A. Andreotti

Généralités sur les catégories abéliennes (suite)

Séminaire A. Grothendieck, tome 1 (1957), exp. n° 2, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SG_1957__1__A2_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire A. GROTHENDIECK
(ALGÈBRE HOMOLOGIQUE)

Année 1956/57

-:-:-:-

Exposé n° 2

GÉNÉRALITÉS SUR LES CATÉGORIES ABÉLIENNES (Suite)

(Exposé rédigé par A. ANDREOTTI)

7.- Catégories additives.

DÉFINITION 1.- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie dans laquelle on s'est donné sur l'ensemble Hom (A , B) , pour tout A , B $\in \mathcal{C}$, une loi de groupe abélien de telle sorte que la loi de composition des morphismes soit bilinéaire. Supposons que dans $\mathcal{C}$ il y ait un objet A tel que $1_A = 0$ (objet nul). On dit alors que $\mathcal{C}$ est une catégorie préadditive. On dit que $\mathcal{C}$ est une catégorie additive si de plus l'axiome suivant est satisfait.

AB 0.- Pour tout A , B $\in \mathcal{C}$ la somme et le produit direct de A et B existent.

PROPOSITION 1.- Soient A , B , C trois objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ préadditive, soient $i_A : A \longrightarrow C$, $i_B : B \longrightarrow C$ deux morphismes de A , B respectivement dans C . La condition nécessaire et suffisante pour que C soit la somme directe de (A , i_A) et (B , i_B) est qu'il existe deux morphismes $p_A : C \longrightarrow A$, $p_B : C \longrightarrow B$ tels que

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} p_A\, i_A = 1_A & p_A\, i_B = 0_{BA} \\ p_B\, i_A = 0_{AB} & p_B\, i_B = 1_B \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \qquad i_A\, p_A + i_B\, p_B = 1_C$$

Soit $C = A \amalg B$, alors pour tout $X \in \mathcal{C}$ on a une bijection Hom (C , H) $\longrightarrow$ Hom (A , X) $\times$ Hom (B , X) (qui associe à tout $u : C \longrightarrow X$ le couple de morphismes $u\, i_A$, $u\, i_B$) . Donc pour X = A il existe un morphisme unique $p_A : C \longrightarrow A$ de composantes 1_A , 0_{BA} , donc satisfaisant $p_A\, i_A = 1_A$, $p_A\, i_B = 0_{BA}$. De même on déduit l'existence d'un morphisme unique $p_B : C \longrightarrow B$ tel que $p_B\, i_A = 0_{AB}$ $p_B\, i_B = 1_B$. Or ces morphismes p_A , p_B vérifient (ii) . En effet les composantes de 1_C sont i_A , i_B ; celles de

$i_A\,p_A + i_B\,p_B$ sont aussi i_A, i_B à cause des conditions (i) . Réciproquement s'il existe p_A, p_B vérifiant (i), (ii), alors $C = A \amalg B$. Il faut montrer que pour tout $X \in \mathcal{C}$ l'application $\alpha : \mathrm{Hom}\,(C\,,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A\,,X) \times \mathrm{Hom}(B\,,X)$ est une bijection ; or, l'application $\beta : \mathrm{Hom}\,(A\,,X) \times \mathrm{Hom}\,(B\,,X) \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathrm{Hom}\,(C\,,X)$ qui associe au couple de morphismes $u : A \longrightarrow X$, $v : B \longrightarrow X$ le morphisme $u\,p_A + v\,p_B : C \longrightarrow X$, est inverse de α .

En effet, soit $u : C \longrightarrow X$, on a $\alpha(u) = (u\,i_A\,,u\,i_B)$ donc

$$\beta(\alpha(u)) = u\,i_A\,p_A + u\,i_B\,p_B = u(i_A\,p_A + i_B\,p_B) = u \qquad \text{à cause de (ii)} .$$

De même un couple $u : A \longrightarrow X$, $v : B \longrightarrow X$ de morphismes en X est changé par β en le morphisme $u\,p_A + v\,p_B$ et par $\alpha\beta$ en le couple

$$((u\,p_A + v\,p_B)\,i_A\,,\ (u\,p_A + v\,p_B)\,i_B) = (u\,,v) \qquad \text{à cause des (i)} .$$

<u>REMARQUE</u>.- Par dualité ou titre de la proposition 1 une condition nécessaire et suffisante pour que C soit produit direct de $(p_A\,,A)$ $(p_B\,,B)$: les conditions (i) et (ii) sont les mêmes.

<u>COROLLAIRE</u>.- <u>Si</u> $\mathcal{C}$ <u>est une catégorie préadditive et si</u> $A\,,B \in \mathcal{C}$ <u>sont tels que la somme</u> $A \amalg B$ <u>existe, le produit</u> $A \sqcap B$ <u>existe aussi et il est canoniquement isomorphe à</u> $A \amalg B$; <u>et dualement en permutant les rôles de</u> $\sqcap$, $\amalg$.

En effet, d'après la remarque, si (i) et (ii) sont satisfaites, C est à la fois somme directe de $(A\,,i_A)$, $(B\,,i_B)$ et produit direct de $(p_A\,,A)$, $(p_B\,,B)$.

<u>REMARQUE</u>.- Soit $C = A \amalg B$ avec les injections canoniques i_A, i_B : soit $C' = A \sqcap B$ avec les projections canoniques p'_A, p'_B . L'isomorphisme canonique $C' \longrightarrow C$ est donné par le morphisme $i_A\,p'_A + i_B\,p'_B$.

En effet des relations (i) (ii) pour C et des analogues pour C' on tire que $i'_A\,p_A + i'_B\,p_B$ est le morphisme inverse.

Dans une catégorie préadditive $\mathcal{C}$ le caractère injectif, surjectif, bijectif d'un morphisme $u : A \longrightarrow B$ s'exprime par l'exactitude respective, pour tout $X \in \mathcal{C}$ des suites

$$\left.\begin{array}{lr} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(X\,,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(X\,,B) & \text{(injectif)} \\ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(B\,,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(A\,,X) & \text{(surjectif)} \end{array}\right\} \text{(bijectif)}$$

PROPOSITION 2.- Dans une catégorie préadditive $\mathcal{C}$ un isomorphisme $u : A \longrightarrow B$ est caractérisé par l'une quelconque des propriétés

a) pour tout $X \in \mathcal{C}$ $\mathrm{Hom}(X, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, B)$ est un isomorphisme
b) pour tout $X \in \mathcal{C}$ $\mathrm{Hom}(B, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, X)$ est un isomorphisme.

Si u est un isomorphisme l'existence de l'inverse (à gauche et à droite) implique a) et b) . a) implique que u est un isomorphisme. En effet faisant $X = B$ on voit qu'il existe un morphisme $v : B \longrightarrow A$ tel que $uv = 1_B$. Il faut montrer que l'on a aussi $vu = 1_A$. Or $uvu = 1_B u$ donc $u(vu) = u\, 1_A$. Mais de a) on tire que u est injectif, d'où $vu = 1_A$.

Par un raisonnement analogue on trouve que b) implique que u est un isomorphisme.

REMARQUE.- La proposition est valable pour une catégorie $\mathcal{C}$ quelconque l'isomorphisme des Hom étant entendu au sens ensembliste de bijection.

8.- Noyau, conoyau, image, coimage d'un morphisme.

Dans ce qui suit on suppose toujours que $\mathcal{C}$ est une catégorie préadditive.

DÉFINITION 2.- Soient $K \xrightarrow{i} A \xrightarrow{u} B$ deux morphismes. On dit que i est un noyau de u , si pour tout $X \in \mathcal{C}$ la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, B)$$

est exacte.

Ceci signifie que i est injectif et que les morphismes $X \longrightarrow A$ "annulés par u " sont exactement ceux qui se"factorisent à travers K " .

Deux noyaux de u sont isomorphes (car chacun mojore l'autre) donc parmi eux il y a exactement un sous-truc de A désigné par Ker u . Comme il est d'usage pour les sous-trucs, un noyau $i : K \longrightarrow A$ sera couramment identifié à l'objet $K \in \mathcal{C}$ "muni" du morphisme i (l'injection canonique).

Dualement, si pour les morphismes $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{j} L$, quel que soit $X \in \mathcal{C}$, la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(L, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, X)$$

est exacte, on dit que j est un conoyau de u . Cela signifie que j est surjectif et que les morphismes $B \longrightarrow X$ "annulant u" sont ceux qui se "factorisent à travers L " . Deux conoyaux de u sont isomorphes ; parmi eux il y a exactement un truc quotient désigné par Coker u .

En général, il n'est pas vrai que quel que soit le morphisme u, Ker u et Coker u existent.

Soit $A \xrightarrow{u} B$ un morphisme dans $\mathcal{C}$,

on peut considérer, s'il existe, le Coker u (quotient de B), le Ker (Coker u) (sous-truc de B), s'il existe. Par définition on pose

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Coker}\, u)$$

on peut considérer, s'il existe, le Ker u (sous-truc de A), le Coker(Ker u) (quotient de A), s'il existe. Par définition on pose

$$\mathrm{Coim}\, u = \mathrm{Coker}\,(\mathrm{Ker}\, u)$$

9.- Factorisation canonique d'un morphisme.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie préadditive. Rappelons qu'on a supposé l'existence, dans $\mathcal{C}$, d'un objet A nul, c'est-à-dire tel que $1_A = 0$. On a la proposition suivante :

PROPOSITION 3.- Pour un objet $A \in \mathcal{C}$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est un objet nul, i.e. $1_A = 0$
2) $\mathrm{Hom}\,(A, A) = 0$
3) pour tout $X \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}\,(A, X) = 0$
4) pour tout $X \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}\,(X, A) = 0$.

1.$\Longrightarrow$3. En effet pour tout $v \in \mathrm{Hom}\,(X, A)$ on a $1_A v = v$ donc $v = 0$. De même 1.$\Longrightarrow$4. En faisant $X = A$, on voit que 3.$\Longrightarrow$2 et que 4.$\Longrightarrow$2. Mais 2.$\Longrightarrow$1.

L'existence d'un objet nul ne résulte pas des autres axiomes d'une catégorie préadditive (Exemple : la catégorie des groupes abéliens non nuls !). En tous cas étant deux objets nuls A, B il existe un isomorphisme unique de A sur B (à savoir l'unique morphisme $A \longrightarrow B$), aussi on désignera tous les objets nuls par le même symbole 0.

PROPOSITION 4.- Soit $A \xrightarrow{u} B$ un morphisme dans $\mathcal{C}$.

a) pour que u soit injectif, il faut et il suffit que $\mathrm{Ker}\, u = 0$.

b) pour que u soit injectif, il faut et il suffit que $\mathrm{Coim}\, u = A$.

a) pour que u soit surjectif, il faut et il suffit que $\mathrm{Coker}\, u = 0$.

b) pour que u soit surjectif, il faut et il suffit que $\mathrm{Im}\, u = B$.

N.B.- L'écriture Coim $u = A$ ($\mathrm{Im}\, u = B$) est une façon abrégée d'écrire que $A \longrightarrow \mathrm{Coim}\, u$ ($\mathrm{Im}\, u \longrightarrow B$) est un isomorphisme.

Les deux énoncés étant duaux, il suffit de démontrer l'énoncé de gauche.
a) résulte de la définition du $\mathrm{Ker}\, u$ et de la condition 4 de la proposition 3.
b) compte tenue de a), on est ramené à montrer que si $i : K \longrightarrow A$ est un morphisme, alors $i = 0$ équivaut à $\mathrm{Coker}\, i = A$. Or, si $i = 0$, l'application identique $1_A : A \longrightarrow A$ satisfait bien à la condition de la définition d'un conoyau, et réciproquement, s'il en est ainsi, on a $1_A\, i = 0$, d'où $i = 0$.

<u>PROPOSITION 5</u>.- Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme dans la catégorie préadditive $\mathcal{C}$ tel que $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Coim}\, u$ existent. Alors on peut factoriser u de la façon suivante

$$u : A \longrightarrow \mathrm{Coim}\, u \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Im}\, u \longrightarrow B$$

où les morphismes aux extrémités sont les morphismes canoniques et où $\bar{u}$ est un morphisme uniquement déterminé.

En effet de la situation

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\, u \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "u"] & \mathrm{Coim}\, u \\ \mathrm{Im}\, u \arrow[r, "i'"] & B \arrow[r, "j"] & \mathrm{Coker}\, u \end{tikzcd}$$

et de $u\, i = 0$ on conclut que u se factorise à travers $\mathrm{Coim}\, u = \mathrm{Coker}\, i$ de manière unique $u : A \xrightarrow{j'} \mathrm{Coim}\, u \xrightarrow{v} B$. D'autre part $j\,u = 0$ c'est-à-dire $j(v\,j') = 0$ d'où, comme j' est un épimorphisme $j\,v = 0$. Comme $i' = \mathrm{Ker}\, j$, v se factorise de manière unique en $\mathrm{Coim}\, u \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Im}\, u \xrightarrow{i'} B$. D'où $u = i'\,\bar{u}\,j'$.

De plus $\bar{u}$ est univoquement déterminé par u car de $i'\bar{u}\,j' = i'\bar{\bar{u}}\,j'$ on tire $i'\bar{u} = i'\bar{\bar{u}}$ (car j est surjectif) et $\bar{u} = \bar{\bar{u}}$ (car i est injectif).

<u>REMARQUE</u>.- De tout morphisme $u : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{C}$, si $\mathrm{Ker}\, u$, $\mathrm{Coker}\, u$, $\mathrm{Im}\, u$ existent, on tire la suite de morphismes :

$$\mathrm{Ker}\, u \longrightarrow A \longrightarrow \mathrm{Coim}\, u \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Im}\, u \longrightarrow B \longrightarrow \mathrm{Coker}\, u$$

De plus si on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v_A"'] & B \arrow[d, "v_B"] \\ A' \arrow[r, "u'"] & B' \end{tikzcd}$$

(sous condition d'existence des Ker u , Coim u , Im u , Coker u et de même pour u') ce diagramme se prolonge de façon canonique en le ~~diagramme commutatif~~

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathrm{Ker}\,u & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{j} & \mathrm{Coim}\,u & \xrightarrow{\bar{u}} & \mathrm{Im}\,u & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Coker}\,u \\
\downarrow{\scriptstyle v_K} & & \downarrow{\scriptstyle v_A} & & \downarrow{\scriptstyle v_C} & & \downarrow{\scriptstyle v_I} & & \downarrow{\scriptstyle v_B} & & \downarrow{\scriptstyle v_L} \\
\mathrm{Ker}\,u' & \xrightarrow{i'} & A' & \xrightarrow{j'} & \mathrm{Coim}\,u' & \xrightarrow{\bar{u}'} & \mathrm{Im}\,u' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & \mathrm{Coker}\,u'
\end{array}$$

En effet de $v_B u = u'v_A$ on tire $u'(v_A i) = v_B u i = 0$. D'où le fait que $v_A i$ se factorise, de manière unique, à travers Ker u' : $v_A i = i'v_K$. De même $(j'v_A)i = j'i'v_K = 0$, donc $j'v_A$ se factorise, de manière unique, à travers Coim u : $j'v_A = v_C j$.

Dualement on prouve l'existence des morphismes uniques v_L , v_I tels que $v_L \beta = \beta' v_B$, $v_B \alpha = \alpha' v_I$.

La commutativité du diagramme qu'on obtient en résulte déjà pour les 4 "carrés" extrêmes. Pour celui du centre on remarque que de $v_B u = u' v_A$ on tire successivement $v_B \alpha \bar{u} j = (\alpha' \bar{u}')(j'v_A)$, $v_B \alpha \bar{u} j = \alpha' \bar{u}' v_C j$ d'où $v_B \alpha \bar{u} = \alpha' \bar{u}' v_C$ (car j est surjectif) et encore $\alpha' v_I \bar{u} = \alpha' \bar{u}' v_C$ d'où $v_I \bar{u} = \bar{u}' v_C$ (car α' est injectif) .

Ce qu'on vient de dire peut s'exprimer ainsi en disant que la factorisation canonique d'un morphisme est "fonctorielle" (voir le numéro sur les catégories de diagrammes).

10.- Foncteurs additifs.-

DÉFINITION 3.- Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, deux catégories additives : un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est dit additif si pour tout couple de morphismes $u , v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A , B)$ on a $F(u + v) = F(u) + F(v)$.

Le composé de foncteurs additifs est additif.

PROPOSITION 6.- Si le foncteur F est additif et si $A = A_1 \amalg A_2$, on a $F(A) \simeq F(A_1) \amalg F(A_2)$.

En effet si i_{A_1} , i_{A_2} sont les injections canoniques de A_1 , A_2 dans A , on a un système de morphismes $A_1 \xrightarrow{i_{A_1}} A \xrightarrow{p_{A_1}} A_1$, $A_2 \xrightarrow{i_{A_2}} A \xrightarrow{p_{A_2}} A_2$ satisfaisant aux conditions (i) (ii) de la proposition 1. En transformant par F , on trouve, à cause de l'additivité de F , un système analogue qui caractérise $F(A)$ comme somme directe de $F(A_1)$ et $F(A_2)$ par les injections canoniques $F(i_{A_1})$, $F(i_{A_2})$.

11.- Catégories abéliennes.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, $u : A \longrightarrow B$ un morphisme dans $\mathcal{C}$, il peut arriver que u ne possède pas de noyau ni de conoyau dans $\mathcal{C}$.

EXEMPLE.- Prenons pour objets de $\mathcal{C}$ une partie des objets de la catégorie $\mathcal{G}$ des groupes abéliens, les morphismes étant ceux qu'on a pour les mêmes objets dans $\mathcal{G}$. Nonobstant que $\mathcal{G}$ soit additive et tout morphisme admette noyau et conoyau, $\mathcal{C}$ en général ne sera pas préadditive (car ne contiendra pas d'objets nuls), et si préadditive ne sera pas en général additive (prendre les groupes de rang $\leqslant 1$), et si additive il n'y aura pas en général le noyau et le conoyau d'un morphisme quelconque (prendre 0 et les groupes de rang $\geqslant 2$).

Supposons que $\mathcal{C}$ soit préadditive et que u admette une image et une coimage ; on a vu que u se factorise de manière canonique en $A \longrightarrow \mathrm{Coim}\, u \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Im}\, u \longrightarrow B$. Il peut arriver que $\bar{u}$ ne soit pas un isomorphisme.

EXEMPLE.- Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des groupes algébriques commutatifs sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$, les morphismes étant les morphismes rationnels. Il y existe des bijections qui ne sont pas des isomorphismes à cause des phénomènes d'inséparabilité. On pose la définition suivante :

DEFINITION 4.- Une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ est une catégorie additive (voir définition 1 n° 7) satisfaisant aux deux axiomes (autoduals).

AB 1.- tout morphisme dans $\mathcal{C}$ admet un noyau et un conoyau.

AB 2.- pour tout morphisme u le morphisme canonique (Cf. proposition 5)

$$\bar{u} : \mathrm{Coim}\, u \longrightarrow \mathrm{Im}\, u$$

est un isomorphisme.

AB 2 équivaut à la conjonction des deux axiomes :

AB 2a.- Pour tout $u \in \mathrm{Hom}(A , B)$, $\bar{u}$. $\mathrm{Coim}\, u \longrightarrow \mathrm{Im}\, u$ est bijectif.

AB 2b.- Toute bijection est un isomorphisme.

Pour vérifier que AB 2b résulte de AB 2 , il suffit de noter que si $u : A \longrightarrow B$ est une bijection, alors $\bar{u} : \mathrm{Coim}\, u \longrightarrow \mathrm{Im}\, u$ s'identifie à u (proposition 4, b).

REMARQUE.- Dans des cas assez nombreux, AB 1 et AB 2a sont vérifiés, mais non AB 2b. On a déjà vu l'exemple des groupes algébriques. Un autre exemple est donné par les espaces vectoriels topologiques séparés sur un corps topologique donné, les morphismes étant les homomorphismes continus. En effet pour tout morphisme $u : E \longrightarrow F$ le noyau est le noyau usuel, le conoyau est le quotient de F par l'adhérence $u(E)$ de l'image (au sens usuel) $u(E)$ de E, d'où l'existence de bijections qui ne sont pas des isomorphismes.

Un autre exemple est donné par les espaces fibrés vectoriels holomorphes sur une variété analytique complexe X donnée, les morphismes étant les homomorphismes holomorphes. Si X est de dimension complexe 1, on constate que les axiomes AB 1 et AB 2a sont vérifiés. Mais il existe des morphismes bijectifs qui ne sont pas des isomorphismes. Par exemple pour $A = B =$ fibré trivial de fibre $\mathbb{C}$ un morphisme $u : A \longrightarrow B$ est donné par une fonction holomorphe f sur X, et u est une bijection (resp. un isomorphisme) si et seulement si f n'est pas identiquement nulle (resp. si $f(x)$ est $\neq 0$ en tout point de X).

PROPOSITION 7.- Si $\mathcal{C}$ est une catégorie préadditive vérifiant AB 1, on a pour tout couple de morphismes consécutifs $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ les majorations :

$\operatorname{Ker} vu > \operatorname{Ker} u$, et égalité si v est injectif	$\operatorname{Coker} vu > \operatorname{Coker} v$, et égalité si u est surjectif

Démontrons l'énoncé de gauche. On a la situation :

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} vu \arrow[r, "i'"] & A \arrow[r, "u"] & B \arrow[r, "v"] & C \\ & \operatorname{Ker} u \arrow[u, "i"'] & & \end{tikzcd}$$

Comme $ui = 0$, on a $vui = 0$, donc i se factorise à travers $\operatorname{Ker} vu$ donc $\operatorname{Ker} vu > \operatorname{Ker} u$. Si v est injectif de $vui' = 0$ on tire $ui' = 0$, donc i' se factorise à travers $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} u > \operatorname{Ker} vu$.

COROLLAIRE.- $\operatorname{Coim} vu < \operatorname{Coim} u$ et on a égalité si v est injectif
$\operatorname{Im} vu < \operatorname{Im} u$ et on a égalité si u est surjectif.

Prouvons la première relation. En vertu de la proposition, on a

$$i : \operatorname{Ker} u \xrightarrow{w} \operatorname{Ker} vu \xrightarrow{i'} A$$

où w est bijectif si v est injectif. En appliquant la seconde partie de la proposition on tire $\operatorname{Coker} i < \operatorname{Coker} i'$ et égalité si w est surjectif, donc si v est injectif. Cela prouve la relation envisagée car $\operatorname{Coker} i = \operatorname{Coim} u$, $\operatorname{Coker} i = \operatorname{Coim} vu$.

PROPOSITION 8.- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne, $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ deux morphismes consécutifs dans $\mathcal{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $vu = 0$
2. $\operatorname{Im} u \prec \operatorname{Ker} v$
3. $\operatorname{Coim} v \prec \operatorname{Coker} u$

Par factorisation canonique de u, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] & \operatorname{Coim} u \arrow[r, "\bar{u}"] & \operatorname{Im} u \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "v"] & C \\ & & & \operatorname{Ker} v \arrow[u, "i'"'] & \end{tikzcd}$$

$vu = 0$ signifie $vi\bar{u}j = 0$, comme j est surjectif, cela équivaut à $vi\bar{u} = 0$, donc, comme $\bar{u}$ est surjectif, à $vi = 0$. Donc par définition de $\operatorname{Ker} v$, cela signifie que i se factorise à travers $\operatorname{Ker} v$, i.e., $\operatorname{Im} u \prec \operatorname{Ker} v$. Donc $1. \Longrightarrow 2$. Finalement 3 est dual de 2.

REMARQUE.- Dans la proposition 8 on utilise seulement le fait que le morphisme $\operatorname{Coim} u \longrightarrow \operatorname{Im} u$ est bijectif.

12.- Deuxième principe de dualité pour les catégories abéliennes.

Dans le numéro précédent, on a utilisé une forme faible de l'axiome AB 2 à savoir le fait que $\bar{u} : \operatorname{Coim} u \longrightarrow \operatorname{Im} u$ est une bijection. On va exploiter dans ce qui suit, l'hypothèse que $\bar{u}$ est un isomorphisme.

PROPOSITION 9.- *Dans une catégorie abélienne,*

si $i : A' \longrightarrow A$ *est une injection canonique, alors* $i = \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} i) = \operatorname{Im} i$	*si* $j : A \longrightarrow A''$ *est une surjection canonique, alors* $j = \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} j) = \operatorname{Coim} j$

Considérons la factorisation canonique de i

$$i : A' \longrightarrow \operatorname{Coim} i \xrightarrow{\bar{i}} \operatorname{Im} i \longrightarrow A$$

et remarquons que $\operatorname{Coim} i = A'$ (proposition 4). Par AB 2, $\bar{i}$ est un isomorphisme, donc $A' \longrightarrow \operatorname{Im} i$ est un isomorphisme. Dire que i est canonique signifie que i est un sous-truc de A donc on a identité entre i et $\operatorname{Im} i$.

COROLLAIRE 1.- (SCHOLIE) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie additive satisfaisant AB 1 et AB 2 , A un objet de $\mathcal{C}$.

Pour un sous-truc (A', i) et un quotient (j, A'') de l'objet A , les relations $j = \mathrm{Coker}\ i$ et $i = \mathrm{Ker}\ j$ sont équivalentes et établissent une correspondance biunivoque entre la classe des sous-trucs de A et celle des trucs quotient de A . Cette correspondance renverse le sens de la relation d'ordre des sous-trucs et des trucs quotients.

En effet de la proposition 9 on tire que $j = \mathrm{Coker}\ i \Longleftrightarrow i = \mathrm{Ker}\ j$ d'où la biunivocité de la correspondance. Qu'elle renverse la relation d'ordre découle de la proposition 7.

Dans une catégorie abélienne, si A' est un sous-truc de A on note par A/A' le truc quotient correspondant. Si A'' est un quotient de A on note par $A \setminus A''$ le sous-truc correspondant.

13.- Images directes et inverses.

Dans les numéros qui suivent $\mathcal{C}$ est une catégorie préadditive satisfaisant AB 1 et AB 2 , mais non nécessairement AB 0. (D'ailleurs dans les deux numéros précédents on n'a jamais fait usage de l'axiome AB 0.)

Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme dans $\mathcal{C}$.

Envisageons un sous-truc $i : A' \longrightarrow A$ et un truc quotient $j : A \longrightarrow A''$, de A qui se correspondent (donc $j = \mathrm{Coker}\ i$ et $i = \mathrm{Ker}\ j$ Cf. proposition 10, Corollaire 1).

Envisageons un truc quotient $j : B \longrightarrow B''$ et un sous-truc $i : B' \longrightarrow B$, de B qui se correspondent (donc $i = \mathrm{Ker}\ j$ et $j = \mathrm{Coker}\ i$) .

On appelle image directe de A' par u , $u(A')$, le sous-truc de B : $\mathrm{Im}\ (ui)$.

On appelle image directe de A'' par u , $u(A'')$, le truc quotient de B : $\mathrm{Coker}(ui)$

On appelle image inverse de B'' par u , $u^{-1}(B'')$, le quotient de A : $\mathrm{Coim}\ (ju)$.

On appelle image inverse de B' par u , $u^{-1}(B')$, le sous-truc de A : $\mathrm{Ker}\ (ju)$

On peut considérer 0 comme sous-truc de A (par l'injection nulle) et A comme quotient de A par la sujection 1_A . Comme 1_A est injectif $\mathrm{Ker}\ 1_A = 0$, 0 et A sont un sous-truc et un truc quotient de A correspondants. Et dualement, on peut considérer A et 0 comme un sous-truc et un truc quotient correspondants de A .

PROPOSITION 10.- Avec les notations ci-dessus, on a :

1.	$u(0) = 0$, $u(A) = \mathrm{Im}\, u$	$u^{-1}(B) = A$, $u^{-1}(0) = \mathrm{Ker}\, u$
2.	$u(A')$ croît avec A'	$u^{-1}(B'')$ croît avec B''
	$u(A'')$ croît avec A''	$u^{-1}(B')$ croît avec B'
3.	$u^{-1}(u(A')) \succ A'$	$u(u^{-1}(B'')) \prec B''$
	$u^{-1}(u(A'')) \prec A''$	$u(u^{-1}(B')) \succ B'$

1\. découle immédiatement des définitions. 2. est une conséquence de la proposition 7 et du corollaire relatif. Quant à 3. il suffit de prouver le premier des énoncés, les autres s'en déduisant par dualité. Or soit w la surjection naturelle $B \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(ui)$ où i est l'injection $A' \longrightarrow A$. Des définitions on tire $u(A') = \mathrm{Im}\,(ui)$ et $\mathrm{Im}\,(ui)$ par définition de Im est un sous-truc de B correspondant au quotient $\mathrm{Coker}\,(ui)$ (Proposition 9 corollaire 1) . Donc $u^{-1}(u(A')) = \mathrm{Ker}\,(wu)$. Comme $w(ui) = 0$ i.e. $(wu)i = 0$, i se factorise à travers $\mathrm{Ker}\,(wu)$, d'où $u^{-1}(u(A')) \succ A'$.

PROPOSITION 11.- Avec les mêmes notations le morphisme naturel

$u' : A' \longrightarrow u(A')$ est surjectif | $u' : u^{-1}(B'') \longrightarrow B''$ est injectif.

La factorisation canonique de ui donne

$$A' \longrightarrow \mathrm{Coim}\,(ui) \xrightarrow{\overline{ui}} u(A') \longrightarrow B$$

Or $A' \longrightarrow \mathrm{Coim}\,(ui)$ est surjectif, $\overline{ui}$ est bijectif, donc le morphisme composé $A' \longrightarrow u(A')$ est surjectif.

PROPOSITION 12.- Soit le diagramme

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[d, "i"] & & C'' \\ A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j"] & B \arrow[r, "v"] & C \arrow[u] \\ A'' & & C' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où A' , A'' sont un sous-truc et un truc quotient de A correspondants et de même pour C' , C'' . Alors on a les relations de transitivité:

$v\,u(A') = v(u(A'))$	$(vu)^{-1}\,(C'') = u^{-1}(v^{-1}(C''))$
$v\,u(A'') = v(u(A''))$	$(vu)^{-1}\,(C') = u^{-1}(v^{-1}(C'))$

Il suffit de démontrer la première de ces relations, car les autres s'en déduisent par les deux principes de dualité.

Soit $B' = u(A')$ et $u' : A' \longrightarrow u(A')$ le morphisme naturel de A' sur son image directe. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "i"] & u(A') \arrow[d, "i'"] & \\ A \arrow[r, "u"] & B \arrow[r, "v"] & C \end{tikzcd}$$

Donc $vu(A') = \mathrm{Im}\,(vu)i = \mathrm{Im}\,v\,(ui) = \mathrm{Im}\,v(i'u') = \mathrm{Im}\,(vi')\,u'$. Or u' est surjectif (Proposition 12) donc (proposition 7 corollaire)

$$\mathrm{Im}\,(vi')\,u' = \mathrm{Im}\,vi' = v\,(u(A'))\,.$$

14.- Suites exactes.-

Une suite de deux morphismes $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ consécutifs est dite exacte si $\mathrm{Im}\,u = \mathrm{Ker}\,v$. Une suite quelconque de morphismes consécutifs est dite exacte si pour chaque couple de morphismes consécutifs on a une suite exacte.

PROPOSITION 13.- Pour que la suite de morphismes :

$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ soit exacte il faut et il suffit que pour tout $X \in \mathcal{C}$ on ait la suite exacte : $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,C)$	$C \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$ soit exacte il faut et il suffit que pour tout $X \in \mathcal{C}$ on ait la suite exacte : $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C,X)$

En effet l'exactitude de la suite $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ signifie que u est injectif (proposition 4) donc $A \simeq \mathrm{Im}\,u$ (proposition 9), et que $\mathrm{Im}\,u$ est un noyau de v . Mais cela équivaut à dire que A est un noyau de v d'où l'assertion en vertu de déf. 2.

COROLLAIRE.- Pour que la suite $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \longrightarrow 0$ soit exacte, il faut et il suffit que A' soit un noyau de v et que A'' soit un conoyau de u (i.e. A' et A'' s'identifient à un sous-truc et un truc quotient de A correspondants).

PROPOSITION 14.- Soit $A_1 \prec A_2 \prec A$, on a la suite exacte (autoduale)

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{i} A_2 \xrightarrow{\alpha} A/A_1 \xrightarrow{j} A/A_2 \longrightarrow 0$$

où i est l'injection canonique de A_1 dans A_2 , α le morphisme composé $A_2 \longrightarrow A \longrightarrow A/A_1$, j la surjection canonique.

Comme i est injectif $\mathrm{Ker}\,i = 0 = \mathrm{Im}\,(0)$ d'où l'exactitude en A_1 .

Dualement on a l'exactitude en A/A_2 . Pour l'exactitude en A_2 on remarque que $\alpha i = 0$, donc $\mathrm{Im}\, i \prec \mathrm{Ker}\, \alpha$ (proposition 8) . Comme i est injectif $A_1 = \mathrm{Im}\, i$ (proposition 9) . Le morphisme $\mathrm{Ker}\, \alpha \longrightarrow A_2 \longrightarrow A \longrightarrow A/A_1$ est nul de sorte que l'injection $\mathrm{Ker}\, \alpha \longrightarrow A_2 \longrightarrow A$ se factorise à travers A_1 . Donc $\mathrm{Im}\, i = A_1 \succ \mathrm{Ker}\, \alpha$, i.e. $\mathrm{Im}\, i = \mathrm{Ker}\, \alpha$. Dualement on vérifie l'exactitude en A/A_1 .

COROLLAIRE 1.- Si $A_1 \prec A_2 \prec A$ on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow A_2/A_1 \longrightarrow A/A_1 \xrightarrow{j} A/A_2 \longrightarrow 0 \quad .$$

En effet de la proposition précédente on tire $\mathrm{Ker}\, j = \mathrm{Im}\, \alpha$. D'autre part $\mathrm{Im}\, \alpha$ est isomorphe à $\mathrm{Coim}\, \alpha$ (par AB 2) . Par définition de Coimage $\mathrm{Coim}\, \alpha = \mathrm{Coker}\, (\mathrm{Ker}\, \alpha)$. Or en vertu de la proposition précédente $\mathrm{Ker}\, \alpha = \mathrm{Im}\, i = i$ (proposition 9) . D'où $\mathrm{Coim}\, \alpha \simeq A_2/A_1$ et la conclusion.

COROLLAIRE 2.- Si on a la suite exacte $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} A'' \longrightarrow 0$ (A' et A'' étant un sous-truc et un quotient de A correspondants) on a une correspondance biunivoque entre les sous-trucs C de A'' , et les sous-trucs B de A "contenant" A' , donnée par les formules

$$B = j^{-1}(C) \quad , \quad C = j\,(B) \quad , \quad (A' \prec B)$$

et on a $C \simeq B/A'$ ("un sous-truc d'un quotient est un quotient d'un sous-truc").

On a des bijections canoniques :
ens. des sous-trucs de A'' $\xrightarrow{\sim}$ ens. des quotients de A'' $\xrightarrow{\sim}$ ens. des quotients de A majorés par le quotient A'' $\xrightarrow{\sim}$ ens. des sous-trucs de A dominant A' . (Les deux flèches extrêmes proviennent de la dualité entre sous-trucs et quotients dans A'' resp. A (proposition 9, corollaire 1) , celle du milieu exprime la transitivité des objets quotients) : si $C \prec A''$, il lui correspond le quotient A''/C de A'' , isomorphe au quotient A/B de A , où B est un sous-truc de A contenant A' . D'après le corollaire 1 , appliqué aux sous-trucs $A' \prec B$ de A , on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow B/A' \longrightarrow A/A' \simeq A'' \longrightarrow A/B \simeq A''/C \longrightarrow 0$$

donc B/A' est canoniquement isomorphe au noyau du morphisme canonique $A'' \longrightarrow A''/C$, i.e. à C .

Cette suite exacte montre aussi que $C = j\,(B)$ (compte tenu de la transitivité des images directes, cf. proposition 12), et que $B = j^{-1}(C)$. C.Q.F.D.

15.- Restriction d'un morphisme et notions duales.

Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme dans $\mathcal{C}$. On pose les définitions suivantes :

Si $i : A' \longrightarrow A$ est un sous-truc de A on appelle restriction de u à A' le morphisme composé

$$A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{u} B$$

Si $j : A \longrightarrow A''$ est un quotient de A tel que $\operatorname{Ker} j \prec \operatorname{Ker} u$, u se factorise de manière unique à travers A'' :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "j"'] & & B \\ & A'' \arrow[ur, "u'"'] & \end{tikzcd}$$

et le morphisme u' s'appelle l'astriction de u à A''

Si $j : B \longrightarrow B''$ est un quotient de B on appelle corestriction de u à B'' le morphisme composé

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{j} B''$$

Si $i : B' \longrightarrow B$ est un sous-truc de B tel que $\operatorname{Coker} u \succ \operatorname{Coker} i$, u se factorise de manière unique à travers B' :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & B \\ & B' \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

et le morphisme u' s'appelle la coastriction de u à B'

PROPOSITION 15.- Dans la situation ci-dessus :

$u : A \xrightarrow{j} A'' \xrightarrow{u'} B$, si $j_1 : A'' \longrightarrow A_1$ est un quotient de A'' , en le considérant comme quotient de A , on a :

$$u(A_1) = u'(A_1)$$

(Invariance des images directes par astriction).

$u : A \xrightarrow{u'} B' \xrightarrow{i} B$, si $i_1 : B_1 \longrightarrow B'$ est un sous-truc de B' , en le considérant comme sous-truc de B , on a :

$$u^{-1}(B_1) = u'^{-1}(B_1)$$

(Invariance des images inverses par coastriction).

Démontrons l'énoncé de droite. De $B_1 \prec B' \prec B$ on tire la suite exacte (proposition 14 corollaire 1):

$$0 \longrightarrow B'/B_1 \longrightarrow B/B_1 \longrightarrow B/B' \longrightarrow 0$$

Donc (proposition 7) l'image inverse de B_1 est la même pour u et u' à savoir le noyau de $A \longrightarrow B'/B_1 \longrightarrow B/B_1$.

On a un énoncé analogue pour les images directes des sous-trucs et les images inverses des quotients.

16.- Le théorème d'isomorphisme de Mlle Noether.

Dans une catégorie $\mathcal{C}$ les sous-trucs d'un objet A forment une classe ordonnée. On peut donc considérer (s'il existe) le sup. et le inf. d'un système de sous-trucs de A. De même, dualement, on peut considérer le sup. et le inf. d'un système de quotients de A. On dénotera le sup. au moyen du symbole $\vee$ et le inf. au moyen du symbole $\wedge$.

THÉORÈME 1.- Dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$, pour deux morphismes consécutifs $B \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} C$ on a les relations :

$\operatorname{Im} u \wedge \operatorname{Ker} v = u(\operatorname{Ker} vu)$	$\operatorname{Coim} v \wedge \operatorname{Coker} u = v^{-1}(\operatorname{Coker} vu)$
$\operatorname{Im} u \vee \operatorname{Ker} v = v^{-1}(\operatorname{Im} vu)$	$\operatorname{Coim} v \vee \operatorname{Coker} u = u(\operatorname{Coim} vu)$

Les formules se déduisent par dualité de la première. Il suffit d'en démontrer une, par exemple la seconde à gauche.

Remarquons d'abord que rien ne change à la formule si on remplace C par $\operatorname{Im} v$ et v par sa corestriction v' à $\operatorname{Im} v$. En effet $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} v'$ (proposition 7), $\operatorname{Im} v'u = \operatorname{Im} vu$ et $v'^{-1}(\operatorname{Im} v'u) = v^{-1}(\operatorname{Im} vu)$ (proposition 15). De même on peut remplacer B par $\operatorname{Im} u$ et u par l'injection canonique $u' : \operatorname{Im} u \longrightarrow A$. En effet $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u'$ et $\operatorname{Im} vu = \operatorname{Im} vu'$ (proposition 7, corollaire). On est donc ramenés à démontrer la formule dans le cas où B est un sous-truc A' de A et C un truc quotient de A, i.e. avec u injectif et v surjectif. Il faut prouver que $A' \vee \operatorname{Ker} v = v^{-1}(v(A'))$.

Or $v^{-1}(v(A')) \succ A'$ (proposition 10). Aussi $v^{-1}(v(A')) \succ v^{-1}(0) = \operatorname{Ker} v$ (proposition 11). Donc $v^{-1}(v(A'))$ majore à la fois A' et $\operatorname{Ker} v$. On va montrer qu'il est égal au sup. de A' et $\operatorname{Ker} v$. Soit B un sous-truc de A qui majore à la fois A' et $\operatorname{Ker} v$, tel que $v^{-1}(v(A')) \succ B$. Pour prouver que nécessairement $B = v^{-1}(v(A'))$, en vertu du corollaire 2 de la proposition 14, il suffit de démontrer que les images directes par v coïncident.

Or on a : $v(v^{-1}(v(A'))) = v(A')$. D'autre part on a de $v^{-1}(v(A')) \succ B$, en prenant les images directes par v : $v(A') \succ v(B)$. Mais de $B \succ A'$, par la proposition 10 on tire $v(B) \succ v(A')$. Donc $v(B) = v(A')$ comme il fallait démontrer.

COROLLAIRE 1.- Dans une catégorie abélienne

La classe des sous-trucs d'un objet $A \in \mathcal{C}$ est réticulée.	La classe des quotients d'un objet $A \in \mathcal{C}$ est réticulée.

A'_1 , A'_2 étant deux sous-trucs de A	A''_1 , A''_2 étant deux quotients de A
$A'_1 \vee A'_2 = \mathrm{Im}(A_1 \amalg A_2 \longrightarrow A)$	$A''_1 \vee A''_2 = \mathrm{Coim}\,(A \longrightarrow A''_1 \,\Pi\, A''_2)$
$A'_1 \wedge A'_2 = \mathrm{Ker}\,(A \longrightarrow A/A_1 \,\Pi\, A/A_2)$	$A''_1 \wedge A''_2 = \mathrm{Coker}(A/A''_1 \amalg A/A''_2 \longrightarrow A)$

En effet soient $i_1 : A'_1 \longrightarrow A$, $i_2 : A'_2 \longrightarrow A$ deux sous-trucs de A . Comme $\mathcal{C}$ est abélienne, il existe la somme directe $A'_1 \amalg A'_2$ dans $\mathcal{C}$. Envisageons le morphisme $u : A'_1 \amalg A'_2 \longrightarrow A$ de "composantes" (i_1 , i_2) . Je dis que $\mathrm{Im}\, u = A'_1 \vee A'_2$. En effet $\mathrm{Im}\, u$ majore à la fois A'_1 et A'_2 , car on peut factoriser les injections des A'_i dans A à travers u donc à travers $\mathrm{Im}\, u$. D'autre part si $i : B' \longrightarrow A$ est un sous-truc de A qui majore à la fois A'_1 , A'_2 on aura deux injections $\alpha_1 : A'_1 \longrightarrow B'$, $\alpha_2 : A'_2 \longrightarrow B'$ telles que $i\alpha_1 = i_1$, $i\alpha_2 = i_2$. Cela montre que u se factorise à travers B : $u = iu'$. Comme i est injectif, $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Ker}\ u'$ (proposition 7) . D'où (comme $\mathcal{C}$ satisfait AB 2) une factorisation de l'injection de $\mathrm{Im}\, u$ dans A à travers B' , i.e. $\mathrm{Im}\, u \leq B'$.

Par un raisonnement analogue (ou par dualité) on démontre que $A_1 \wedge A_2$ est le noyau du morphisme $A \longrightarrow A/A_1 \,\Pi\, A/A_2$ qui a pour composantes les deux projections naturelles $A \longrightarrow A/A_1$ et $A \longrightarrow A/A_2$.

<u>COROLLAIRE 2</u>.- Soit $v : A \longrightarrow C$ un morphisme dans une catégorie abélienne ; M , N deux sous-trucs de A on a les isomorphismes :

$$v(M) \simeq M/(M \wedge \mathrm{Ker}\ v) \simeq (M \vee \mathrm{Ker}\ v)/\mathrm{Ker}\ v$$
$$M/(M \wedge N) \simeq (M \vee N)/N$$

En effet du théorème précédent on tire que $M \vee \mathrm{Ker}\ v = v^{-1}(v(M))$ d'où $v(M) \simeq (M \vee \mathrm{Ker}\ v)/\ \mathrm{Ker}\ v$ (pour la définition d'image directe). De même on a $M \wedge \mathrm{Ker}\ v = u\ (\mathrm{Ker}\ vu)$, u étant l'injection de M dans A . Donc $M \wedge \mathrm{Ker}\ v$ est le noyau du morphisme $M \longrightarrow v(M)$ et de là $v(M) \simeq M/(M \wedge \mathrm{Ker}\ v)$.

Finalement on peut identifier N au noyau de $v : A \longrightarrow A/N$ en prenant $C = A/N$. On tire de là la troisième formule.