Pierre Cartier

Les groupes $\mathrm{Ext}^s(A, B)$

Séminaire A. Grothendieck, tome 1 (1957), exp. nº 3, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SG_1957__1__A3_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire A. GROTHENDIECK
(ALGEBRE HOMOLOGIQUE)

Année 1956/57

-:-:-:-

Exposé n° 3

LES GROUPES $\mathrm{Ext}^s (A,B)$

(Exposé de Pierre CARTIER, le 10.5.57)

1.- Les classes d'homotopie.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne ; rappelons qu'on appelle complexe à valeurs dans $\mathcal{C}$ un objet formé d'une suite $(F^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'objets de $\mathcal{C}$ et d'une suite $(d_F^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où, pour chaque n, d_F^n est un morphisme $F^n \longrightarrow F^{n+1}$ et où $d_F^{n+1} d_F^n = 0$ pour tout n. Les complexes à valeurs dans $\mathcal{C}$ forment une catégorie $\mathcal{K}\mathcal{C}$: un morphisme d'un complexe F dans un complexe G est une suite $(f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où, pour chaque n, f^n est un morphisme de F^n dans G^n et où $d_G^n f^n = f^{n+1} d_F^n$ pour tout n. Plus généralement, introduisons, pour tout entier s, le groupe $\mathrm{Hom}^s(F,G)$ composé des suites (f^n) où, pour chaque n, f^n est un morphisme de F^n dans G^{n+s} et où $d_G^{n+s} f^n = (-1)^s f^{n+1} d_F^n$ pour tout n ; on a donc $\mathrm{Hom}^0(F,G) = \mathrm{Hom}(F,G)$. Soient F_1, F_2, F_3 des complexes ; si $f = (f^n) \in \mathrm{Hom}^s(F_1,F_2)$, $f' = (f'^n) \in \mathrm{Hom}^t(F_2,F_3)$, on vérifie tout de suite que la suite $f'f = (f'^{n+s} f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ appartient à $\mathrm{Hom}^{s+t}(F_1,F_3)$; l'application $(f,f') \to f'f$ est bilinéaire. De plus, si F_4 est un quatrième complexe à valeurs dans $\mathcal{C}$ et $f'' \in \mathrm{Hom}^u(F_3,F_4)$, on a $f''(f'f) = (f''f')f$.

Soient F et G des complexes à valeurs dans $\mathcal{C}$; soit $(k^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite telle que $k^n \in \mathrm{Hom}(F^n, G^{n+s-1})$. Si on pose $f^n = d_G^{n+s-1} k^n + (-1)^s k^{n+1} d_F^n$, on vérifie tout de suite que $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un élément de $\mathrm{Hom}^s(F,G)$; les éléments de $\mathrm{Hom}^s(F,G)$ que l'on peut obtenir de cette manière sont dits être homotopes à 0 ; ils forment un groupe $\mathrm{Hom}_0^s(F,G)$; deux éléments f, g de $\mathrm{Hom}^s(F,G)$ sont dits homotopes si $f-g \in \mathrm{Hom}_0^s(F,G)$; le groupe $\mathrm{Hom}^s(F,G)/\mathrm{Hom}_0^s(F,G)$ sera appelé le <u>groupe des classes d'homotopie de degré</u> s et sera désigné par $\underline{H}^s(F,G)$. Si F_1, F_2, F_3 sont des complexes à valeurs dans $\mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Hom}^s(F_1,F_2)$, $f' \in \mathrm{Hom}^t(F_2,F_3)$, on vérifie tout de suite que $f'f$ est homotope à 0 si l'un au moins des éléments f ou f' est homotope à 0 ; on en déduit une application bilinéaire $(\bar{f},\bar{f}') \longrightarrow \bar{f}'\bar{f}$ de $\underset{\approx}{H}^s(F_1,F_2) \times \underset{\approx}{H}^t(F_2,F_3)$ dans $\underset{\approx}{H}^{s+t}(F_1,F_3)$; si F_4 est un quatrième complexe à valeurs dans $\mathcal{C}$ et $\bar{f}'' \in \underset{\approx}{H}^u(F_3,F_4)$, on a $\bar{f}''(\bar{f}'\bar{f}) = (\bar{f}''\bar{f}')\bar{f}$.

Soient F et G des complexes à valeurs dans $\mathcal{C}$ et $f = (f^n)$ un élément de $\mathrm{Hom}^s(F,G)$; il est clair que f^n induit un morphisme du noyau de d_F^n dans le noyau de d_G^{n+s} et également un morphisme de l'image de d_F^{n-1} dans l'image de d_G^{n+s-1} ; f^n définit donc par passage aux quotients un morphisme f_*^n de $H^n(F)$ dans $H^{n+s}(G)$; nous poserons $f_* = (f_*^n)_{n\in Z}$. L'application $f \longrightarrow f_*$ est un homomorphisme du groupe $\mathrm{Hom}^s(F,G)$ dans le groupe $\prod_{n\in Z} \mathrm{Hom}\,(H^n(F),H^{n+s}(G))$. On vérifie immédiatement que la condition $f \in \mathrm{Hom}_0^s(F,G)$ entraîne $f_* = 0$; on en déduit un homomorphisme $\bar{f} \longrightarrow \bar{f}_*$ de $\underset{\approx}{H}^s(F,G)$ dans le groupe $\prod_{n\in Z} \mathrm{Hom}\,(H^n(F), H^{n+s}(G))$. Si F_1,F_2,F_3 sont des complexes à valeurs dans $\mathcal{C}$, $\bar{f} \in H^s(F_1,F_2)$, $\bar{f}' \in \underset{\approx}{H}^t(F_2,F_3)$, $\bar{f}_* = (f_*^n)$, $\bar{f}'_* = (f'^n_*)$, on a $(\bar{f}'\bar{f})_* = (f'^{\,n+s}_* f_*^n)$.

Rappelons qu'on appelle <u>résolution</u> d'un objet A de la catégorie $\mathcal{C}$ un couple formé d'un complexe $F = (F^n)$ et d'un morphisme $\varepsilon : A \rightarrow F^0$ (l'augmentation) qui possèdent les propriétés suivantes : on a $F^n = 0$ pour $n < 0$; la suite

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} F^0 \xrightarrow{d_F^0} F^1$$

est exacte. Une résolution est dite <u>exacte</u> si on a $H^n(F) = 0$ pour tout $n > 0$; elle est dite <u>injective</u> si les F^n sont des objets injectifs de $\mathcal{C}$.

Soient A un objet de $\mathcal{C}$ et $G = (G^n)$ un complexe à valeurs dans $\mathcal{C}$; pour tout n, désignons par $\tilde{d}^n$ l'homomorphisme $u \longrightarrow d_G^n u$ de $\mathrm{Hom}\,(A,G^n)$ dans $\mathrm{Hom}\,(A,G^{n+1})$. On a $\tilde{d}^{n+1}\tilde{d}^n = 0$; la suite $(\mathrm{Hom}\,(A,G^n))$, munie des opérateurs $\tilde{d}^n$, est donc un complexe de groupes abéliens que nous noterons $\mathrm{Hom}\,(A,G)$. Soient maintenant (F,ε) une résolution de A et s un entier ; si $f = (f^n) \in \mathrm{Hom}^s(F,G)$, $f^0\varepsilon$ est un élément de $\mathrm{Hom}\,(A,G^s)$; c'est un cycle, car on a $d_G^s f^0\varepsilon = (-1)^s f^1 d_F^0 \varepsilon = 0$. Si $f \in \mathrm{Hom}_0^s(F,G)$, $f^0\varepsilon$ est un bord dans $\mathrm{Hom}\,(A,G^s)$; en effet, il existe alors des morphismes $k^0 : F^0 \longrightarrow G^{s-1}$ et $k^1 : F^1 \longrightarrow G^s$ tels que $f^0 = d_G^{s-1}k^0 + (-1)^s k^1 d_F^0$, d'où $f^0\varepsilon = d_G^{s-1}k^0\varepsilon$. On en déduit l'existence d'un homomorphisme φ^s de $\underset{\approx}{H}^s(F,G)$ dans $H^s(\mathrm{Hom}\,(A,G))$ qui applique la classe d'homotopie d'un élément $(f^n) \in \mathrm{Hom}^s(F,G)$ sur la classe de cohomologie de $f^0\varepsilon$.

THÉORÈME 1.- Soient (F, ε) une résolution exacte d'un objet A de $\mathcal{C}$ et $G = (G^n)$ un complexe tel que les G^n soient tous des objets injectifs de $\mathcal{C}$. Alors, pour tout s, l'homomorphisme φ^s de $\underset{\sim}{H}^s(F,G)$ dans $H^s(\mathrm{Hom}\,(A,G))$ défini ci-dessus est un isomorphisme.

Montrons d'abord que φ^s est injectif. Soit $f = (f^n)$ un élément de $\mathrm{Hom}^s\,(F,G)$ tel que $f^0\varepsilon$ soit un bord dans $\mathrm{Hom}\,(A,G^s)$. Déterminons inductivement des éléments $k^n \in \mathrm{Hom}\,(F^n,G^{n+s-1})$ comme suit : on pose $k^n = 0$ pour $n < 0$; pour $n = 0$, il résulte de l'hypothèse faite que $f^0\varepsilon$ est de la forme $d_G^{s-1}z$, où z est un morphisme de A dans G^{s-1} ; comme ε est un monomorphisme et G^{s-1} injectif, on peut écrire $z = k^0\varepsilon$ avec un $k^0 \in \mathrm{Hom}\,(F^0,G^{s-1})$. Comme le noyau de d_F^0 est l'image de ε, la formule $(f^0-d_G^{s-1}k^0)\,\varepsilon = 0$ montre que le noyau de $f^0-d_G^{s-1}k^0$ contient celui de d_F^0. Soit maintenant $n \geqslant 0$; supposons déjà déterminé un élément $k^n \in \mathrm{Hom}\,(F^n,G^{n+s-1})$ tel que le noyau de $f^n - d_G^{n+s-1}k^n$ contienne celui de d_F^n. Alors il résulte du fait que G^{n+s} est injectif qu'il existe un morphisme $k^{n+1} : F^{n+1} \to G^{n+s}$ tel que $(-1)^s(f^n-d_G^{n+s-1}k^n) = k^{n+1}d_F^n$. On a $(f^{n+1} - d_G^{n+s}k^{n+1})d_F^n = (-1)^s d_G^{n+s}(f^n - (f^n-d_G^{n+s-1}k^n)) = 0$ puisque $f^{n+1}d_F^n = (-1)^s d_G^{n+s}f^n$ et $d_G^{n+s}d_G^{n+s-1} = 0$. Le noyau de $f^{n+1} - d_G^{n+s}k^{n+1}$ contient donc l'image de d_F^n, qui est le noyau de d_F^{n+1} puisque $H^{n+1}(F) = 0$. Comme on a $f^n = d_G^{n+s-1}k^n + (-1)^s k^{n+1}d_F^n$ pour tout n, on a $f \in \mathrm{Hom}_0^s\,(F,G)$, ce qui montre que φ^s est injectif.

Donnons nous maintenant un cycle u quelconque dans $\mathrm{Hom}\,(A,G^s)$. Nous allons construire inductivement une suite (f^n), où $f^n \in \mathrm{Hom}\,(F^n,G^{n+s})$. Nous posons $f^n = 0$ pour $n < 0$. Puisque ε est un monomorphisme et G^s injectif, on peut écrire $u = f^0\varepsilon$, avec un $f^0 \in \mathrm{Hom}\,(F^0,G^s)$. On a $d_G^s f^0\varepsilon = d_G^s u = 0$; le noyau de $d_G^s f^0$ contient donc l'image de ε, qui est le noyau de d_F^0. Supposons maintenant que $n \geqslant 0$ et qu'on ait déjà construit un élément $f^n \in \mathrm{Hom}\,(F^n,G^{n+s})$ tel que le noyau de $d_G^{n+s}f^n$ contienne celui de d_F^n. Comme G^{n+s+1} est injectif, il y a un élément $f^{n+1} \in \mathrm{Hom}\,(F^{n+1},G^{n+s+1})$ tel que $d_G^{n+s}f^n = (-1)^s f^{n+1}d_F^n$; on a $d_G^{n+s+1}f^{n+1}d_F^n = 0$ puisque $d_G^{n+s+1}d_G^{n+s} = 0$; le noyau de $d_G^{n+s+1}f^{n+1}$ contient donc l'image de d_F^n, qui est le noyau de d_F^{n+1} puisque $H^{n+1}(F) = 0$. La suite (f^n) ainsi construite est un élément de $\mathrm{Hom}^s(F,G)$, et on a $f^0\varepsilon = u$; ceci montre que φ^s est surjectif. Le théorème 1 est donc établi.

Supposons maintenant qu'il y ait un morphisme η d'un objet B de la catégorie dans G^0 tel que (G, η) soit une résolution de B. Nous allons alors établir un isomorphisme de $H^0(\mathrm{Hom}\ (A,G))$ sur $\mathrm{Hom}\ (A,B)$. Comme η est un monomorphisme, $v \to \eta v$ est un isomorphisme ψ de $\mathrm{Hom}\ (A,B)$ sur un sous-groupe de $\mathrm{Hom}\ (A,G^0)$; comme l'image de η est le noyau de d_G^0, l'image de ψ est le noyau de $\tilde{d}^0$, c'est-à-dire le groupe $H^0(\mathrm{Hom}\ (A,G))$ puisque $d_G^{-1} = 0$. On a donc le

<u>COROLLAIRE au théorème 1.- Soient</u> A <u>et</u> B <u>des objets de</u> $\mathcal{C}$, (F, ε) <u>une résolution exacte de</u> A <u>et</u> (G, η) <u>une résolution injective de</u> B. <u>Il y a alors un isomorphisme</u> Θ <u>de</u> $\underset{\sim}{H}^0(F,G)$ <u>sur</u> $\mathrm{Hom}\ (A,B)$ <u>qui applique la classe d'homotopie d'un élément</u> $f = (f^n)$ <u>de</u> $\mathrm{Hom}\ (F,G)$ <u>sur l'élément</u> v <u>de</u> $\mathrm{Hom}\ (A,B)$ <u>tel que le diagramme</u>

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varepsilon} & F^0 \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^0} \\ B & \xrightarrow{\eta} & G^0 \end{array}$$

<u>soit commutatif</u>.

2.- <u>Les groupes</u> $\mathrm{Ext}^s(A,B)$.

Nous supposerons à partir de maintenant que la catégorie $\mathcal{C}$ possède la propriété suivante : tout objet de $\mathcal{C}$ admet un monomorphisme dans un objet injectif. Dans ces conditions, tout objet A de $\mathcal{C}$ admet au moins une résolution exacte et injective. Nous poserons

$R(A) = \varepsilon_R$ (R est une résolution exacte et injective de A) [1].

De plus, nous ferons les conventions de notations suivantes : si F est une résolution d'un objet A, nous désignerons par ε_F l'augmentation de la résolution F et nous désignerons par $(F^n)_{n \in Z}$ le complexe qui intervient dans la définition de F. Si F et G sont des résolutions d'objets A et B, nous désignerons par $\underset{\sim}{H}^s(F,G)$, $\mathrm{Hom}^s(F,G)$ les groupes $\underset{\sim}{H}^s((F^n),(G^n))$, $\mathrm{Hom}^s((F^n),(G^n))$, par $\mathrm{Hom}\ (A,G)$ le complexe $\mathrm{Hom}\ (A,(G^n))$ et par φ_B^s l'homomorphisme de $\underset{\sim}{H}^s(F,G)$ dans $\mathrm{Hom}\ (A,G)$ qui a été défini avant l'énoncé du théorème 1. Nous désignerons par ε_A l'augmentation de $R(A)$ et par d_A^n ses opérateurs différentiels.

Si A,B sont des objets de $\mathcal{C}$ et s un entier, nous poserons

---

(1) Le symbole ε est le symbole de choix universel de Hilbert-Bernays :
Pour toute relation $U\{x\}$ comportant une variable x, l'objet $\varepsilon_x(U\{x\}) = y$ est tel que l'on ait le théorème :
" $U\{y\}$ équivaut à "il existe x tel que $U\{x\}$ " ".

$$\mathrm{Ext}^s(A,B) = \underset{\sim}{H}^s(R(A),R(B)) .$$

Nous désignerons par θ ou $\theta_{A,B}$ l'isomorphisme de $\mathrm{Ext}^0(A,B)$ sur $\mathrm{Hom}\,(A,B)$ défini dans le corollaire au théorème 1.

Si A_1,A_2,A_3 sont des objets de $\mathcal{C}$, il y a un accouplement $(u_1,u_2) \longrightarrow u_2u_1$ des groupes $\mathrm{Ext}^p(A_1,A_2)$ et $\mathrm{Ext}^q(A_2,A_3)$ à valeurs dans $\mathrm{Ext}^{p+q}(A_1,A_3)$; de plus, si A_4 est un quatrième objet et si $u_1 \in \mathrm{Ext}^p(A_1,A_2)$, $u_2 \in \mathrm{Ext}^q(A_2,A_3)$, $u_3 \in \mathrm{Ext}^r(A_3,A_4)$, on a $u_3(u_2u_1) = (u_3u_2)u_1$.

L'application φ^s_B est un isomorphisme de $\mathrm{Ext}^s(A,B)$ sur $H^s(\mathrm{Hom}\,(A,R(B)))$. Soit maintenant f un morphisme de B dans un nouvel objet B' ; soit $\bar{f}$ l'élément de $\mathrm{Ext}^0\,(B,B')$ tel que $\theta(\bar{f}) = f$, et soit (f^n) un représentant de $\bar{f}$ dans $\mathrm{Hom}^0\,(R(B),R(B'))$; on a donc $f^0\varepsilon_B = \varepsilon_{B'}f$; l'application $\alpha \longrightarrow f^n\alpha$ est un homomorphisme de $\mathrm{Hom}\,(A,R^n(B))$ dans $\mathrm{Hom}\,(A,R^n(B'))$, et la suite de ces applications est un morphisme du complexe $\mathrm{Hom}\,(A,R(B))$ dans le complexe $\mathrm{Hom}\,(A,R(B'))$; ce morphisme définit un morphisme f_* de $H^s(\mathrm{Hom}\,(A,R(B)))$ dans $H^s(\mathrm{Hom}\,(A,R(B')))$. On a $f_*(\varphi^s_B(u)) = \varphi^s_{B'}(\overset{-1}{\theta}(f)u)$ pour tout $u \in \mathrm{Ext}^s\,(A,B)$. Représentons en effet u par un élément $(u^n) \in \mathrm{Hom}^s(R(A),R(B))$; $\varphi^s_B(u)$ est alors la classe de cohomologie de $u^0\varepsilon_A$ et son image par f_* est la classe de cohomologie de $f^0u^0\varepsilon_A$. Par ailleurs $\overset{-1}{\theta}(f)u$ est représenté par l'élément (f^nu^n) de $\mathrm{Hom}^s(R(A),R(B'))$ et $\varphi^s_{B'}(\overset{-1}{\theta}(f)u)$ est par suite la classe de cohomologie de $f^0u^0\varepsilon_A$, ce qui démontre notre assertion.

Pour un objet fixe A , si on fait correspondre à tout objet B de $\mathcal{C}$ le groupe $\mathrm{Ext}^s(A,B)$ et à tout morphisme f de B dans un objet B' l'application $u \longrightarrow \overset{-1}{\theta}(f)u$ de $\mathrm{Ext}^s(A,B)$ dans $\mathrm{Ext}^s(A,B')$, on obtient un foncteur covariant sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens (en vertu des relations d'associativité pour les accouplements) ; ce que nous venons de dire établit que les φ^s_B définissent un isomorphisme de ce foncteur sur le s-ième dérivé du foncteur $\mathrm{Hom}(A,*)$. On verrait de la même manière que, pour B fixe, il y a un foncteur contrevariant sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens qui associe à tout objet A le groupe $\mathrm{Ext}^s\,(A,B)$ et à tout morphisme $f : A \longrightarrow A'$ l'homomorphisme $u \rightarrow u\overset{-1}{\theta}(f)$ de $\mathrm{Ext}^s(A',B)$ dans $\mathrm{Ext}^s(A,B)$.

A toute résolution exacte F d'un objet A de la catégorie $\mathcal{C}$ on peut associer un élément j_F de $\underset{\sim}{H}^0(F,R(A))$, à savoir l'élément dont l'image par l'isomorphisme θ du corollaire au théorème 1 est le morphisme identique de A. Il est clair que, si $v \in \mathrm{Ext}^s(A,B)$, où B est un objet de $\mathcal{C}$, on a $\varphi^s_B(vj_F) = \varphi^s_B(v)$. Soient maintenant G une résolution exacte de B et u un élément de $\underset{\sim}{H}^s(F,G)$; il y alors un élément $E(u)$ et un seul de $\mathrm{Ext}^s(A,B)$ tel que $E(u)j_F = j_G u$, à savoir l'élément défini par la condition que $\varphi_B^s(E(u)) = \varphi_B^s(j_G u)$; on obtient ainsi un homomorphisme E de $\underset{\sim}{H}^s(F,G)$ dans $\mathrm{Ext}^s(A,B)$. Il résulte immédiatement de la définition que l'on a $E(u_2 u_1) = E(u_2)E(u_1)$ si $u_1 \in \underset{\sim}{H}^s(F_1,F_2)$, $u_2 \in \underset{\sim}{H}^t(F_2,F_3)$, F_1,F_2 et F_3 étant des résolutions exactes d'objets de la catégorie.

3.- L'interprétation de Yoneda.

Si A,B sont des objets de $\mathcal{C}$, nous désignerons par $\underset{\sim}{S}_s(B,A)$ (s étant un entier >0) la classe dont les éléments sont les résolutions exactes S de B telles que l'on ait $S^s = A$, $S^n = 0$ pour $n > s$. Soit S un élément de cette classe, et soit F une résolution de A dans $\mathcal{C}$; si on pose $G^n = S^n$ si $n < s$, $G^n = F^{n-s}$ si $n \geqslant s$, $\varepsilon_G = \varepsilon_S$, $d_G^n = d_S^n$ si $n < s-1$, $d_G^{s-1} = \varepsilon_F d_S^{s-1}$, $d_G^n = d_F^{n-s}$ si $n \geqslant s$, on obtient une résolution de B , que nous désignerons par SF ; si F est exacte, il en est de même de SF . Si A,A',B sont des objets de $\mathcal{C}$, $S \in \underset{\sim}{S}_s(B,A)$ et $T \in \underset{\sim}{S}_t(A,A')$, ST est un élément de $\underset{\sim}{S}_{s+t}(B,A')$ et on a $(ST)F' = S(TF')$ pour toute résolution F' de A' .

Soit S un élément de $\underset{\sim}{S}_s(B,A)$; j_S est alors un élément de $\underset{\sim}{H}^0(S,R(B))$; choisissons en un représentant (j_S^n) ; alors j_S^s est un cycle de $\mathrm{Hom}\,(A,R^s(B))$ puisque $S^{s+1} = 0$, et sa classe de cohomologie ne dépend pas du choix du représentant (j_S^n) de j_S ; car, si $(j_S'^n)$ est un autre représentant de j_S , il y a des morphismes $k^n : S^n \to R^{n-1}(B)$ tels que l'on ait $j_S'^n = j_S^n + d_B^{n-1}k^n + k^{n+1}d_S^n$, d'où $j_S'^s = j_S^s + d_B^{s-1}k^s$. La classe de cohomologie de j_S^s est l'image par φ_B^s d'un élément de $\mathrm{Ext}^s(A,B)$, que nous désignerons par $e(S)$. On peut obtenir un représentant de $e(S)$ de la manière suivante : soit $(j_{SR(A)}^n)$ un représentant de $j_{SR(A)}$; on peut alors supposer que $j_S^n = j_{SR(A)}^n$ pour $n < s$; si on pose $e^n = (-1)^{ns} j_{SR(A)}^{n+s}$ si $n \geqslant 0$, $e^n = 0$ si $n < 0$, (e^n) appartient à $\mathrm{Hom}^s(R(A),R(B))$ et on a $e^0 \varepsilon_A d_S^{s-1} = j_{SR(A)}^s d_{SR(A)}^{s-1} = d_B^{s-1} j_{SR(A)}^{s-1} = d_B^{s-1} j_S^{s-1} = j_S^s d_S^{s-1}$, ce qui montre (puisque d_S^{s-1} est surjectif) que l'on a $j_S^s = e^0 \varepsilon_A$; on en conclut que (e^n) est un représentant de $e(S)$.

Soit maintenant T un élément de $\underset{\sim}{S}_t(A,A')$, A' étant un nouvel objet de $\mathcal{C}$. Choisissons des représentants $(j_{TR(A')}^n)$ de $j_{TR(A')}$ et $(j_{SR(A)}^n)$ de

$j_{SR(A)}$; il est alors clair que, si l'on pose $j^n = j^n_{SR(A)}$ pour $n \leqslant s-1$ et $j^n = j^n_{SR(A)} j^{n-s}_{TR(A')}$ pour $n \geqslant s$, la suite (j^n) est un représentant de la classe $j_{STR(A')}$. Il en résulte immédiatement que l'on a

$$e(ST) = (-1)^{st} e(S)e(T) \quad .$$

Soit maintenant f un morphisme de A dans un objet A' de la catégorie, et soit S' un élément de $\underset{\sim}{S}_s(B,A')$. Formons le produit $S'^{s-1} \times A$, et désignons par $\pi_{S'}$, π_A ses projections sur ses deux facteurs ; soit S^{s-1} le noyau du morphisme $d^{s-1}_{S'} \pi_{S'} - f\,\pi_A$ de $S'^{s-1} \times A$ dans A' et soit d^{s-1}_S le morphisme de S^{s-1} dans A induit par π_A . Ce morphisme est surjectif parce que $d^{s-1}_{S'}$ l'est. Si $s > 1$, nous poserons $S^n = S'^n$ si $n \neq s-1, s$, $S^s = A$, $\varepsilon_S = \varepsilon_{S'}$; le morphisme u de $S^{s-2} = S'^{s-2}$ dans $S'^{s-1} \times A$ tel que $\pi_{S'} u = d^{s-2}_{S'}$, $\pi_A u = 0$ a son image dans S^{s-1} et définit par suite un morphisme d^{s-2}_S de S^{s-2} dans S^{s-1} ; nous poserons $d^n_S = d^n_{S'}$ si $n < s-2$, $d^n_S = 0$ si $n \geqslant s$; on vérifie alors que $(\varepsilon_S, (S^n)) = S$ est un élément de $\underset{\sim}{S}_s(B,A)$; nous désignerons cet élément par $S'f$. Si $s = 1$, nous poserons $S^n = 0$ si $n \neq 0,1$, $S^1 = A$; nous désignerons par ε_S le morphisme de B dans S^0 induit par le morphisme u de B dans $S'^0 \times A$ tel que $\pi_{S'} u = \varepsilon_S$, $\pi_A u = 0$, et nous poserons $d^n_S = 0$ si $n < 0$ ou $n \geqslant 1$; ici encore $(\varepsilon_S, (S^n))$ est un élément de $\underset{\sim}{S}_1(B,A)$ que nous noterons $S'f$. Posons $f^s = f$; désignons par f^n le morphisme identique de S^n dans S'^n si $n \neq s-1, s$ et par f^{s-1} le morphisme de S^{s-1} dans S'^{s-1} induit par $\pi_{S'}$; (f^n) est alors un élément de $\mathrm{Hom}^0(S,S')$ et on a $f^s = f$, $f^0 \varepsilon_S = \varepsilon_{S'}$.

D'une manière générale, si $S \in \underset{\sim}{S}_s(B,A)$, $S' \in \underset{\sim}{S}_s(B',A')$, et si μ est un morphisme du complexe S dans le complexe S' , nous poserons $\mu_A = \mu^s \in \mathrm{Hom}(A,A')$ et nous désignerons par μ_B le morphisme de B dans B' tel que $\mu^0 \varepsilon_S = \varepsilon_{S'} \mu_B$; nous dirons que μ_B et μ_A sont les morphismes initial et terminal du morphisme μ . Nous identifierons dans ce qui suit les éléments de $\mathrm{Ext}^0(A,B)$ avec les éléments de $\mathrm{Hom}\,(A,B)$ qui leur correspondent par l'isomorphisme du corollaire au théorème 1 ; on a alors

$$\mu_B e(S) = e(S') \mu_A \quad .$$

Soit en effet h l'élément de $\underset{\sim}{H}^0(S,R(B'))$ dont l'image par l'isomorphisme du corollaire au théorème 1 est μ_B ; il est clair que $h = \mu_B j_S$ (μ_B étant considéré comme élément de $\mathrm{Ext}^0(B,B')$). Si donc (t_B^n) est un représentant de μ_B, et (j_S^n) un représentant de j_S, $(t_B^n j_S^n)$ est un représentant de h. Par ailleurs, $j_{S'}\mu$ est aussi un représentant de h ; si $(j_{S'}^n)$ est un représentant de $j_{S'}$, $(j_{S'}^n \mu^n)$ est un représentant de h. Comme les éléments $(t_B^n j_S^n)$ et $(j_{S'}^n \mu^n)$ de $\mathrm{Hom}^0(S,R(B'))$ sont homotopes et comme $S^{s+1} = 0$, les cycles $t_B^s j_S^s$ et $j_{S'}^s \mu^s = j_{S'}^s \mu_A$ de $\mathrm{Hom}\,(A,R^s(B'))$ sont dans la même classe de cohomologie ; or la classe de cohomologie du premier est l'image de $\mu_B e(S)$ par φ_B^s, alors que celle du second est l'image de $e(S')\mu_A$, ce qui démontre notre formule. Il en résulte que l'on a

$$e(S'f) = e(S')f$$

si $S' \in \underset{\sim}{S}_s(B,A')$, $f \in \mathrm{Hom}\,(A,A')$.

Si B est un objet quelconque de $\mathcal{C}$ et s un entier > 0, désignons par S_B^s l'image de d_B^{s-1} ; posons $S_B^n = R^n(B)$ si $n < s$, $S_B^n = 0$ si $n > s$; désignons par d_S^{s-1} le morphisme de $R^{s-1}(B)$ dans S_B^s défini par d_B^{s-1} ; posons $d_S^n = d_B^n$ si $n < s-1$, $d_S^n = 0$ si $n \geqslant s$; posons enfin $\varepsilon_S = \varepsilon_B$; on obtient ainsi un élément $S_B \in \underset{\sim}{S}_s(B,S_B^s)$. Soit h un cocycle quelconque de $\mathrm{Hom}(A,R^s(B))$; comme $H^s(R\,(B)) = 0$, h définit un morphisme $\bar{h}$ de A dans S_B^s ; il est clair que $e(S_B^s\bar{h})$ est l'élément de $\mathrm{Ext}^s(A,B)$ dont l'image par φ_B^s est la classe de cohomologie de h ; on en conclut que tout élément de $\mathrm{Ext}^s(A,B)$ peut se mettre sous la forme $e(S)$, avec un élément S convenable de $\underset{\sim}{S}_s(B,A)$.

Soient maintenant S un élément de $\underset{\sim}{S}_s(B,A)$ et g un morphisme de B dans un objet B'. Formons le produit $B' \times S^0$ de B' et de S^0, et désignons par $\pi_{B'}$ et π_S ses projections sur ses deux facteurs. Soit λ le morphisme de B dans $B' \times S^0$ tel que $\pi_{B'}\lambda = g$, $\pi_S\lambda = \varepsilon_B$, et soit S'^0 le conoyau de λ. Soit J le morphisme de B' dans $B' \times S^0$ tel que $\pi_{B'}J$ soit le morphisme identique de B' et $\pi_S J = 0$; désignant par ω le morphisme canonique de $B' \times S^0$ sur S'^0, nous poserons $\varepsilon_{S'} = \omega J$; ce morphisme de B' dans S'^0 est injectif comme il résulte tout de suite de ce que ε_B est injectif.

Par ailleurs, $d_S^0 \pi_S$ est un morphisme de $B' \times S^0$ dans S^1 dont le noyau contient l'image de λ ; il se met donc sous la forme $d_{S'}^0 \omega$, où $d_{S'}^0$ est un morphisme de S'^0 dans S^1 . Comme l'image de ε_S est le noyau de d_S^0 , on voit facilement que l'image de $\varepsilon_{S'}$ est le noyau de $d_{S'}^0$. Par ailleurs, l'image de $d_{S'}^0$ est évidemment la même que celle de d_S^0 ; c'est donc le noyau de d_S^1 . Nous poserons $S'^n = S^n$ si $n \neq 0$, $d_{S'}^{-1} = 0$, $d_{S'}^n = d_S^n$ si $n \neq -1,0$; $(\varepsilon_{S'},(S'^n))$ est alors un élément de $\underset{\sim}{S}_S(B',A)$, que nous désignerons par gS . Soit J_S le morphisme de S^0 dans $B' \times S^0$ tel que $\pi_{B'} J_S = 0$ et que $\pi_S J_S$ soit le morphisme identique de S^0 ; posons $g^0 = \omega J_S$ et , si $n \neq 0$, désignons par g^n le morphisme identique de S^n . Alors la suite (g^n) appartient à $\mathrm{Hom}^0(S,S')$, et on a $g^0 \varepsilon_S = \varepsilon_{S'} g$; il en résulte que l'on a

$$e(gS) = ge(S) .$$

Le foncteur $\mathrm{Ext}^s(A,B)$ est additif. Des propriétés des foncteurs additifs résulte que si $A,B,A',B' \in \mathcal{C}$ on peut identifier $\mathrm{Ext}^s(A \times A' , B \times B')$ au groupe

$$\mathrm{Ext}^s(A,B) \times \mathrm{Ext}^s(A',B) \times \mathrm{Ext}^s(A,B') \times \mathrm{Ext}^s(A',B')$$

Nous allons appliquer ceci dans le cas où $A = A'$, $B = B'$ pour déterminer l'élément $e(S) + e(S')$ quand S et S' sont des éléments de $\underset{\sim}{S}_S(B,A)$. Posons $S''_n = S_n \times S'_n$; désignons par π_n et π'_n les projections de S''_n sur ses deux facteurs ; soit $d_{S''}^n$ le morphisme de S''^n dans S''^{n+1} défini par les conditions $\pi_{n+1} d_{S''}^n = d_S^n \pi_n$, $\pi'_{n+1} d_{S''}^n = d_{S'}^n \pi'_n$; soient π_B et π'_B les projections de $B \times B$ sur ses deux facteurs et soit $\varepsilon_{S''}$ le morphisme de $B \times B$ dans S''^0 défini par les conditions $\pi_0 \varepsilon_{S''} = \varepsilon_S \pi_B$, $\pi'_0 \varepsilon_{S''} = \varepsilon_{S'} \pi'_B$; alors $(\varepsilon_{S''},(S''^n))$ est un élément S'' de $\underset{\sim}{S}_S(B \times B , A \times A)$ que nous désignerons par $S \times S'$. Désignons aussi par π_A , π'_A les projections de $A \times A$ sur ses deux facteurs, par J_A et J'_A (resp. J_B et J'_B) les deux injections canoniques de A (resp. B) dans $A \times A$ (resp. $B \times B$) , considéré comme somme directe de A (resp. B) avec lui-même. Posons $\delta_A = J_A + J'_A$, $\omega_B = \pi_B + \pi'_B$; ceci étant, on a

$$e(S) + e(S') = e((\omega_B(S \times S'))\, \delta_A) .$$

En effet, la considération du morphisme (π_n) de $S \times S'$ dans S fournit la relation $\pi_B e(S \times S') = e(S)\, \pi_A$, d'où, puisque $\pi_A J_A$ est l'identité,

$\pi_B e(S \times S')J_A = e(S)$; on voit de même que $\pi'_B e(S \times S')J'_A = e(S')$. Par ailleurs, on a $\pi_B e(S \times S')J'_A = 0$, $\pi'_B e(S \times S')J_A = 0$; on a donc $\omega_B e(S \times S')\delta_A =$ $= e(S) + e(S')$, ce qui démontre notre formule.

On peut exprimer de la manière suivante la condition pour que l'on ait $e(S) = s(S')$, S et S' étant des éléments de $\underset{\sim}{S}_s(B,A)$. Un morphisme d'un élément de $\underset{\sim}{S}_s(B,A)$ dans un autre objet de cette classe est appelé un quasi-isomorphisme si ses morphismes initial et terminal sont tous deux des morphismes identiques. Appelons voisins deux éléments S_1, S_2 de $\underset{\sim}{S}_s(B,A)$ si ou bien il existe un quasi-isomorphisme de S_1 dans S_2 ou bien il existe un quasi-isomorphisme de S_2 dans S_1 ; appelons quasi-isomorphes deux éléments qui peuvent être joints par une chaîne d'éléments de $\underset{\sim}{S}_s(B,A)$ dans laquelle chaque terme, sauf le dernier, est voisin du suivant. Il est clair que, si S et S' sont quasi- isomorphes, on a $e(S) = e(S')$. La réciproque est vraie. Supposons en effet que $e(S) = e(S')$; soit h un élément de Hom $(A, R^s(B))$ qui soit un représentant de la classe de cohomologie $\varphi^s_B(e(S))$; on voit alors facilement en s'appuyant sur les constructions faites ci-dessus qu'il existe des quasi-isomorphismes de S et de S' dans le complexe $S_B h$, ce qui montre que S et S' sont quasi-isomorphes.

La condition que nous venons d'obtenir pour que l'on ait $e(S) = e(S')$ peut se formuler sans faire appel à l'existence d'éléments injectifs dans la catégorie ; il en est de même des règles que nous avons données pour composer les éléments $e(S)$ soit entre eux soit avec les morphismes des objets de la catégorie, et de la définition que nous avons donnée de l'addition des $e(S)$. M. YONEDA a montré que l'on peut construire la théorie des groupes $\mathrm{Ext}^s(A, B)$ dans une catégorie abélienne qui contient des produits finis mais dans laquelle il n'est pas nécessairement vrai que tout objet puisse se plonger dans un injectif ; la seule différence est que les $\mathrm{Ext}^s(A, B)$ qu'il obtient ne sont pas nécessairement des ensembles ; mais toutes les règles formelles continuent à s'appliquer.

4.- <u>Le cas</u> $s = 1$.

Les éléments de $\mathrm{Ext}^1(A,B)$ sont les suites exactes de la forme $0 \longrightarrow B \longrightarrow S^0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$; si S, S' sont deux éléments de $\underset{\sim}{S}_1(B,A)$, et si μ est un quasi-isomorphisme de S dans S' , μ^0 est un isomorphisme de S^0 sur S'^0 comme il résulte tout de suite du lemme des 5 . Donc, une condition nécessaire et suffisante pour que deux suites exactes

$$0 \to B \to S^0 \to A \to 0$$
$$0 \to B \to S'^0 \to A' \to 0$$

définissent le même élément de $\mathrm{Ext}^1(A, B)$ est qu'il existe un isomorphisme de S^0 sur S'^0 qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & B & \to & S^0 & \to & A & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & B & \to & S'^0 & \to & A & \to & 0 \end{array}$$

(où les flèches verticales sous A et B sont les morphismes identiques de ces objets).

L'élément neutre de $\mathrm{Ext}^1(A, B)$ est représenté par la suite exacte

$$S_0 : \; 0 \to B \xrightarrow{J_B} A \times B \xrightarrow{\pi_A} A \to 0$$

où J_B est l'injection canonique de B dans $A \times B$, considéré comme somme directe de A et B, et π_A la projection de $A \times B$ sur A. Soit en effet (j_0^n) un représentant de j_{S_0} ; désignons par J_A l'injection canonique de A dans $A \times B$ et posons $k = j_0^0 J_A$; on a alors $d_B^0 k = j_0^1$, ce qui montre que j_0^1 est bord d'un élément de $\mathrm{Hom}\,(A, R^0(B))$, donc que $e(S_0) = 0$

5.- La suite exacte des Ext.

Soit A un objet de $\mathcal{C}$. Du fait que le foncteur $\mathrm{Ext}^s(A,*)$ est isomorphe au s-ième dérivé du foncteur $\mathrm{Hom}\,(A,*)$, à toute suite exacte

$$0 \to B_1 \xrightarrow{\beta_1} B_2 \xrightarrow{\beta_2} B_3 \to 0$$

il correspond une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ext}^0(A,B_1) \to \mathrm{Ext}^0(A,B_2) \to \mathrm{Ext}^0(A,B_3) \to \mathrm{Ext}^1(A,B_1)$$
$$\cdots \to \mathrm{Ext}^n(A,B_1) \xrightarrow{\beta_1^n} \mathrm{Ext}^n(A,B_2) \xrightarrow{\beta_2^n} \mathrm{Ext}^n(A,B_3) \xrightarrow{\partial^n} \mathrm{Ext}^{n+1}(A,B_1)$$

dans laquelle les homomorphismes β_1^n, β_2^n sont les transformés de β_1, β_2 par le foncteur $\mathrm{Ext}^n(A,*)$. On en conclut que

$$\beta_1^n(u) = \beta_1 u \qquad \beta_2^n(v) = \beta_2 v \quad .$$

Nous allons maintenant expliciter l'homomorphisme ∂^s.

Nous poserons $\varepsilon_i = \varepsilon_{B_i}$, $d_i^n = d_{B_i}^n$. Remontant aux définitions, il nous faut pour cela construire une résolution exacte et injective $R = (\varepsilon_R ; (R^n))$ de B_2 qui possède les propriétés suivantes : il y a des éléments $(f^n) \in \mathrm{Hom}^0(R(B_1), R)$ et $(g^n) \in \mathrm{Hom}^0(R, R(B_3))$ tels que l'on ait $f^0 \varepsilon_1 = \varepsilon_R \beta_1$, $g^0 \varepsilon_R = \varepsilon_3 \beta_2$ et que, pour tout n, la suite

$$0 \longrightarrow R^n(B_1) \xrightarrow{f^n} R^n \xrightarrow{g^n} R^n(B_3) \longrightarrow 0$$

soit une suite exacte décomposée. Ceci fait, partant d'un élément $u \in \mathrm{Ext}^s(A, B_3)$, on choisira un représentant $t \in \mathrm{Hom}\,(A, R^s(B_3))$ de la classe de cohomologie $\varphi_{B_3}^s(u)$; on choisira un élément t' de $\mathrm{Hom}\,(A, R^s)$ tel que $g^s t' = t$, d'où $g^{s+1} d_R^s t' = 0$; il y a donc un élément $t'' \in \mathrm{Hom}\,(A, R^{s+1}(B_1))$ tel que l'on ait $f^{s+1} t'' = d_R^s t'$, et, comme f^{s+2} est un monomorphisme, on a $d_{B_1}^{s+1} t'' = 0$. L'élément $\partial^s(u)$ est alors l'élément de $\mathrm{Ext}^{s+1}(A, B_1)$ dont l'image par $\varphi_{B_1}^{s+1}$ est la classe de cohomologie de t'' .

Pour construire une résolution R possédant les propriétés voulues, nous procèderons comme suit. Nous poserons $R^n = R^n(B_1) \times R^n(B_3)$; nous désignerons par g^n la projection de R^n sur $R^n(B_3)$, par f^n et h^n les injections canoniques de $R^n(B_1)$ et $R^n(B_3)$ dans R^n . Il nous faut maintenant définir l'opérateur différentiel d_R de R et son augmentation. Nous choisirons un représentant (j^n) de $j_{SR(B_3)}$, où S est la suite exacte

$$0 \longrightarrow B_1 \longrightarrow B_2 \longrightarrow B_3 \longrightarrow 0 \quad ,$$

et nous poserons $\theta^n = (-1)^n j^{n+1}$ $(n \geqslant 0)$; on a donc $(\theta^n) \in \mathrm{Hom}^1(R(B_3), R(B_1))$ et (θ^n) est un représentant de $e(S)$.

Nous définirons l'opérateur d_R^n par les conditions

$$d_R^n f^n = f^{n+1} d_1^n \qquad\qquad d_R^n h^n = h^{n+1} d_3^n - f^{n+1} \theta^n \quad ;$$

nous définirons l'augmentation ε_R par la formule

$$\varepsilon_R = f^0 j^0 + h^0 \varepsilon_3 \beta_2 \quad ;$$

on s'assure alors facilement que toutes nos conditions sont satisfaites. Ceci étant, utilisons les mêmes notations que plus haut. On peut prendre $t' = h^s t$, d'où $d_R^s t' = h^{s+1} d_3^s t - f^{s+1} \theta^s t = -f^{s+1} \theta^s t$; on peut donc prendre $t'' = -\theta^s t$. Il en résulte immédiatement que l'on a

$$(*) \qquad \partial^s(u) = -e(S)u \ .$$

Les opérateurs β_1^n, β_2^n, ∂^n étant définis par les formules

$$\beta_1^n(u) = \beta_1 u \qquad \beta_2^n(v) = \beta_2 v \qquad \partial^n(w) = -e(S)w \ ,$$

on peut démontrer l'exactitude de la suite des Ext sans faire appel à l'existence d'objets injectifs dans la catégorie ; nous nous contenterons de rapides indications sur la méthode de démonstration. On montre d'abord que $\beta_2 \beta_1 = 0$, $e(S)\beta_2 = 0$, $\beta_1 e(S) = 0$ au moyen de la description explicite des éléments des $\mathrm{Ext}^1(A,B)$ donnée au n° 4. On montre ensuite que, si e est un élément de $\mathrm{Ext}^s(A,B_1)$ (resp. $\mathrm{Ext}^s(A,B_2)$, $\mathrm{Ext}^s(A,B_3)$) $(s>0)$ tel que $\beta_1 e = 0$ (resp. $\beta_2 e = 0$, $e(S)e = 0$) , on peut mettre e sous la forme $e'e''$, où $e'' \in \mathrm{Ext}^1(A,X)$ (X étant un objet convenable de $\mathcal{C}$) et où e' est un élément de $\mathrm{Ext}^{s-1}(X,B_1)$ (resp. $\mathrm{Ext}^{s-1}(X,B_2)$, $\mathrm{Ext}^{s-1}(X,B_3)$) tel que $\beta_1 e' = 0$ (resp. $\beta_2 e' = 0$, $e(S)e' = 0$). La démonstration est basée sur le lemme suivant: considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[d, "h"] & \\
 & U_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "f_2"] & U_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & 0 \\
V_1 \arrow[r, "v_1"] & V_2 \arrow[r, "v_2"] & V_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les deux dernières lignes sont des suites exactes ; supposons qu'il existe un morphisme $k : A \to V_2$ tel que $f_3 h = v_2 k$. On peut alors construire un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "x"] \arrow[dd, "k'"'] & T \arrow[r, "t"] \arrow[d, "z"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
 & & U_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "f_2"'] & U_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
 & V_1 \arrow[r, "v_1"] & V_2 \arrow[r, "v_2"] & V_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel la première ligne est une suite exacte. [Pour ce faire, on construit le produit $V_1 \times U_2 \times A$, dont on désigne par π_V , π_U , π_A les projections; on prend pour T l'intersection des noyaux des morphismes $u_2\pi_U - h\pi_A$ et $k\pi_A + v_1\pi_V - f_2\pi_U$.] Procédant par récurrence sur s , on se ramène alors à démontrer l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(A,B_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(A,B_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,B_3) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A,B_1)$$

ce qui est facile au moyen de la description donnée au n° 4 des éléments de $\mathrm{Ext}^1(A,B_1)$.

Signalons enfin que, si on a une suite exacte

$$S_0 \;:\; 0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow 0$$

on a une suite exacte infinie

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(A_3,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(A_2,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(A_1,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A_3,B)$$
$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n(A_3,B) \xrightarrow{\alpha_2^n} \mathrm{Ext}^n(A_2,B) \xrightarrow{\alpha_1^n} \mathrm{Ext}^n(A_1,B) \xrightarrow{\partial^n} \mathrm{Ext}^{n+1}(A_3,B)$$

dans laquelle les homomorphismes sont définis par

$$\alpha_2^n(u) = u\alpha_2 \quad ; \quad \alpha_1^n(v) = v\alpha_1 \quad ; \quad \partial^n(w) = we(S_0) .$$