Séminaire Henri Cartan

J. FRENKEL

Coefficients locaux

Séminaire Henri Cartan, tome 1 (1948-1949), exp. n° 10, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1948-1949__1__A10_0>

COEFFICIENTS LOCAUX.

(d'après un exposé fait par FRENKEL, le 21.2.1949).

1.- Systèmes de groupes locaux.

E désignera un espace topologique. A chaque point M de E attachons un groupe (abélien ou non) G_M (ou encore un anneau : plus généralement, G_M pourrait être un être algébrique d'une espèce quelconque, mais donnée une fois pour toutes). On suppose que les G_M attachés aux divers points M de E sont isomorphes à un même groupe G. D'une façon plus précise, soit F le groupoïde fondamental de l'espace E, défini par les classes de "chemins" homotopes d'extrémités données, avec la loi de composition habituelle (non toujours définie) entre ces chemins. Supposons donnée une représentation φ du groupoïde F dans le groupoïde des isomorphismes des G_M les uns sur les autres ; cela signifie qu'à toute classe de chemins homotopes α_{MP} d'origine M et d'extrémité P données, est associé un isomorphisme, noté $\varphi(\alpha_{MP})$ du groupe G_P sur le groupe G_M, de telle sorte que si la classe α_{MQ} est composée des classes α_{MP} et α_{PQ}, on ait

$$\varphi(\alpha_{MQ}) = \varphi(\alpha_{MP}) \circ \varphi(\alpha_{PQ}) .$$

$\varphi(\varepsilon_{MM})$ = identité , ε_{MM} désignant le chemin ponctuel en M.

Définition : La donnée d'un système de groupes (resp. anneaux) G_M et d'une représentation φ du groupoïde fondamental F de l'espace E dans le groupoïde des isomorphismes des G_M les uns sur les autres, définit un système de groupes (resp. anneaux) locaux sur l'espace topologique E.

On pourra consulter STEENROD, Ann. of Math., 44, 1943, p. 610-627, à qui nous empruntons la plupart des notions exposées ici.

Pour un point donné A de l'espace E, soit F_A le groupe fondamental de E relatif au point A (formé des classes de "lacets" d'origine A et d'extrémité A). On aura en particulier une représentation φ_A du groupe F_A dans le groupe $\mathrm{Aut}(G_A)$ des automorphismes du groupe (resp. anneau) G_A. Si l'espace E est connexe par arcs, la connaissance de la représentation φ_A pour un point particulier A détermine entièrement le système de groupes locaux. En effet, soit M un point quelconque de E ; tout élément du groupe G_M est, d'au moins une manière, transformé d'un élément σ de G_A par l'isomorphisme $\varphi(\alpha_{MA})$ attaché à un chemin d'origine M et d'extrémité A.

Considérons donc les couples (σ, α_{MA}) , où $\sigma \in G_A$ et α_{MA} est un chemin d'origine M et d'extrémité A ; deux tels couples (σ, α_{MA}) et (τ, β_{MA}) définissent le même élément de G_M si et seulement si

$$(1) \qquad \tau = \varphi_A((\beta_{MA})^{-1}\alpha_{MA}).\sigma \quad .$$

L'isomorphisme $\varphi(\alpha_{MP})$ de G_P sur G_M , défini par un chemin α_{MP} , est celui qui associe au couple (σ, α_{PA}) le couple (σ, α_{MA}) , où α_{MA} est le chemin composé $\alpha_{MP}\alpha_{PA}$. Si on remplace (σ, α_{PA}) par un couple équivalent, (σ, α_{MA}) est remplacé par le couple équivalent. Ainsi la représentation φ du groupoïde F est déterminée par la connaissance de la représentation φ_A associée à un point particulier A de l'espace connexe E . C.Q.F.D.

<u>Réciproquement</u> : toute représentation ψ du groupe fondamental F_A (attaché au point A d'un espace <u>connexe</u> E) dans le groupe Aut(G) des automorphismes d'un groupe G , définit un système (et un seul) de groupes locaux isomorphes à G , tel que $G_A = G$, et que $\varphi_A = \psi$: on prend pour G_M l'ensemble des classes d'équivalence de couples (σ, α_{MA}) comme ci-dessus, on y définit une loi de groupe d'une manière évidente, et on y fait opérer les chemins comme ci-dessus.

2.- <u>Homomorphismes et isomorphismes de systèmes locaux</u>.

Soit, sur l'espace E , un système Γ défini par des groupes G_M et une représentation φ du groupoïde fondamental F dans le groupoïde des isomorphismes des G_M . Soit, sur le même E , un autre système Γ' , de groupes G'_M et de représentation φ' . Un <u>homomorphisme</u> de Γ dans Γ' est défini par la donnée, pour chaque point M de E , d'un homomorphisme f_M de G_M dans G'_M , avec la condition de compatibilité que voici : pour chaque classe de chemins α_{MP} , on a $\varphi'(\alpha_{PM}) \circ f_M = f_P \circ \varphi(\alpha_{PM})$; cette condition s'exprime aussi par le diagramme

$$\begin{tikzcd} G_M \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & G_P \arrow[d] \\ G'_M \arrow[r, leftrightarrow] & G'_P \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales désignent les isomorphismes définis par un même chemin.

En particulier, on a la notion d'<u>isomorphisme</u> de deux systèmes de groupes (resp. anneaux) locaux. Plus particulièrement, si $\Gamma = \Gamma'$, on a la notion d'<u>automorphisme</u> d'un système de groupes (anneaux) locaux ; un automorphisme de Γ est défini, au moins si E est connexe, par la donnée d'un automorphisme d'un groupe particulier G_A , uniquement assujetti à la condition de permuter avec les automorphismes définis par F_A .

3.- Exemples.

1) Prenons pour groupe G_M le groupe fondamental F_M relatif au point M . Pour toute classe de chemins α_{PM} , définissons $\varphi(\alpha_{PM})$ comme l'isomorphisme de F_M sur F_P :

$$\sigma \longrightarrow \alpha_{PM}\,\sigma(\alpha_{PM})^{-1} \quad , \quad \sigma \in F_M .$$

Ceci définit le système des F_M comme un système de groupes locaux ; pour ce système, φ_A est la représentation canonique de F_A dans le groupe des automorphismes intérieurs de F_A .

2) Un système Γ est dit simple si, quels que soient les points M et P , l'isomorphisme $\varphi(\alpha_{MP})$ de G_P sur G_M est indépendant du chemin α_{MP} . Un système simple est défini (à une isomorphie près) par la donnée d'un groupe (resp. anneau) unique G . Sur un espace E simplement connexe, tout système est simple.

3) Prenons pour G le groupe additif des entiers Z ; le groupe $\mathrm{Aut}(Z)$ se compose de deux éléments : l'automorphisme identique, et l'automorphisme $n \rightarrow -n$ (symétrie). Donc, sur un espace connexe E , il y a au plus deux systèmes de groupes locaux (non isomorphes entre eux) relatifs au groupe Z . L'un d'eux est un système simple. L'autre existe si et seulement si le groupe fondamental F_A possède un sous-groupe F'_A d'indice 2, ce qui est notamment le cas si E est une variété non orientable. Dans ce dernier cas, la représentation ψ de F_A dans $\mathrm{Aut}(Z)$, qui associe l'automorphisme identique à tout élément de F'_A , et la symétrie de Z à tout autre élément de F_A , définit un système de groupes locaux, tous isomorphes à Z ; on l'appelle le système des entiers tordus sur la variété (connexe, non orientable) E .

4) On verra plus tard que les groupes d'homotopie (de dimension quelconque p) relatifs aux différents points de E constituent un système de groupes locaux sur l'espace E ; le cas $p = 1$ est celui déjà envisagé (exemple 1).

4.- Accouplements.

Soient trois systèmes de groupes abéliens locaux : Γ^1 , Γ^2 , Γ . Un accouplement est défini par la donnée d'une application bilinéaire des deux premiers systèmes dans le troisième ; on entend par là la donnée, pour chaque point M de l'espace E , d'une application bilinéaire f_M de $G^1_M \times G^2_M$ dans G_M , de manière que soit satisfaite la condition de compatibilité suivante : pour tout chemin α_{PM} , on a

$$\varphi(\alpha_{PM}).f_M(\sigma^1,\sigma^2) = f_P(\varphi^1(\alpha_{PM}).\sigma^1,\varphi^2(\alpha_{PM}).\sigma^2) \quad ,$$

cette condition s'exprime par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G_M^1 & \longleftrightarrow & G_P^1 \\ \| & & \| \\ G_M^2 & \longleftrightarrow & G_P^2 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ G_M & \longleftrightarrow & G_P \end{array}$$

où les flèches horizontales désignent les isomorphismes définis par un même chemin α_{MP} .

Un cas particulier important est celui où le troisième système Γ est <u>simple</u> ; un tel accouplement est défini par la donnée, en chaque point M , d'une application bilinéaire f_M de $G_M^1 \times G_M^2$ dans un groupe fixe G (indépendant du point M), ces applications f_M devant satisfaire à une condition évidente de compatibilité.

5.- <u>Image réciproque d'un système de groupes locaux</u>.

Soient E et E' deux espaces topologiques, g une application <u>continue</u> de E dans E' , et Γ' un système de groupes (resp. anneaux) locaux sur E' . Pour chaque point M de E , définissons le groupe G_M (resp. l'anneau G_M) comme étant le groupe (resp. anneau) que Γ' attache au point $g(M)$. Pour tout chemin α_{PM} dans E , définissons l'isomorphisme $\varphi(\alpha_{PM})$ de G_M sur G_P comme étant l'isomorphisme $\varphi'(g(\alpha_{PM}))$ de $G'_{g(M)}$ sur $G'_{g(P)}$. Le système des G_M et la représentation φ définissent un système Γ de groupes locaux, appelé image réciproque, par l'application g , du système Γ' donné sur E' .

Si Γ' est <u>simple</u>, Γ est simple. Mais Γ peut être simple sans que Γ' le soit : par exemple, si E est simplement connexe, Γ est simple quel que soit Γ' .

L'image réciproque d'un accouplement sur E' est un accouplement sur E .

6.- <u>Chaînes singulières à coefficients locaux</u>.

Soit Γ un système de groupes locaux G_M <u>abéliens</u>, sur un espace topologique E . Soit x un simplexe singulier de dimension p , c'est-à-dire une fonction continue $x(\lambda_o,\dots,\lambda_p)$ (où les variables λ_i sont $\geqslant 0$ de somme un). A chaque système (λ_i) associons le groupe G_M attaché au point $M = x(\lambda_o,\dots,\lambda_p)$; on a des isomorphismes <u>bien déterminés</u> de ces groupes les uns sur les autres, car un simplexe euclidien est simplement connexe. Cela dit, soit par exemple $G(x)$ le groupe associé au point $M = x(1,0,\ldots,0)$, premier sommet du simplexe x. Si x' est un sous-simplexe de x (obtenu en annulant un certain nombre de variables λ_i), on a un isomorphisme bien déterminé $\alpha(x',x)$ du groupe $G(x)$ sur le groupe $G(x')$; on notera $\alpha(x,x')$ l'isomorphisme réciproque.

Cela posé, définissons le groupe (abélien) $S(E;\Gamma)$ des <u>chaînes singulières de l'espace</u> E <u>à coefficients dans le système</u> Γ <u>de groupes locaux</u>. Ce sera le groupe (écrit additivement) des combinaisons linéaires finies de simplexes singuliers, le coefficient σ de chaque simplexe singulier x étant pris dans le groupe $G(x)$ attaché à x. On obtient ainsi un groupe <u>gradué</u>. On y définit un opérateur <u>bord</u>, en posant

$$\partial(\sigma x) = \sum_i (-1)^i (\alpha(x^i,x).\sigma)x^i \quad ,$$

la somme étant étendue à toutes les faces x^i de x. On vérifie aussitôt que $\partial\partial = 0$; on a donc un groupe gradué à dérivation.

On observera que si Γ est le système $\tilde{Z}$ des <u>entiers tordus</u>, le groupe des chaînes singulières est un groupe gradué <u>libre</u>. Le groupe dérivé de $S(E;\Gamma)$ se notera $H(E;\Gamma)$ et s'appellera le <u>groupe d'homologie singulière de l'espace</u> E, <u>à coefficients dans le système de groupes locaux</u> Γ.

7.- <u>Cochaînes singulières à coefficients locaux</u>.

Une cochaîne singulière est une fonction f de simplexes singuliers dont la valeur $f(x)$ est dans le groupe $G(x)$ attaché au simplexe x. Le groupe des cochaînes singulières est un groupe gradué. On y définit un opérateur <u>cobord</u>, en posant

$$\delta f(x) = \sum_i (-1)^i \alpha(x,x^i)\, f(x^i) \ .$$

On obtient ainsi un groupe gradué à dérivation $S^*(E;\Gamma)$; son groupe dérivé $H^*(E;\Gamma)$ est le <u>groupe de cohomologie singulière</u> de l'espace E, à coefficients dans Γ.

Si Γ est un système d'<u>anneaux</u> locaux, on définit une <u>multiplication des cochaînes</u>, d'une manière évidente. D'où une structure d'anneau gradué à dérivation sur $S^*(E;\Gamma)$, car on a encore

$$\delta(fg) = (\delta f)g + (-1)^p f(\delta g) \quad \text{si } f \text{ est de degré } p \ .$$

On en déduit une structure d'anneau gradué sur $H^*(E;\Gamma)$.

Plus généralement, si on a trois systèmes de groupes locaux Γ^1 , Γ^2 , Γ , et un accouplement de (Γ^1,Γ^2) dans Γ , on définit une application bilinéaire de

$$S^*(E;\Gamma^1) \times S^*(E;\Gamma^2) \quad \text{dans} \quad S^*(E;\Gamma) \quad ,$$

d'où une application bilinéaire de

$$H^*(E;\Gamma^1) \times H^*(E;\Gamma^2) \quad \text{dans} \quad H^*(E;\Gamma) \quad ,$$

application dans laquelle les degrés s'ajoutent.

8.- Accouplement entre homologie et cohomologie.

Soient deux systèmes de groupes abéliens locaux Γ^1 , Γ^2 , accouplés en un système simple Γ (défini par la donnée d'un groupe abélien unique, noté aussi Γ). Dénotons $\langle\sigma,\tau\rangle$ l'élément de Γ , valeur de l'application bilinéaire de $G^1_M \times G^2_M$ dans Γ , pour un couple d'éléments σ, τ . On va définir une application bilinéaire de $S(E;\Gamma^1) \times S^*(E;\Gamma^2)$ dans le groupe Γ que nous appellerons produit scalaire. Le produit scalaire

$$\langle \sigma x, f \rangle$$

où σx est un simplexe singulier à coefficient dans $G^1(x)$, et f une cochaîne de $S^*(E;\Gamma^2)$, sera par définition l'élément $\langle\sigma,f(x)\rangle$ du groupe Γ .

Pour toute chaîne singulière $u \in S(E;\Gamma^1)$ et toute cochaîne $f \in S^*(E;\Gamma^2)$ on a la relation $\langle \partial u, f\rangle = \langle u, \delta f\rangle$. Ceci permet de définir un accouplement entre homologie (à coefficients dans Γ^1) et cohomologie (à coefficients dans Γ^2).

9.- Effet d'une application continue.

Soit g une application continue de E dans E' , et Γ l'image réciproque d'un système Γ' de groupes (abéliens) locaux sur E' . Pour tout simplexe singulier x de E , soit $\bar{g}(x)$ le simplexe singulier $x \circ g$ de l'espace E' . Le groupe $G(x)$ attaché au premier sommet de x (cf. paragraphe 6) est le même que le groupe $G'(\bar{g}(x))$ attaché au premier sommet de $\bar{g}(x)$. Ceci permet de définir d'une manière évidente un homomorphisme (noté encore $\bar{g}$) du groupe $S(E;\Gamma)$ dans le groupe $S(E';\Gamma')$. C'est un homomorphisme permis ; on en déduit un homomorphisme $\tilde{g}$ de $H(E;\Gamma)$ dans $H(E';\Gamma')$.

Si maintenant on a une cochaîne $f' \in S^*(E';\Gamma')$, on définit une cochaîne $g^*(f') \in S^*(E;\Gamma)$, à savoir celle dont la valeur, sur un simplexe x , est égale à la valeur de f' sur le simplexe $\bar{g}(x)$. L'homomorphisme g^* de $S^*(E';\Gamma')$

dans $S^*(E;\Gamma)$ est permis ; d'où un homomorphisme $\tilde{g}^*$ de $H^*(E';\Gamma')$ dans $H^*(E;\Gamma)$.

Soient, sur E' , deux systèmes locaux Γ'^1 , Γ'^2 accouplés en un système simple Γ ; soient Γ^1 , Γ^2 leurs images réciproques, qui sont aussi accouplées en Γ . On a alors le diagramme de compatibilités

$$\begin{array}{ccc} H(E;\Gamma^1) & \longrightarrow & H(E';\Gamma'^1) \\ \parallel & & \parallel \\ H^*(E;\Gamma^2) & \longleftarrow & H^*(E';\Gamma'^2) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \Gamma & \longleftrightarrow & \Gamma \end{array}$$

10.- <u>Développements possibles de la théorie</u>.

Si on a un sous-espace F d'un espace topologique E , on a une théorie de l'homologie relative et de la cohomologie relative ; elles donnent lieu à des suites exactes (d'homomorphismes de systèmes de groupes locaux).

La théorie de la <u>subdivision barycentrique</u> s'étend aux chaînes singulières à coefficients locaux, avec toutes les conséquences qu'elle comporte (possibilité de ne considérer que des chaînes "petites d'ordre V ", etc.

Il y a une <u>théorie simpliciale</u> des coefficients locaux, qui est à la "théorie singulière" ci-dessus ce que la théorie simpliciale ordinaire est à la théorie singulière ordinaire. (Pour cette théorie simpliciale des coefficients locaux, voir par exemple EILENBERG, Commentarii Math. Helv., 21, 1948, p. 302-320). Les "chemins" sont alors les lignes brisées formées d'arêtes du complexe simplicial K envisagé ; on a ainsi une théorie de l'homologie et de la cohomologie simpliciales à coefficients locaux. On peut utiliser à volonté les simplexes "ordonnés" ou les simplexes "orientés" ; toutes les cochaînes simpliciales, ou seulement les cochaînes "alternées".

Soit $\tilde{K}$ l'espace topologique associé à un complexe simplicial localement fini K . On a une correspondance biunivoque (canonique) entre les systèmes locaux sur K (au sens simplicial) et les systèmes locaux sur $\tilde{K}$ (au sens topologique). Le groupe d'homologie (resp. cohomologie) simpliciale de K relatif à un système local Γ sur K , est canoniquement isomorphe au groupe d'homologie (resp. cohomologie) singulière de $\tilde{K}$ relatif au système local $\tilde{\Gamma}$ associé à Γ .

11.- <u>Point de vue de Čech-Alexander</u>.

Si l'on veut étudier la cohomologie de Čech-Alexander (cf. exposé 6) avec des coefficients locaux, il convient d'utiliser une <u>nouvelle définition des</u>

systèmes de groupes locaux (non équivalente à celle utilisée jusqu'ici), et qui est mieux appropriée au point de vue Čech-Alexander.

Suivant cette nouvelle définition, un système Γ de groupes (resp. anneaux) locaux, sur un espace topologique E, est défini par la donnée :

1) d'un recouvrement V de E par des ouverts ;

2) pour tout ensemble non vide A, petit d'ordre V, d'un groupe (resp. anneau) G_A ;

3) pour tout couple (A,B) tel que $A \subset B$, d'un isomorphisme φ_{AB} de G_B sur G_A, avec condition de transitivité lorsque $A \subset B \subset C$.

Etant donnés deux systèmes locaux Γ et Γ' sur un même espace E, un homomorphisme de Γ dans Γ' est défini par la donnée, pour chaque ensemble A assez petit, d'un homomorphisme f_A de G_A dans G'_A, de manière que, pour $A \subset B$, on ait $f_A \circ \varphi_{AB} = \varphi'_{AB} \circ f_B$. De là on déduit, en particulier, la notion d'isomorphisme de deux systèmes locaux.

Lorsque E est un espace localement connexe (par arcs) dont tout point possède un voisinage simplement connexe (au sens des chemins), on montre facilement l'équivalence du nouveau point de vue des coefficients locaux avec l'ancien.

Soit donné un système de groupes (abéliens ; resp. d'anneaux) locaux Γ, dans le sens nouveau. Nous allons définir le groupe (resp. anneau) des cochaînes de Čech-Alexander à coefficients dans Γ ; notation : $\check{C}(E;\Gamma)$. Une cochaîne de degré p sera une fonction $f(M_0,\dots,M_p)$ de $p+1$ points voisins d'ordre V (V désigne le recouvrement servant à définir Γ), prenant ses valeurs dans le groupe (resp. anneau) G_A attaché à l'ensemble A des points M_i. Deux telles fonctions seront identifiées si elles prennent les mêmes valeurs pour tous les systèmes de points M_i suffisamment voisins. Le groupe $\check{C}(E;\Gamma)$ sera le groupe (additif) de ces cochaînes après identifications. On définit d'une manière évidente le cobord δf d'une cochaîne f. De même, si Γ est un système d'anneaux, on définit dans $\check{C}(E;\Gamma)$ une multiplication qui en fait un anneau gradué à dérivation. Le groupe (resp. anneau) dérivé de $\check{C}(E;\Gamma)$ est le groupe (resp. anneau) de cohomologie de Čech-Alexander $H(E;\Gamma)$. Les développements donnés antérieurement au sujet de la cohomologie de Čech-Alexander valent pour le cas plus général des coefficients locaux.

12.- Complément : anneau des entiers complexes tordus.

Les "entiers tordus" ont été définis au paragraphe 3 (3° exemple). Soit maintenant C l'anneau des "entiers complexes" $a+ib$, où a et b sont entiers. L'anneau C possède, outre l'automorphisme identique, l'automorphisme $a+ib \to a-ib$; ce sont d'ailleurs les seuls pour lesquels le sous-anneau des "entiers réels" soit stable. Si E est une variété connexe non orientable, le groupe fondamental possède un sous-groupe d'indice 2 ; on en déduit une représentation du groupe fondamental sur le groupe des 2 automorphismes de C qui vient d'être défini. D'où un système d'anneaux locaux sur E, dit système des "entiers complexes tordus". On définirait de même le système des nombres complexes tordus (en considérant les $a+ib$, où a et b sont des nombres réels quelconques).

Généralisation : partons d'un anneau quelconque A ; considérons l'algèbre (sur A) des nombres complexes $a+ib$ (où $a \in A$ et $b \in A$, et $i^2 = -1$). On a encore un groupe de deux automorphismes de cette algèbre, d'où un système local pour toute variété non orientable.