à nouveau le lemme : $H(Z(G) \otimes G')$ et $H(B(G) \otimes G')$ s'identifient respectivement à $Z(G) \otimes H(G')$ et $B(G) \otimes H(G')$, de sorte que la suite exacte devient

$$\begin{tikzcd} Z(G) \otimes H(G') \arrow[rr, "\varphi"] & & H(G \otimes G') \arrow[dl, "\psi"] \\ & B(G) \otimes H(G') \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

Cette fois, δ est devenu l'homomorphisme canonique ($B(G)$ étant sous-groupe de $Z(G)$). Puisque la suite est exacte, l'image de φ identifie un sous-groupe de $H(G \otimes G')$ au quotient de $Z(G) \otimes H(G')$ par l'image de $B(G) \otimes H(G')$, quotient qui s'identifie lui-même (théorème 1) à $H(G) \otimes H(G')$. De plus, l'application biunivoque de $H(G) \otimes H(G')$ dans $H(G \otimes G')$ qu'on obtient ainsi est la même que celle définie au paragraphe 9. Quant au quotient de $H(G \otimes G')$ par l'image de φ (identifiée, on vient de le voir, à $H(G) \otimes H(G')$), la suite exacte l'identifie au noyau de $B(G) \otimes H(G') \to Z(G) \otimes H(G')$. Et ceci achève la démonstration.

11.- Conséquences du théorème 5.

On peut d'abord préciser ce qui concerne les degrés, en tenant compte des degrés des homomorphismes de la suite exacte. On voit que :

$$\sum_{p+q=n} H_p(G) \otimes H_q(G') \quad \text{s'identifie à un sous-groupe de} \quad H_n(G \otimes G')$$

(dans le cas des espaces vectoriels, $\sum_{p+q=n} H_p(G) \otimes H_q(G')$ s'identifie à $H_n(G \otimes G')$ tout entier) ;

le quotient est isomorphe (canoniquement) à la somme directe des noyaux des homomorphismes

$$B_p(G) \otimes H_q(G') \to Z_p(G) \otimes H_q(G')$$

pour tous les couples (p,q) tels que $p+q=n+r$, $(r = \pm 1)$.

Si (G étant un groupe sans torsion) $H(G)$ ou $H(G')$ est sans torsion, alors l'homomorphisme canonique $H(G) \otimes H(G') \to H(G \otimes G')$ est un isomorphisme sur. (En effet, le noyau de $B(G) \otimes H(G') \to Z(G) \otimes H(G')$ est nul, d'après le théorème 4).

Si (G étant sans torsion) l'un des groupes $H(G)$ et $H(G')$ est "trivial" (c'est-à-dire, s'il s'agit par exemple de $H(G)$: si $H_p(G) = 0$ pour tout $p \neq 0$, et $H_o(G)$ isomorphe au groupe additif des entiers), alors on a un isomorphisme canonique de $H_n(G \otimes G')$ sur $H_n(G')$ (resp. sur $H_n(G)$).

Si (G étant sans torsion) l'un au moins des groupes $H(G)$ et $H(G')$ est est nul, alors $H(G \otimes G')$ est nul.

Complément au théorème 5.- Supposons que G et G' soient deux groupes libres ; alors $H(G) \otimes H(G')$ est facteur direct de $H(G \otimes G')$ (et par suite le groupe $H(G \otimes G')$ est bien déterminé, à une isomorphie près, par la connaissance des groupes $H(G)$ et $H(G')$). - Démonstration : soient p et p' des projecteurs de G et G' sur $Z(G)$ et $Z(G')$ respectivement ; $p \otimes p'$ est un projecteur de $G \otimes G'$ sur $Z(G) \otimes Z(G')$; par passage aux quotients, on en déduit un projecteur de $H(G \otimes G')$ sur $H(G) \otimes H(G')$.

12.- Produit tensoriel d'algèbres graduées.

Soit G une algèbre graduée à dérivation (sur un anneau commutatif A donné une fois pour toutes). La multiplication de G définit, on l'a vu, un homomorphisme permis $G \otimes G \to G$; il applique $G_p \otimes G_q$ dans G_{p+q} . Sur le produit tensoriel $G \otimes G'$ de deux telles algèbres (produit tensoriel qui est un A-module gradué à dérivation), on définit une structure multiplicative :

le produit de $x \otimes x'$ et $y \otimes y'$ sera $(-1)^{p'q}(xy) \otimes (x'y')$, p' désignant le degré de x' supposé homogène, et q le degré de y supposé homogène. Cette multiplication peut aussi être obtenue comme suit : on définit une application linéaire de $(G \otimes G') \otimes (G \otimes G')$ dans $G \otimes G'$, en identifiant le premier module à $G \otimes (G' \otimes G) \otimes G'$, puis l'appliquant dans $G \otimes (G \otimes G') \otimes G'$ grâce à l'isomorphisme canonique de $G' \otimes G$ sur $G \otimes G'$ (paragraphe 8) ; cela fait, $G \otimes (G \otimes G') \otimes G'$ étant identifié à $(G \otimes G) \otimes (G' \otimes G')$, on a l'homomorphisme de ce module dans $G \otimes G'$, provenant des homomorphismes $G \otimes G \to G$ et $G' \otimes G' \to G'$ définis par les structures multiplicatives de G et de G' .

Ceci permet de montrer facilement : l'isomorphisme $G \otimes G' \to G' \otimes G$ (défini au paragraphe 8) est aussi un isomorphisme pour les structures multiplicatives.

Si G et G' sont des algèbres associatives, il en est de même de $G \otimes G'$.

Si $G \to F$ et $G' \to F'$ sont des homomorphismes d'algèbres, leur produit tensoriel est un homomorphisme d'algèbres.

Si G et G' sont des algèbres graduées à dérivation, $G \otimes G'$ est aussi une algèbre graduée à dérivation : ce qui veut dire que la loi de multiplication définit un homomorphisme permis de $(G \otimes G') \otimes (G \otimes G')$ dans $G \otimes G'$; c'est ce qui résulte aussitôt de la définition de cet homomorphisme donnée plus haut.

Dans ce cas, on a donc une structure multiplicative sur $H(G \otimes G')$, qui devient une algèbre graduée. De plus : l'homomorphisme (défini au paragraphe 9) de $H(G) \otimes H(G')$ dans $H(G \otimes G')$ est ici un homomorphisme d'algèbres ; cela résulte du fait que l'application $Z(G) \otimes Z(G') \to Z(G \otimes G')$ est ici un homomorphisme d'algèbres.