A. Andreotti

Généralités sur les catégories abéliennes

Séminaire A. Grothendieck, tome 1 (1957), exp. nº 1, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SG_1957__1__A1_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire A. GROTHENDIECK
(ALGÈBRE HOMOLOGIQUE)

Année 1956/57
-:-:-:-

Exposé n° 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES CATÉGORIES ABÉLIENNES.

(Exposé du 11.1.1957, rédigé par A. ANDREOTTI)

1.- Définition des catégories, dualité.

DÉFINITION.- Une catégorie est une classe non vide $\mathcal{C}$ d'objets telle que

1°) pour tout couple A, B d'objets de $\mathcal{C}$ est défini un ensemble $\mathrm{Hom}(A,B)$ appelé ensemble des morphismes de A dans B (si $u \in \mathrm{Hom}(A,B)$ on écrit $A \xrightarrow{u} B$).

2°) pour tout triple A, B, C d'objets de $\mathcal{C}$ est définie une application de $\mathrm{Hom}(A,B) \times \mathrm{Hom}(B,C)$ dans $\mathrm{Hom}(A,C)$ (si $u \in \mathrm{Hom}(A,B)$, $v \in \mathrm{Hom}(B,C)$ on note par vu l'image de (u, v) dans $\mathrm{Hom}(A,C)$) .

3°) Les ensembles $\mathrm{Hom}(A,B)$ et leur loi de composition vérifient les axiomes suivants :

α) la loi de composition est associative : si $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} D$ on a
$$w(v\,u) = (w\,v)u$$

β) dans tout $\mathrm{Hom}(A,A)$ il existe un élément 1_A (appelé morphisme identique de A) tel que si $B \xrightarrow{u} A$, $1_A u = u$; si $A \xrightarrow{v} C$ $v\, i_A = v$.

γ) tout $u \in \mathrm{Hom}(A,B)$ détermine l'objet A de départ et l'objet B d'arrivée (cet axiome a une raison essentiellement de prudence).

Une catégorie $\mathcal{C}$ étant donnée, on obtient une nouvelle catégorie $\mathcal{C}^0$ (dite catégorie duale) en prenant pour objets de $\mathcal{C}^0$ les objets de $\mathcal{C}$ et pour ensembles de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(A,B)$ de A dans B l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$ défini pour $\mathcal{C}$. Dans $\mathcal{C}^0$ la loi de composition $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(A,C)$ sera définie au moyen de la loi de composition $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A)$ qu'on a sur $\mathcal{C}$.

Toute notion et tout énoncé relatif à une catégorie $\mathcal{C}$ se dualise en une notion et un énoncé relatif à la catégorie duale $\mathcal{C}^0$ ("procédé de renversement des flèches"). Remarquons que $(\mathcal{C}^0)^0 = \mathcal{C}$.

EXEMPLES.-

a) On prend pour objets de $\mathcal{C}$ les ensembles ; si A , B sont deux ensembles on définit $\mathrm{Hom}(A,B)$ comme l'ensemble des applications de A dans B . On obtient, en composant les $\mathrm{Hom}(A,B)$ d'une manière évidente, une catégorie qu'on dénotera par $\mathcal{E}$.

b) On prend pour objets les groupes abéliens ; si A , B sont deux groupes on définit $\mathrm{Hom}(A,B)$ comme l'ensemble des homomorphismes de A dans B . On a une catégorie qu'on notera par $\mathcal{G}$.

2.- Morphismes injectifs, surjectifs, bijectifs.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie dont les objets seront notés par les lettres A , B , C , ... Soit $u : A \to B$ un morphisme.

DÉFINITIONS.- On dit que u est injectif si pour tout C l'application $\mathrm{Hom}(C,A) \to \mathrm{Hom}(C,B)$, qui envoie $v \in \mathrm{Hom}(C,A)$ dans $uv \in \mathrm{Hom}(C,B)$, est une injection. (En d'autres mots u est injectif si de $uv' = uv''$ v' , $v'' \in \mathrm{Hom}(C,A)$ on tire $v' = v''$).

On dit que u est surjectif si pour tout C l'application $\mathrm{Hom}(B,C) \to \mathrm{Hom}(A,C)$ qui envoie $w \in \mathrm{Hom}(B,C)$ dans $wu \in \mathrm{Hom}(A,C)$ est une injection (de $w'u = w''u$. $w',w'' \in \mathrm{Hom}(B,C)$ on tire $w' = w''$) .

On dit que u est bijectif s'il est injectif et surjectif.

REMARQUE.- Par passage à la catégorie duale un morphisme injectif (surjectif) se change en un morphisme surjectif (injectif). Voici un exemple d'énoncés duaux :

Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$

si $v\,u$ est injectif u est injectif	si $v\,u$ est surjectif v est surjectif

Il suffit de démontrer l'énoncé de gauche. Pour tout D et tout $w \in \mathrm{Hom}(D,A)$ l'application $w \to v\,u\,w$ se factorise en $w \to u\,w \to v\,u\,w$. Donc on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(D,A) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Hom}(D,C) \\ & \mathrm{Hom}(D,B) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Comme la flèche horizontale est une injection par hypothèse, l'application $\mathrm{Hom}(D,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(D,B)$ est une injection et u est injectif.

DÉFINITION.- Le morphisme $A \xrightarrow{u} B$ est dit un isomorphisme s'il existe un morphisme $v \in \mathrm{Hom}(B,A)$ tel que

$$vu = 1_A \quad , \quad uv = 1_B$$

(v est dite une inverse (gauche et droite) de u) .

Comme le morphisme identique est bijectif, de la remarque précédente il découle qu'un isomorphisme est une bijection. La réciproque est fausse.

EXEMPLE.- Dans la catégorie des groupes topologiques, les morphismes étant les homomorphismes continus, on peut avoir des homomorphismes continus, bijectifs au sens de la catégorie, mais qui ne sont pas des homéomorphismes. [1]

Les morphismes injectifs s'appellent aussi monomorphismes. Les morphismes surjectifs s'appellent aussi épimorphismes , les morphismes bijectifs bimorphismes. Il ne faut pas confondre bimorphismes et isomorphismes.

Lorsque $A \xrightarrow{u} B$ est un isomorphisme pour tout objet X de la catégorie on a des bijections canoniques :

$$\mathrm{Hom}(X,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,B)$$

$$\mathrm{Hom}(B,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,X)$$

La première à tout $w \in \mathrm{Hom}(X,A)$ associe $u\,w \in \mathrm{Hom}(X,B)$, la seconde à tout $w \in \mathrm{Hom}(B,X)$ associe $w\,u \in \mathrm{Hom}(A,X)$.

En effet l'application $\mathrm{Hom}(X,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,A)$ qui à tout $w \in \mathrm{Hom}(X,B)$ associe $v\,w \in \mathrm{Hom}(X,A)$ (v inverse (gauche et droite) de u) est bien, comme on vérifie, l'application inverse de la première application envisagée. De même pour la deuxième des applications considérées.

Cela justifie bien la notion d'isomorphisme introduite car toute propriété vraie pour l'objet A , s'exprimant au moyen des $\mathrm{Hom}(A,X)$ et $\mathrm{Hom}(X,A)$ se transporte en une propriété de l'objet B .

3.- Sous-trucs, trucs-quotient.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie A un objet de $\mathcal{C}$, Envisageons les couples (B,u) formés d'un objet B de $\mathcal{C}$ et d'un monomorphisme $u : B \to A$. Dans la classe des (B,u) on introduit une relation de préordre de la manière

---

[1]- Telle est l'application $\rho \longrightarrow \begin{pmatrix} e^{2\pi i\rho} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\sqrt{2}\rho} \end{pmatrix}$ du groupe additif des nombres réels dans le groupe multiplicatif des matrices diagonales $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ a , b complexes $|a| = |b| = 1$.

suivante : on dit que (B , u) <u>majore</u> (B' , u') s'il existe un morphisme $v \in \mathrm{Hom}(B',B)$ tel que $u' = uv$. On écrit simplement $u \succ u'$, ce qui peut aussi être décrit par le diagramme ci-contre.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u"] & A \\ B' \arrow[u, "v"] \arrow[ur, "u'"'] & \end{tikzcd}$$

Si $u \succ u'$ le morphisme v tel que $u' = uv$ est unique et injectif (car u , u' sont injectifs).

Si à la fois $u > u'$ et $u' > v$ (c'est-à-dire si $u' = uv$, $u = u'v'$) v et v' sont inverses l'un de l'autre : $vv' = 1_B$ $v'v = 1_{B'}$ (c'est-à-dire v et v' sont des isomorphismes). On dit alors que les couples (B , u) , (B', u') sont <u>équivalents</u>.

Dans chaque classe de couples équivalents on choisit un représentant (par exemple au moyen du symbole τ de Hilbert). Les objets ainsi choisis s'appellent les <u>sous-trucs</u> de A.

<u>REMARQUES</u>.-

a) Les sous-trucs de A donnent une classe ordonnée par la relation de préordre définie tout à l'heure.

b) Si (B , u) est un sous-truc de A on écrit aussi $B \subset A$, mais il faut signaler que les sous-trucs de B ne sont pas des sous-trucs de A . On peut dire seulement qu'on a une bijection de la classe des sous-trucs de B sur la classe des sous-trucs de A majorés par B , associant à $(\mathcal{C} , v)$ le sous-truc $(\mathcal{C} , uv)$ de A .

On définit un truc quotient de A comme un soustruc de A , (A étant envisagé comme élément de la catégorie duale $\mathcal{C}^0$.

Un truc quotient de A sera donc la donnée d'un objet $B \in \mathcal{C}$ et d'un épimorphisme $u : A \to B$. La relation de préordre pour les soustrucs se dualise en une relation d'ordre pour les trucs quotients. Précisément si on a la situation du diagramme commutatif.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & B \arrow[d, "v"] \\ & B' \end{tikzcd}$$

où u et u' sont des épimorphismes, v est un épimorphisme unique et on dira que u majore u' : $u \succ u'$.

4.- Produits et sommes directes.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, A un objet de $\mathcal{C}$, $(u_i)_{i \in I}$ une famille non vide de morphismes $u_i : A \longrightarrow A_i$. Pour tout $B \in \mathcal{C}$ envisageons l'application

$$\mathrm{Hom}(B,A) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(B,A_i)$$

qui envoie $v \in \mathrm{Hom}(B,A)$ dans l'élément $(u_i\, v)_{i \in I}$ de $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(A,B_i)$. Si cette application est une bijection quelque soit $B \in \mathcal{C}$ on dit que A est représenté au moyen des morphismes u_i comme <u>produit direct</u> des A_i .

<u>PROPOSITION</u>.- Soient A , A' deux objets de $\mathcal{C}$ représentés en produit direct, A des A_i , A' des A'_i , au moyen des morphismes $(u_i)_{i \in I}$ $(u'_i)_{i \in I}$ respectivement, l'ensemble I des indices étant le même. Soit $(v_i)_{i \in I}$ une famille de morphismes $v_i : A_i \longrightarrow A'_i$. Alors il existe un morphisme et un seul $v : A \longrightarrow A'$ tel que tous les diagrammes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "v"'] & A_i \arrow[d, "v_i"] \\ A' \arrow[r, "u'_i"'] & A'_i \end{tikzcd}$$

soient commutatifs.

En effet comme $\mathrm{Hom}(A,A') \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(A,A'_i)$ est une bijection v est l'unique élément de $\mathrm{Hom}(A,A')$ telle que son image soit l'élément $(v_i\, u_i)_{i \in I}$ de $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(A,A'_i)$.

<u>COROLLAIRE</u>.- Si les morphismes v_i sont des isomorphismes v est aussi un isomorphisme. En particulier (si $A_i = A'_i$ et $v_i = 1_{A_i}$) deux objets A , représentés comme produit direct d'objets de la même famille $(A_i)_{i \in I}$ sont canoniquement isomorphes.

Parmi les objets $(A , (u_i))$ qu'on peut représenter en produit direct de la famille $(A_i)_{i \in I}$ on en choisit un qu'on notera par $\prod_{i \in I} A_i$ et qu'on appellera <u>le produit direct</u> de la famille $(A_i)_{i \in I}$. Les A_i sont les <u>facteurs</u> du produit, des u_i les <u>projections canoniques</u> du produit sur ses facteurs.

REMARQUES .-

a) Il n'est pas assuré que, étant donnés deux objets A , $B \in \mathcal{C}$ il existe leur produit direct. S'il en est ainsi pour tout couple A , $B \in \mathcal{C}$ on dit que $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produits. Si pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ il existe le produit des A_i on dit que $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produits infinis.

b) Si on a $A = \prod_{i \in I} A_i$, $B = \prod_{i \in I} B_i$, et $v_i : A_i \to B_i$, le morphisme $v : A \to B$ défini par les v_i se désigne par le symbole $v = \prod v_i$. Si les v_i sont des monomorphismes v est aussi un monomorphisme (en effet pour tout $C \in \mathcal{C}$ les applications $\mathrm{Hom}(C,A_i) \to \mathrm{Hom}(C,B_i)$ étant injectives on a une injection de $\mathrm{Hom}(C,A) = \prod \mathrm{Hom}(C,A_i)$ dans $\prod \mathrm{Hom}(C,B_i) = \mathrm{Hom}(C,B)$) . L'énoncé analogue pour les épimorphismes n'est pas vrai en général. On a en tout cas

$$1_A = \prod_{i \in I} 1_{A_i} \quad , \quad (\prod v_i)(\prod u_i) = \prod v_i \, u_i \quad .$$

Par dualité on a à considérer un objet $A \in \mathcal{C}$ et une famille $A_i \xrightarrow{u_i} A$ de morphismes. Si pour tout $B \in \mathcal{C}$ l'application

$$\mathrm{Hom}(A,B) \to \prod \mathrm{Hom}(A_i,B)$$

(définie par les applications $u \to u\, u_i$) est une bijection on a la définition de A comme somme directe des A_i au moyen des morphismes u_i .

Les énoncés précédents se dualisent. La somme directe des objets $(A_i)_{i \in I}$ (lorsqu'elle existe) se notera par $\coprod_{i \in I} A_i$ (elle est la donnée de l'objet $A = \coprod_{i \in I} A_i$ et des injections canoniques $A_i \xrightarrow{u_i} A$) . Si on a $A = \coprod A_i$ $B = \coprod B_i$ et $v_i : A_i \to B_i$, il est défini un morphisme unique $v = \coprod v_i : A \to B$. Si les v_i sont des épimorphismes v est aussi un épimorphisme. On a $1_A = \coprod 1_{A_i}$, $(\coprod u_i)(\coprod v_i) = \coprod u_i \, v_i$.

EXEMPLES.-

a) dans la catégorie $\mathcal{E}$ des ensembles la somme directe est "l'ensemble somme" de Bourbaki, le produit direct le produit au sens ensembliste.

b) dans la catégorie $\mathcal{G}$ des groupes abéliens on retombe sur les définitions usuelles.

5.- Foncteurs .

Soient $\mathcal{C}$ $\mathcal{C}'$ deux catégories.

DEFINITION.- On appelle foncteur covariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ une fonction F qui à tout objet $A \in \mathcal{C}$ associe un objet $F(A) \in \mathcal{C}'$, et à chaque morphisme $u : A \to B$ de la catégorie $\mathcal{C}$ un morphisme $F(u) : F(A) \to F(B)$ telle que les morphismes $F(u)$ vérifient les axiomes suivants :

α) $$F(1_A) = 1_{F(A)}$$

β) si $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ dans $\mathcal{C}$ on a

$$F(vu) = F(v)\ F(u)$$

Un foncteur covariant de la catégorie $\mathcal{C}^0$, duale de $\mathcal{C}$, dans $\mathcal{C}'$ considéré comme fonction $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est appelé un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. Pour un foncteur contravariant F, on a donc pour tout morphisme $u : A \to B$ dans $\mathcal{C}$ un morphisme $F(u) : F(B) \to F(A)$ tel que $F(1_A) = 1_{F(A)}$, et tel que si $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ on ait $F(v\,u) = F(u)\ F(v)$.

De même on définit les multifoncteurs c'est-à-dire des foncteurs en plusieurs variables, covariant en certaines variables et contravariant en d'autres.

Par exemple un bifoncteur des catégories $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ à valeurs dans la catégorie $\mathcal{C}'$, covariant dans la première variable et contravariant dans la seconde, est une fonction F qui associe à tout couple (A_1 , A_2) d'objets du produit $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$, un objet $F(A_1 , A_2) \in \mathcal{C}'$ et à tout morphisme $u_1 : A_1 \to B_1$ $u_2 : A_2 \to B_2$ respectivement dans $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ deux morphismes $F(u_1 , A_2) : F(A_1 , A_2) \to F(B_1 , A_2)$

$F(A_1 , u_2) : F(A_1 , B_2) \to F(A_1 , A_2)$, de façon que :

α) $$F(1_{A_1} , A_2) = 1_{F(A_1 , A_2)}$$

$$F(A_1 , 1_{A_2}) = 1_{F(A_1 , A_2)}$$

β) si $A_1 \xrightarrow{u_1} B_1 \xrightarrow{v_1} A_1$ dans $\mathcal{C}$, $A_2 \xrightarrow{u_2} B_2 \xrightarrow{v_2} C_2$ dans $\mathcal{C}_2$ on a

$$F(v_1\, u_1 , A_2) = F(v_1 , A_2)\ F(u_1 , A_2)$$

$$F(A_1 , v_2\, u_2) = F(A_1 , u_2)\ F(A_1 , v_2)$$

γ) le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} F(A_1 , B_2) \arrow[r, "F(u_1 , B_2)"] \arrow[d, "F(A_1 , u_2)"'] & F(B_1 , B_2) \arrow[d, "F(B_1 , u_2)"] \\ F(A_1 , A_2) \arrow[r, "F(u_1 , A_2)"'] & F(B_1 , A_2) \end{tikzcd}$$

Ainsi par exemple $\mathrm{Hom}(A,B)$ est un bifoncteur des catégories $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$, $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$ à valeurs dans la catégorie $\mathcal{E}$ des ensembles, covariant en B et contravariant en A.

Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ $G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ sont deux foncteurs la fonction $GF : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$ est un foncteur qu'on appelle le <u>composé</u> du foncteur F et du foncteur G.

Soient F, G deux foncteurs de même variance, par exemple covariants, de la catégorie $\mathcal{C}$ à la catégorie $\mathcal{C}'$. On dit qu'on a un <u>morphisme fonctoriel</u> f de F dans G si on a une fonction f qui associe à tout $A \in \mathcal{C}$ un morphisme
$f(A) \in \mathrm{Hom}(F(A) , G(A))$ tel que pour tout $A \xrightarrow{u} B$ dans $\mathcal{C}$ on ait commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[d, "f(A)"'] & F(B) \arrow[d, "f(B)"] \\ G(A) \arrow[r, "G(u)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Les morphismes définis sur les foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, se composent de manière évidente et leur composition est associative. Pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ on a le morphisme identique qui à tout $A \in \mathcal{C}$ associe $1_{F(A)}$. Par conséquence, si pour tout couple de foncteurs F, G de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, les morphismes fonctoriels de F dans G forment un ensemble, on a une catégorie dont les objets sont les foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, et où $\mathrm{Hom}(F , G)$ est l'ensemble des morphismes fonctoriels de F dans G. Tel est, par exemple, le cas, si $\mathcal{C}$ est un ensemble.

<u>REMARQUE</u>.- Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ deux foncteurs par exemple tous les deux covariants. On a défini le foncteur $GF : \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$. Soit f un morphisme fonctoriel $f : F \to H$, H étant un foncteur de même variance que F de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$. Du diagramme commutatif pour $A \xrightarrow{u} B$ dans $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(u)} & F(B) \\ {\scriptstyle f(A)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f(B)} \\ H(A) & \xrightarrow{H(u)} & H(B) \end{array}$$

on déduit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G(F(A)) & \xrightarrow{G(F(u))} & G(F(B)) \\ {\scriptstyle G(f(A))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f(B))} \\ G(H(A)) & \xrightarrow{G(H(u))} & G(H(B)) \end{array}$$

Donc on a un morphisme fonctoriel Gf de GF dans GH . De même en échangeant les rôles de F et G . On vérifie que GF se comporte "formellement" comme un bifoncteur en F et G (covariant en les deux variables F , G , F resp. G variant dans la "catégorie" des foncteurs covariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ resp. de $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}''$).

<u>EXEMPLES</u>.-

a) Soit X un espace topologique, $\mathcal{C}^X$ la catégorie des faisceaux de groupes abéliens définis sur X les morphismes étant les homomorphismes de faisceau. Soit $\Gamma(X , \mathcal{A})$ le groupe abélien des sections du faisceau $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^X$ sur X . Γ est un foncteur sur $\mathcal{C}^X$ à valeurs dans la catégorie $\mathcal{G}$ des groupes abéliens.

b) D'autres exemples se trouvent dans le Coran (Cartan et Eilenberg, Homological Algebra. Princeton University Press 1956).

<u>DÉFINITION</u>.- Un morphisme fonctoriel f du foncteur F dans le foncteur G est dit un <u>isomorphisme</u> si pour tout objet A de la catégorie où F et G sont définis, $f(A) : F(A) \to G(A)$ est un isomorphisme.

Lorsque un tel isomorphisme existe on dit que F et G sont des foncteurs isomorphes.

Pour toute catégorie $\mathcal{C}$ on peut considérer le <u>foncteur identique</u> $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ défini par les données :

$$1_{\mathcal{C}}(A) = A \qquad \text{pour tout } A \in \mathcal{C}$$

$$1_{\mathcal{C}}(u) = u \qquad \text{pour tout } u : A \to B \qquad A , B \to \mathcal{C} .$$

Dans la suite on se bornera aux foncteurs covariants.

6.- Catégories équivalentes.

Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux catégories, supposons qu'on ait deux foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ tels que $1_{\mathcal{C}}$ soit isomorphe à GF et FG soit isomorphe à $1_{\mathcal{C}}$. La donnée des deux foncteurs F , G et des isomorphismes

$$\varphi : 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF \qquad \psi : FG \longrightarrow 1_{\mathcal{C}} ,$$

sera appelée une <u>équivalence entre les catégories</u> $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, quand l'axiome qu'on va énoncer est satisfait.

A tout objet $A \in \mathcal{C}$ est associé l'objet $G(F(A)) \in \mathcal{C}$ et on a un isomorphisme

$$\varphi(A) : A \to G(F(A))$$

Par application du foncteur F aux deux membres on a

$$F(\varphi(A)) : F(A) \to F(G(F(A)))$$

Or l'objet $F(G(F(A)))$ peut s'écrire aussi $(FG)(F(A))$ et on a un isomorphisme

$$(F(A)) : (FG)(F(A)) \longrightarrow F(A) .$$

En définitive on peut passer de $F(A)$ à $F(A)$ par les morphismes :

$$(1) \qquad F(A) \xrightarrow{F(\varphi(A))} F\,G\,F(A) \xrightarrow{\psi(F(A))} F(A)$$

Un argument analogue nous donne pour tout $A' \in \mathcal{C}'$ les morphismes

$$(2) \qquad G(A') \xrightarrow{G(\psi^{-1}(A'))} G\,F\,G(A') \xrightarrow{\varphi^{-1}(G(A'))} G(A')$$

où φ^{-1} ψ^{-1} sont les morphismes inverses de φ et ψ .

Il est naturel de <u>postuler</u> que le composé des morphismes (1) et le composé des morphismes (2) soient respectivement l'identité $1_{F(A)}$ sur $F(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$ et l'identité $1_{G(A')}$ sur $G(A')$ pour tout $A' \in \mathcal{C}'$.

D'où <u>l'axiome d'une équivalence de catégories</u> :

$$\psi(F(A))F(\varphi(A)) = 1_{F(A)} \qquad \text{pour tout } A \in \mathcal{C}$$

$$\varphi^{-1}(G(A'))G(\psi^{-1}(A')) = 1_{G(A')} \qquad \text{pour tout } A' \in \mathcal{C}'$$

<u>THÉORÈME</u>.- Si (F, G, φ, ψ) est une équivalence entre les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, l'application naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(A), F(B))$ est une bijection.

L'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(A), F(B))$ par définition associe à $u : A \longrightarrow B$ le morphisme $F(u) : F(A) \longrightarrow F(B)$. On va exhiber l'application inverse. D'abord on a une application

(1) $\qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(A), F(B)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(A), GF(B))$

qui associe à $v : F(A) \longrightarrow F(B)$ le morphisme $G(v) : GF(A) \longrightarrow GF(B)$

Ensuite, en vertu de l'isomorphisme fonctoriel $\varphi : 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF$, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} GF(A) \arrow[r, "GF(u)"] & GF(B) \\ A \arrow[u, "\varphi(A)"] \arrow[r, "u"'] & B \arrow[u, "\varphi(B)"'] \end{tikzcd}$$

Donc une application

(2) $\qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(A), GF(B)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$

qui, à tout $w : GF(A) \longrightarrow GF(B)$, associe le morphisme

$$\varphi^{-1}(B)\, w\, \varphi(A) \ : \ A \longrightarrow B$$

Je dis que la composée des applications (1) et (2) est l'application inverse de celle envisagée.

En effet, soit $u : A \longrightarrow B$, son image dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(A), F(B))$ est $F(u)$. L'image de $F(u)$ par (1) est $GF(u)$ et celle, par (2) de $GF(u)$ est $\varphi(B)^{-1}GF(u)\,\varphi(A) = u'$. Il faut prouver que $u' = u$.

Or, du diagramme précédent, on tire

$$GF(u)\,\varphi(A) = \varphi(B)u$$

d'autre part, $\varphi^{-1}(B)\ \varphi(B) = 1_B$, donc, en multipliant à gauche par $\varphi^{-1}(B)$, on a bien $\varphi^{-1}(B)\ GF(u)\,\varphi(A) = u$.

Partons maintenant d'un morphisme $v : F(A) \longrightarrow F(B)$. L'application (1) nous donne $G(v)$, et (2) , appliquée à $G(v)$, donne $\varphi^{-1}(B)\ G(v)\ \varphi(A)$, et l'application envisagée change ce morphisme en $F(\varphi^{-1}(B)\ G(v)\ \varphi(A))$. Il faut montrer que $F(\varphi^{-1}(B)\ G(v)\ \varphi(A)) = v$

Désignons par $\tilde{u}$ le morphisme $\varphi^{-1}(B)\ G(v)\,\varphi(A) : A \longrightarrow B$.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} GF(A) & \xrightarrow{G(v)} & GF(B) \\ {\scriptstyle \varphi(A)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \varphi(B)} \\ A & \xrightarrow[\tilde{u}]{} & B \end{array}$$

par la définition de $\tilde{u}$. On a aussi le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} GF(A) & \xrightarrow{GF(\tilde{u})} & GF(B) \\ {\scriptstyle \varphi(A)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \varphi(B)} \\ A & \xrightarrow[\tilde{u}]{} & B \end{array}$$

car φ est un morphisme fonctoriel.

On tire de là que $GF(\tilde{u}) = G(v)$. Il faut en déduire que $F(\tilde{u}) = v$.

Or on voit que l'application $v \longrightarrow G(v)$ est une injection de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(A)\ ,\ F(B)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(A)\ ,\ GF(B))$ car il admet un inverse à gauche, comme il résulte de la première partie du raisonnement appliqué à $A' = F(A)$, $B' = F(B)$ et au foncteur $G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$.

<u>REMARQUE</u>.- Dans la démonstration précédente on n'a pas fait usage de l'axiome de l'équivalence de catégories. Cependant l'axiome en question est vérifié, et utilisé, dans tous les cas raisonnables, aussi est-il prudent de le vérifier dans chaque cas.