Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann

Constantino M. de Barros

Espaces infinitésimaux, une extension du calcul différentiel extérieur d'Élie Cartan et du calcul différentiel absolu de Ricci

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann, tome 7 (1965), exp. nº 2, p. I-96

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1965__7__A2_0>

CAHIERS
de
TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Novembre 1964

Vol. VII

ESPACES INFINITESIMAUX

UNE EXTENSION DU CALCUL DIFFERENTIEL EXTERIEUR D'ELIE CARTAN ET DU CALCUL DIFFERENTIEL ABSOLU DE RICCI

par Constantino M. de Barros

Introduction.

I. La théorie des structures infinitésimales d'ordre arbitraire et des structures locales a été établie sur une base précise et générale à partir de la Note (*) de M. Ehresmann. Depuis 1951, M. Ehresmann s'est interessé aux fondements de la Géométrie différentielle. Il a défini les éléments infinitésimaux et les structures infinitésimales d'ordre quelconque qui forment l'objet de la Géométrie différentielle (*).

Les structures infinitésimales forment des espèces de structures (**) au-dessus de la catégorie des isomorphismes entre variétés différentiables. Ces espèces de structures sont d'une façon plus précise des espèces de structures locales (*) (**) au-dessus de la catégorie des isomorphismes entre variétés différentiables ou entre espaces topologiques. Leur théorie rentre ainsi dans celle des espèces de structures inductives (***). Mais d'autre part les structures infinitésimales peuvent être considérées comme des espèces de structures au-dessus de certaines catégories dont les objets sont des ensembles munis de structures algébriques. Il s'agit de structures algébriques canoniquement associées aux structures de variétés différentiables. C'est ce point de vue qui sera développé dans cette thèse. On étudiera les objets qu'on appellera «pré-espaces

(*) EHRESMANN, C., a) Structures locales et structures infinitésimales, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 234 (1952), 587 - 589 ; b) Structures locales, Ann. Mat. Pura Appl. (4) vol. 36 (1954), 133 - 142 ; c) Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie, Géométrie différentielle, Colloques internationaux du C.N.R.S. Strasbourg 1953 (C. N. R. S.) Paris, 1953, pp. 97 - 110.

(**) EHRESMANN, C., a) Gattungen von Lokalen Strukturen, Jahresb. Deutsch. Math., Verein. vol. 60 (1957), 49 - 77 ; b) Espèces de structures locales, élargissements de catégories, Séminaire de Topologie et de Géométrie Différentielle dirigé par C. Ehresmann, vol. 3 (1961), 73 pp. ; c) Prolongements de catégories différentiables, ibidem, vol. 6 (1964), 8 pp..

(***) EHRESMANN, C., Catégories inductives et pseudogroupes, Ann. Inst. Fourier, t. 10 (1960), 307 - 336. Espèces de structures sous- inductives, Séminaire de Topologie et de Géométrie différentielle, vol. 7.

d'Elie Cartan» et «espaces infinitésimaux», qui sont sous-jacents aux structures infinitésimales pures de première ordre et qui forment des espèces de structures au-dessus de la catégorie des modules.

Les structures d'espace infinitésimal sur des pré-espaces d'Elie Cartan donnent naissance à des calculs infinitésimaux qui seront développés dans ce mémoire. Comme cas particuliers d'un même calcul infinitésimal on peut citer : le calcul différentiel extérieur d'Elie Cartan, le calcul différentiel absolu de Ricci, le calcul des dérivées de Lie, le calcul différentiel associé à des endomorphismes (théorie de Frölicher-Nijenhuis).

Ce travail est divisé en trois chapitres. Avant de décrire chacun d'eux, on donnera les définitions clefs qui, en première approximation, peuvent donner une idée des sujets traités.

II. Soit F une algèbre graduée sur l'anneau commutatif K. Une structure d'espace (K, F)-linéaire sur un ensemble $\mathfrak{X}$ est définie par la donnée : d'une structure de (K,F)-bimodule gradué par rapport à F telle que

$$\alpha(fX) = (\alpha f)X \text{ pour } \alpha \in K, f \in F \text{ et } X \in \mathfrak{X}.$$

Une *translation infinitésimale graduée* (t.i.g.) *de degré* t sur un espace (K, F)-linéaire gradué V est un couple (T, D) constitué par un K-endomorphisme gradué T de degré t de V et une K-dérivation graduée D de degré t de la K-algèbre graduée F tel que

$$(\#) \qquad T(fv) = (Df)v + (J_F^t f)(Tv)$$

pour tout $f \in F$ et tout $v \in V$, où $J_F^t f = (-1)^{t \deg f} f$.

On dit que T est un *déplacement infinitésimal gradué* (d.i.g.) *de degré* t s'il existe D tel que (T, D) soit une t.i.g. de degré t (*).

Supposons que l'anneau F soit (0)-commutatif, c'est-à-dire, $fg = (-1)^{\deg f \deg g} g f$. On dira que $\rho = (\rho_I, \rho_D)$ est une *représentation infinitésimale graduée* (r.i.g.) *de degré* γ de $\mathfrak{X}$ vers V si ρ est une application K-linéaire graduée de degré γ de $\mathfrak{X}$ dans l'espace (K, F)-linéaire gradué $\hat{\mathfrak{T}}gr_K(V)$ des t.i.g. de V. Si de plus l'application K-linéaire ρ_D (resp. ρ_I) de $\mathfrak{X}$ dans l'espace (K, F)-linéaire gradué $\mathfrak{D}gr_K(F)$

(*) Quand $K = F$ est un corps et que D, J_F sont donnés d'avance, cette notion a déjà été considérée par les algébristes dans un but différent. Par exemple, elle se trouve dans Jacobson, N., On pseudo-linear transformations, Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 21 (1935), 667-670; Annals of Math., vol. 38 (1937), 484-507. En topologie algébrique les t.i.g. de degré ± 1 sont d'usage courant dans les structures de DGA-modules, voir par exemple, MAC-LANE, S., Homology (Springer-Verlag), Berlin, 1963, chap. 6.

des K-dérivations graduées de F (resp. de $\mathfrak{X}$ dans $Endgr_K(V)$) est F-linéaire, on dira que ρ est $\mathfrak{D}$-*régulière* (resp. $\mathfrak{J}$-*régulière*).

Un *opérateur d'Elie Cartan* de V vers $\mathfrak{X}$ est un couple

$$(D^*, d) \in Hom_K(V, Hom_K(\mathfrak{X}, F) \otimes_F V) \times Hom_K(F, Hom_K(\mathfrak{X}, F))$$

tel que

$$D^*(fv) = (df) \otimes v + f(D^*v) \qquad \text{pour } f \in F \text{ et } v \in V$$

$$(d(fg))X = ((df)X)g + f((dg)X) \qquad \text{pour } f, g \in F \text{ et } X \in \mathfrak{X}.$$

L'homomorphisme canonique

$$Hom_K(\mathfrak{X}, F) \otimes_F V \to Hom_K(\mathfrak{X}, V)$$

donne naissance à une application canonique de l'ensemble $\Gamma_K(V, \mathfrak{X})$ des opérateurs d'Elie Cartan de V vers $\mathfrak{X}$ dans l'ensemble $Hom_K(\mathfrak{X}, \hat{\mathfrak{J}}_K(V))$ des r.i. de $\mathfrak{X}$ vers V. Dans le cas des variétés différentiables modelées sur des espaces numériques, cette application canonique est bijective. Mais dans les situations générales les r.i. et les opérateurs d'Elie Cartan conduisent à deux formalismes de calcul différentiels éventuellement équivalents.

Dans le premier chapitre on donne les résultats basiques qui gravitent autour des notions de t.i.g., de r.i.g. et d'opérateurs d'Elie Cartan gradués, étudiées en elles-mêmes. On adopte ici des hypothèses très générales, lesquelles permettent d'étudier en détail les propriétés fondamentales de ces trois notions, en montrant la portée des hypothèses admises.

Soit $\gamma \in \{ \ldots, -1, 0, 1, \ldots \}$. On dira qu'une forme K-bi-linéaire $\mu : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ est (γ)-*commutative* resp. (γ)-*anti-commutative* si

$\mu(X, Y) = (-1)^{\deg X \deg Y + \gamma} \mu(Y, X)$ resp. $\mu(X, Y) = (-1)^{\deg X \deg Y + \gamma + 1} \mu(Y, X)$.

On note

$$\mathfrak{J}_\mu(X, Y, Z) = \sum_{Cyc} (-1)^{\deg X \deg Z} \mu(\mu(X, Y), Z).$$

On dira que μ est (γ)-*jacobienne* resp. *pair-alternée* si $\mathfrak{J}_\mu = 0$ resp. $\mu(X, X) = 0$ si X est de degré pair.

Une *structure de (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan gradué* sur un ensemble $\mathfrak{X}$ est définie par la donnée d'une structure d'espace (K, F)-linéaire gradué et d'une représentation infinitésimale graduée de degré 0, notée $\rho_C = (ad, \rho_D)$, de $\mathfrak{X}$ vers $\mathfrak{X}$ telle que $[\ ,\ ] : (X, Y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to (ad X)Y \in \mathfrak{X}$ soit (0)-graduée, (0)-anticommutative et pair-alternée. Une telle structure est appellée *régulière*, resp. structure de (K, F)-*espace d'Elie Cartan gradué* si de plus ρ_C est $\mathfrak{D}$-régulière, resp. $\mathfrak{J}_{[\ ,\ ]} = 0$.

Une *structure d'espace infinitésimal gradué* ($\mathfrak{J}$*-régulier*) sur un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan gradué $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ est définie par la donnée d'une r. i. g. de degré 0 ($\mathfrak{J}$-régulière), notée $\rho = (\rho_I, \rho'_D)$ de $\mathfrak{X}$ vers V telle que $\rho'_D = \rho_D$. La forme de courbure, notée Ω_ρ, d'un espace infinitésimal gradué (V, ρ) est l'application

$$\Omega_\rho = (\Omega_{\rho_I}, \Omega_{\rho_D}) : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \hat{\mathfrak{J}}gr_K(V)$$

définie par les identités :

$$\Omega_{\rho_I}(X, Y)v = \rho_I(X)\rho_I(Y)v - (-1)^{rs}\rho_I(Y)\rho_I(X)v - \rho_I([X, Y])v$$

$$\Omega_{\rho_D}(X, Y)f = [\rho_D(X), \rho_D(Y)]f - \rho_D([X, Y])f$$

où $r = deg\, X$, $s = deg\, Y$.

Dans le second chapitre on montre que chaque structure d'espace infinitésimal conduit à un calcul différentiel qui contient par exemple en plus des calculs déjà mentionnés le calcul sous-jacent aux connexions tensorielles de Bompiani [4], voir aussi Cossu [13]. On analyse soigneusement la portée de certaines hypothèses additionnelles : l'influence de la $\mathfrak{J}$-régularité, de la nullité de la forme de courbure. La théorie exposée couvre seulement le calcul différentiel de premier ordre, reste encore hors du schéma donné le calcul différentiel des jets d'ordre supérieur de M. Ehresmann(*).

Dans le développement de ce chapitre on montre que les hypothèses admises sont les plus générales, c'est-à-dire qu'elles sont nécessaires pour établir par exemple le calcul différentiel extérieur d'Elie Cartan comme un calcul algébrique autonome; ceci justifie la terminologie adoptée.

Le troisième chapitre est réservé à l'étude de quelques applications nouvelles. En dehors d'autres applications liées aux 2-formes alternées et aux F-projecteurs, on considère la suivante :

Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K, F)-espace d'Elie Cartan régulier et sans courbure, $\Omega_{\rho_D} = 0$. Soit $J \in End_F(\mathfrak{X})$. Si l'on pose

$$(ad_J X)Y = [X, Y]_J = [JX, Y] + [X, JY] - J[X, Y]$$

$$\mathfrak{N}_J(X, Y) = [JX, JY] - J[X, Y]_J,$$

alors $(\mathfrak{X}, (ad_J, \rho_D \circ J))$ est un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan et $\mathfrak{N}_J : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ est F-bilinéaire alternée. Si de plus $\mathfrak{N}_J = 0$, alors $(\mathfrak{X}, (ad_J, \rho_D \circ J))$ est un (K, F)-

(*) EHRESMANN, C., Les prolongements d'une variété différentiable I, ..., V., C. R. Acad. Sc. Paris, t. 233 (1951), pp. 598, 777, 1081; sur les connexions d'ordre supérieur, Atti del V Congresso dell'Unione Mat. Ital. Pavia-Torino 1955. (Cremonese) Roma, 1956 pp. 326-328.

espace d'Elie Cartan. La dérivation extérieure d_J et la r.i. de Lie θ_J sous-jacentes au (K, F)-pré- espace d'Elie Cartan $(\mathfrak{X}, (ad_J, \rho_D \circ J))$ jouent un rôle fondamental dans beaucoup de questions géométriques. Ceci et d'autres exemples justifient à posteriori l'étude de structures très générales, les (K, F)- pré-espaces d'Elie Cartan, introduites dans la présente thèse. On verra que des résultats assez généraux (théorème 11.2), quand ils sont appliqués aux (K, F)-pré-espaces d'Elie Cartan $(\mathfrak{X}, (ad_J, \rho_D \circ J))$, donnent des conditions nécessaires et suffisantes de nullité du tenseur de torsion $\mathfrak{N}_J$ associé à J.

III. Dans le §0 on donne un résultat (théorème 0.1) assez général qui permet la construction d'anneaux (γ)- gradués, (γ)- anti- commutatifs et (γ)- jacobiens. Dans ce paragraphe on codifie quelques résultats qui font partie du folklore de la littérature sur les dérivations graduées et l'on établit aussi les formules qui permettent de calculer les puissances arbitraires d'une dérivation graduée de degré quelconque (théorème 0.3).

Dans le §1 on fait une étude systématique des translations infinitésimales graduées. On donne des formules qui permettent la construction des extensions d'une translation infinitésimale à l'algèbre tensorielle, en particulier à l'algèbre extérieure, au module des formes multilinéaires, en particulier au module des formes multilinéaires alternées. Ces extensions sont la base même du calcul ici exposé.

Dans le §2 sont présentées les propriétés basiques de la notion de représentation infinitésimale (théorèmes 2.1 et 2.2). La théorie présentée sera dominée par cette notion; grosso modo on peut dire que l'objet du présent mémoire est l'étude de l'interaction des r.i. avec certaines r.i. spéciales, par exemple avec la r.i. adjointe *ad*.

Dans le §3 on étudie par rapport au produit de Grassmann associé à une forme bilinéaire quelconque les r.i. extensions de r.i.. Ce produit sera omniprésent dans le reste de la thèse.

Dans le §4 on introduit et on étudie les morphismes croisés et les opérateurs de connexions gradués. Ces opérateurs correspondent à une autre formulation des représentations infinitésimales graduées (théorème 4.1).

Dans le §5 à l'aide des morphismes croisés on introduit les opérateurs d'Elie Cartan et on donne le résultat fondamental qui établit le calcul différentiel absolu et extérieur sous-jacent à ces opérateurs (théorème 5.1 , comparer E. Cartan [9] chap. 8).

Dans le §6 on rappelle, sous la forme qui convient au présent travail, les règles de calcul de la représentation infinitésimale graduée $\mathfrak{i}$ de degré -1, laquelle est une extension de la représentation infinitésimale i appellée produit intérieur (*).

(*) Ce produit sous le nom d'opération (E) a été introduit par Goursat,E., a) Sur les invariants intégraux, J. Math. Pures Appl. (6), t. 4 (1908), 331-365; b) Sur quelques

Le §7 a été écrit pour satisfaire le goût de ceux des géomètres qui aiment étudier les objets géométriques au moyen de coordonnées locales. Dans ce paragraphe on explicite les t.i. et les r.i. au moyen de bases (coordonnées). On établit des formules qui donnent en particulier les formules classiques des connexions linéaires sur les variétés différentiables modelées sur des espaces numériques.

Dans le §8 on introduit la notion de structure de pré-espace d'Elie Cartan gradué et on donne les premiers exemples de ces structures. On établit (théorème 8.1.) que l'ensemble des t.i.g. sur un module gradué constitue un modèle naturel d'espace d'Elie Cartan gradué régulier et sans courbure. On peut dire que c'est sur ce modèle qu'on peut ériger (du point de vue algébrique évidemment) la Géométrie différentielle.

Dans le §9 on introduit la notion basique d'espace infinitésimal gradué laquelle dominera le reste du travail. Le but même de cette thèse est de montrer que la partie algébrique de la Géométrie différentielle peut être fondée sur la théorie des espaces infinitésimaux.

Dans le §10 on démontre que chaque couple constitué par un pré-espace d'Elie Cartan $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ et par un espace infinitésimal (V, ρ) sur $\mathfrak{X}$ donne naissance à trois espèces d'objets : la représentation infinitésimale contravariante de Lie, notée $\Box$, la représentation infinitésimale covariante de Lie, notée θ, et la translation infinitésimale extérieure, notée d. Les r.i. $\Box$ et θ sont les r.i. associées à la r.i. (ad, ρ_D) d'après les §2, 3. On donne la formule fondamentale (formule (10.8)) qui établit une liaison entre les t.i. $\theta(X), \Box(X)$ et d.

Dans le §11 on établit des résultats fondamentaux (théorèmes 11.2, 11.3) sur la forme de courbure associée à une structure d'espace infinitésimal. Les formules obtenues, qui donnent les relations précises entre la t.i. extérieure, la r.i. de Lie et la forme de courbure sous-jacente à un espace infinitésimal, admettent des applications importantes (voir §18) dans le cas de modèles de pré-espaces d'Elie Cartan qui ne sont pas nécessairement définis comme l'espace d'Elie Cartan canoniquement associé à une variété différentiable.

Dans le §12 à l'aide des résultats obtenus dans les paragraphes antérieurs on indique la formule générale (théorème 12.1) qui permet d'exprimer la t.i. extérieure au moyen de la différentielle absolue associée à une connexion linéaire arbitraire.

Sous le nom de formalisme d'Elie Cartan on donne dans le §13 une autre formulation des espaces infinitésimaux, plus en accord avec les exposés habituels qu'on

points de la théorie des invariants intégraux, ibidem (7), t. 1 (1915), 241-250, où est établie la formule fondamentale (10.6), voir aussi E. Cartan., Invariants intégraux, Paris (Hermann) 1922 p. 84. Un exposé systématique et purement arithmétique de ce produit, sous le nom de « substitution intégrale », apparait dans De Donder, T., Théorie des Invariants intégraux, Paris (Gauthier-Villars) 1927, chap. VI. L'extension i est due à Frölicher-Nijenhuis [18] .

trouve en Géométrie différentielle et on complète les §4, 5 (théorème 13.1).

Le §14 est réservé à la construction d'exemples non explicitement apparus dans la littérature, mais qui permettent mieux d'apprécier la portée de la théorie présentée. Une étude plus détaillée d'un exemple donné ici sera faite dans le chap. III.

Dans le §15 dans le cadre des espaces infinitésimaux qui lui est propre, on établit la théorie de Frölicher-Nijenhuis [18] (à l'exception du théorème de décomposition, voir §16) pour les t.i.g. associées à des endomorphismes multilinéaires alternés d'un espace d'Elie Cartan.

Dans le §16 on fait une analyse détaillée de la structure de l'espace d'Elie Cartan $\mathfrak{D}_K(F)$. Sous le nom de structures (K, F)-différentiables on étudie les couples $(\mathfrak{X}, \Omega_K)$ qui sont stables pour certains opérateurs liés à la nature spéciale de l'espace d'Elie Cartan $\mathfrak{D}_K(F)$. Ces structures sont suffisamment riches pour qu'on puisse établir des résultats précis (théorèmes 16.1, 16.2, 16.3) sur le comportement des dérivées graduées de l'algèbre différentielle Ω_K.

Le §17 a été écrit pour servir de lien avec la littérature classique de l'analyse tensorielle, notamment avec Schouten [40], Struick [41] et Kähler [21] .

Dans le §18 on étudie les objets géométriques qui sur des C^∞-variétés sont réalisés par des C^∞-champs d'endomorphismes de rang constant. On donne des conditions nécessaires et suffisantes pour la nullité de la forme de torsion $\mathfrak{N}_J$.

Le §19 concerne la géométrie différentielle des 2-formes alternées Ω sur un espace d'Elie Cartan $\mathfrak{X}$ quand on suppose que $Ker(s_\Omega)$ possède un F-supplémentaire dans $\mathfrak{X}$, où $s_\Omega : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^*$ est définie par $s_\Omega(X)Y = \Omega(X, Y)$. On appellera ces structures presque hor-symplectiques [1]; elles constituent une extension naturelle des structures presque symplectiques (Ehresmann [14], [15]). On établit les relations précises entre Ω et la parenthèse de Poisson sous-jacente à de telles structures. On analyse la portée des hypothèses additionelles : $i\langle Ker(s_\Omega)\rangle d\Omega = 0$ et $d\Omega = 0$. De telles structures interviennent dans beaucoup de questions de Géométrie differentielle; elles sont strictement liées aux F-endomorphismes J de $\mathfrak{X}$ tels que $J^3 + J = 0$ lesquels définissent les structures presque hor-complexes [2].

Dans le §20 on étudie les structures hor-ehresmanniennes [2], c'est-à-dire les structures géométriques qui sur des C^∞-variétés sont réalisées par la donnée d'un C^∞-champ G de formes bilinéaires symétriques (non dégénérées) et d'un C^∞-champ J d'endomorphismes de rang constant tel que $J^3 + J = 0$ et qui laisse invariant la métrique G. Pour ces structures définies sur des espaces d'Elie Cartan on établit des formules fondamentales liant $G, \mathfrak{N}_J$ et la structure presque hor-symplectique définie par $\Omega(X, Y) = G(X, JY)$; on prouve un résultat (théorème 20.4) bien connu dans le cas des structures kähleriennes.

IV. En cherchant à développer le calcul différentiel absolu en accord avec les idées ébauchées par E. Cartan, [6], [7], [8] et en d'autres travaux de cet auteur, on est conduit de façon naturelle aux notions de t.i., r.i. et d'opérateurs d'Elie Cartan. Bochner [3] a mis en évidence un point de vue analogue à celui d'Elie Cartan. Mais l'idée même de fonder le calcul différentiel absolu et le calcul différentiel extérieur comme des calculs algébriques autonomes au moyen de lois de dérivations formelles (r.i. dans la terminologie du texte) est en germe depuis les premiers travaux de Ricci [37] et E. Cartan [7]; on la trouve explicitement dans Schouten[39] chap. II, §2 pp. 61-64, [40], Chap. III, §2, pp. 123-125 et dans Struik[41], chap. II, §2 p. 14. Les fondements de ces calculs dans le cas des variétés différentiables modelées sur des espaces de Banach ont été donnés par Michal [29], [30], qui utilise aussi des lois de dérivations formelles. A partir des travaux de Chevalley-Eilenberg [12], Koszul [27], H. Cartan [10] et Hochschild-Serre [23], la technique de construction des opérateurs de dérivations de la théorie de la cohomologie des algèbres de Lie, sous l'influence de Koszul, a été popularisée dans les exposés traitant des dérivées covariantes, de Lie et extérieures, voir par exemple Koszul [28] et Kobayashi-Nomizu [26]. Ces trois derniers auteurs se bornent, à cause même des hypothèses restrictives qu'ils admettent, à présenter la théorie des dérivées covariantes, de Lie et extérieure, d'une façon intrinsèque sans les éléments parasitaires, mais non d'une façon unifiée, générale permettant d'inclure comme des cas particuliers tous les cas spéciaux déjà mentionnés.

Pour rester dans la limite indiquée dans le sous-titre de ce mémoire, on laisse de côté l'étude de la cohomologie de De Rham, dont la théorie peut être établie pour des espaces infinitésimaux $\mathfrak{J}$-réguliers sans courbure définis sur un espace d'Elie Cartan régulier et sans courbure, voir Palais [36]. Quant à la possibilité de réduire la cohomologie de De Rham par un procédé semblable à celui qui est utilisé par Eilenberg-Cartan [11] chap. 13 pour réduire la cohomologie des algèbres de Lie à celle du foncteur Ext, le lecteur pourra consulter les travaux récents de Hochschild-Kostant-Rosemberg [24] et Rinehart [38]. Dans le contexte de la théorie exposée on peut élaborer la théorie des classes de Chern; pour cela on peut suivre Flanders [17] ou le travail récent d'Oseki [35]. Un exposé d'ensemble de cette théorie ainsi que de la théorie des formes harmoniques de Hodge-De Rham fera l'objet d'une autre publication.

V. Quand $K = Z$ et F est un corps, Herz [22] sous le nom de pseudo-algèbres de Lie a déjà considéré, dans un autre but, les structures définies par la donnée d'une structure de F-espace vectoriel et d'une structure d'anneau de Lie sur $\mathfrak{X}$ telles que $[X, fY] = f'X + f[X, Y]$, où f' dépend seulement de f. On peut identifier ces structures aux structures d'espace d'Elie Cartan sans courbure (proposition 8.1) et ces structures sont nécessairement régulières si $dim_F \mathfrak{X} > 1$. Les (K, F)-espaces d'Elie Cartan réguliers et sans courbure correspondent aux «Lie d-ring over F» et les espaces $\mathfrak{X}$-infinitésimaux $\mathfrak{I}$-réguliers et sans courbure correspondent aux « $\mathfrak{X}$- modules» considérés par Palais [36].

VI. Les résultats de ce mémoire ont fait l'objet de trois exposés en 1964, dans le cadre du Séminaire de Topologie et Géométrie différentielle dirigé par Monsieur C. Ehresmann; un résumé d'une première rédaction, avec une terminologie un peu différente, a paru dans trois Notes aux C.R. Acad. Sc. Paris, t. 258 (1964), pp. 3624- 3627 , 3956-3959, 5330-5333.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Charles Ehresmann pour l'aide qu'il a bien voulu m'accorder dans mes recherches, par ses conseils et par son appui généreux pendant l'élaboration de cette étude.

Je remercie Monsieur A. Lichnerowicz, qui a bien voulu me proposer un sujet de seconde thèse et je remercie aussi Monsieur M. Lazard d'avoir accepté de faire partie du Jury de cette thèse.

Ce travail a été rédigé alors que l'auteur bénéficiait d'une bourse du Conselho Nacional de Pesquisas do Brasil.

Conventions.

Les notations et la terminologie qui ne sont pas indiquées explicitement dans le texte sont conformes à celles de N. Bourbaki. En principe il suffit de se reporter aux chap. 2 et 3 du livre *Algèbre* de cet auteur.

Pour p entier > 0 : on note $L_F^p(\mathfrak{X}, V)$ le F-module des formes p-multilinéaires du F-module $\mathfrak{X}$ dans le F-module V, ou le F-module $Hom_F(\otimes_F^p(\mathfrak{X}), V)$; on note $A_F^p(\mathfrak{X}, V)$ le F-module des formes p-multilinéaires alternées du F-module $\mathfrak{X}$ dans le F-module V, ou le F-module $Hom_F(\Lambda_F^p(\mathfrak{X}), V)$.

On écrira

$$L_F^0(\mathfrak{X}, V) = A_F^0(\mathfrak{X}, V) = V, \quad L_F^1(\mathfrak{X}, V) = A_F^1(\mathfrak{X}, V) = Hom_F(\mathfrak{X}, V),$$

$$\otimes_F^0(V) = \Lambda_F^0(V) = F, \qquad \otimes_F^1(V) = \Lambda_F^1(V) = V$$

$$GL_F(\mathfrak{X}) = \{ J \mid J \in End_F(V) \text{ et } J \text{ est bijectif} \}, A_F(\mathfrak{X}) = A_F(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}).$$

On note $Z = \{ \ldots, -1, 0, 1, \ldots \}$. Tous les groupes (commutatifs) gradués seront toujours supposés de type Z et tous leurs éléments de degré < 0 coïncident avec leur élément neutre noté 0.

Si $\omega \in L_F^p(\mathfrak{X}, V)$ et $u \in \otimes_F^p(\mathfrak{X})$, on pose

$$\langle u, \omega \rangle = \begin{cases} \omega(u) \text{ si } p > 0, \\ u\omega \text{ si } p \leq 0. \end{cases}$$

Soit l'application

$$f : G \to H ;$$

si $W \subset G$, $U \subset H$ et $f \langle W \rangle \subset U$, on appelle *contraction* (ou *sous-application*) de f à (W, U) l'application $f' : W \to U$ telle que $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in W$.

Par abus de langage, on notera souvent par la même lettre les contractions (donc aussi les restrictions) d'une relation fonctionnelle dénotée par un signe spécifique, par exemple $\tilde{\rho}_I, i, \imath, \square, \diamond, \theta, d, \boxtimes, \ldots$

On omettra les définitions de quelques notations dont le sens est généralement clair d'après le contexte. On omettra presque toujours les preuves de linéarité, qui se font sans difficulté.

Pour abréger les définitions et les démonstrations, on fera la convention suivante : les ensembles de symboles, en particulier les mots ou lettres ou membres de phrases ou membres de formules, placés entre les signes $\ulcorner\urcorner$, $\ulcorner_j\urcorner_j$ peuvent être lus ou supprimés simultanément dans un énoncé ou dans une démonstration.

On note J_G l'automorphisme canonique d'un groupe gradué G

$$J_G(g) = (-1)^{\deg g}\, g, \text{ pour } g \in G.$$

Si G est un groupe additif gradué, dont la graduation est triviale, on identifiera G à G^o et J_G à l'application identité de G notée 1_G.

On supprimera toujours le mot « gradué (e) » du nom des structures dont les graduations sous-jacentes sont triviales.

Un A - module où A n'a pas d'unité signifie un pseudomodule sur A dans le sens de Bourbaki (Algèbre, chap. II, Appendice).

Un groupe commutatif sera souvent appelé groupe *additif* et sa loi de composition notée additivement.

Une famille d'éléments d'un ensemble sera notée souvent par $(e_i \mid i \in I)$.

CHAPITRE I

REPRESENTATIONS INFINITESIMALES GRADUEES

0. Dérivations sur les algèbres graduées.

Etant donnés deux groupes gradués

$$(A,(A^p \mid p \in Z)) \ , \ (G,(G^q \mid q \in Z))$$

et $\gamma \in Z$, on dira que les graduations sous-jacentes à ces deux groupes gradués sont (γ)-*compatibles* avec la loi de composition externe (resp. interne), notée

$$\star : A \times G \to G \ (resp. \ \bullet : G \times G \to G),$$

si l'on a la relation

$$A^p \star G^q \subset G^{p+q+\gamma} \ (resp. \ G^p \bullet G^q \subset G^{p+q+\gamma})$$

quels que soient p, q dans Z.

On dira que la loi interne $\bullet$ est (γ)-*commutative* (resp. (γ)-*anti-commutative*) si

$$P \bullet Q = (-1)^{pq+\gamma} Q \bullet P \ (resp. \ P \bullet Q = (-1)^{pq+1+\gamma} Q \bullet P),$$

où $p = deg(P)$ et $q = deg(Q)$.

On a $G^{-\gamma} \bullet G^{-\gamma} \subset G^{-\gamma}$. De plus s'il existe un élément neutre 1 pour $\bullet$, alors $1 \in G^{-\gamma}$ et $G = (0)$ si $\gamma > 0$.

Une *structure d'anneau jacobien (γ)-gradué ((γ)-commutatif* (resp. (γ)-*anti-commutatif*)) sur un ensemble G est définie par la donnée d'une loi interne sur G, notée [,], et d'une structure de groupe commutatif gradué sur G, telles que la graduation soit (γ)-compatible avec [,],

$$[\, G^p, G^q \,] \subset G^{p+q+\gamma} \text{ pour chaque } p, q \in Z,$$

que la loi [,] soit bi-additive par rapport à la structure de groupe additif et que $J = 0$, où $\mathfrak{J}$ est l'application de $G \times G \times G$ dans G multi-additive caractérisée au moyen de l'identité suivante :

$$(0,1) \qquad \mathfrak{J}(P,Q,R) = \sum_{Cyc} (-1)^{pr} [[\, P, Q \,], R \,]$$

où $P \in G^p, Q \in G^q, R \in G^r$ (et que [,] soit (γ)-commutative (resp. (γ)-anti-commutative)).

PROPOSITION 0.1. *Soit G un groupe commutatif gradué dont la graduation soit (γ)-compatible avec une loi interne [,],(γ)- anti-commutative (resp. (γ)-commutative); alors*

$$(0.1)_a \qquad \mathfrak{J}(P,Q,R) = \sum_{Cyc} (-1)^{p(r+\gamma)+1+\gamma} [P,[Q,R]],$$
$$(\text{resp. } (0.1)_c \qquad \mathfrak{J}(P,Q,R) = \sum_{Cyc} (-1)^{p(r+\gamma)+\gamma} [P,[Q,R]]\ ).$$

COROLLAIRE 0.1. *La donnée sur l'ensemble G d'une structure de groupe commutatif gradué et d'une loi de composition interne bi-additive par rapport à la structure de groupe additif, notée* $[\ ,\ ]$, *définit une structure d'anneau jacobien* (γ)*-anti-commutatif (resp.* (γ)*-commutatif) si, et seulement si, l'application* $\mathfrak{J}$ *définie par* $(0.1)_a$ *(resp. définie par* $(0.1)_c$*) est égale à* 0.

Les anneaux jacobiens (0)-gradués et (0)-anti-commutatifs tels que

$$[P,P] = 0 \text{ pour tout } P \in G^{2p} \text{ et tout } p \in Z,$$

sont appelés *anneaux de Lie gradués.*

Les anneaux jacobiens (-1)-gradués (-1)-anti-commutatifs seront appelés *anneaux de Whitehead.*

THEOREME 0.1. *Soit* $\mathfrak{X}$ *un groupe additif gradué dont la graduation soit* (γ)*-compatible avec une application bi-additive* $\bullet$ *de* $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ *dans* $\mathfrak{X}$. *Si pour* $X \in \mathfrak{X}^r$, $Y \in \mathfrak{X}^s$ *et* $Z \in \mathfrak{X}^t$ *on pose*

$$\{X,Y\} = X \bullet Y - (-1)^{(r-\gamma)(s-\gamma)}\ Y \bullet X$$

et si

$$(0.2) \qquad X \bullet (Y \bullet Z) - (-1)^{(t-\gamma)(s-\gamma)} X \bullet (Z \bullet Y) =$$
$$= (X \bullet Y) \bullet Z - (-1)^{(t-\gamma)(s-\gamma)} (X \bullet Z) \bullet Y$$

alors

$$(0.3) \qquad \{X,Y\} = (-1)^{(r-\gamma)(s-\gamma)+1} \{Y,X\}$$

$$(0.4) \qquad \sum_{Cyc} (-1)^{(r-\gamma)(t-\gamma)} \{\{X,Y\},Z\} = 0.$$

En particulier on a (0.3) *et* (0.4) *si* $\bullet$ *est associative. Si l'on pose* $\overline{\mathfrak{X}}^r = \mathfrak{X}^{r-\gamma}$, *alors les formules* (0.3) *et* (0.4) *assurent que* $\mathfrak{X}$ *muni de la loi de composition* $\{\ ,\ \}$ *et de la nouvelle graduation* $(\overline{\mathfrak{X}}^r \mid r \in Z)$ *déduite de* $(\mathfrak{X}^s \mid s \in Z)$ *est un anneau de Lie gradué:* $\{\overline{\mathfrak{X}}^r, \overline{\mathfrak{X}}^s\} \subset \overline{\mathfrak{X}}^{r+s}$

DEMONSTRATION. Dans la preuve on ne restreint pas la généralité si l'on suppose $\gamma = 0$. La formule (0.3) est immédiate. Par suite il suffit de montrer l'identité

$$\sum_{Cyc} (-1)^{rt} \{\{X,Y\},Z\} = 0.$$

En effet, à cause de la définition de l'accolade on peut écrire :

$$\begin{aligned}(-1)^{rt}\{\{X,Y\},Z\} &= (-1)^{rt}\{X\bullet Y-(-1)^{rs}Y\bullet X, Z\}\\ &= (-1)^{rt}(X\bullet Y)\bullet Z-(-1)^{r(s+t)}(Y\bullet X)\bullet Z\\ &\quad -(-1)^{st}Z\bullet(X\bullet Y)+(-1)^{s(r+t)}Z\bullet(Y\bullet X)\end{aligned}$$

Par conséquent on a aussi

$$\begin{aligned}(-1)^{ts}\{\{Z,X\},Y\} &= (-1)^{ts}(Z\bullet X)\bullet Y-(-1)^{t(r+s)}(X\bullet Z)\bullet Y\\ &\quad -(-1)^{rs}Y\bullet(Z\bullet X)+(-1)^{t(s+r)}Y\bullet(X\bullet Z),\\ (-1)^{sr}\{\{Y,Z\},X\} &= (-1)^{sr}(Y\bullet Z)\bullet X-(-1)^{s(t+r)}(Z\bullet Y)\bullet X\\ &\quad -(-1)^{tr}X\bullet(Y\bullet Z)+(-1)^{t(s+r)}X\bullet(Z\bullet Y).\end{aligned}$$

Donc, en vertu de la définition de $\mathfrak{J}$ au moyen de (0.1), on a :

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}(X,Y,Z) &= \sum_{Cyc}(-1)^{rt}(X\bullet Y)\bullet Z-\sum_{Cyc}(-1)^{t(r+s)}(X\bullet Z)\bullet Y\\ &\quad -\sum_{Cyc}(-1)^{tr}X\bullet(Y\bullet Z)+\sum_{Cyc}(-1)^{t(s+r)}X\bullet(Z\bullet Y).\end{aligned}$$

Or, d'après (0.2) on a :

$$\begin{aligned}&(-1)^{rt}(X\bullet Y)\bullet Z-(-1)^{t(r+s)}(X\bullet Z)\bullet Y=\\ &(-1)^{tr}X\bullet(Y\bullet Z)-(-1)^{t(s+r)}X\bullet(Z\bullet Y),\end{aligned}$$

donc $\mathfrak{J}(X,Y,Z)=0$.

Une *structure d'anneau gradué* [*(0)-commutatif* (resp. *commutatif*)] sur un ensemble A est définie par la donnée d'une loi de composition interne sur A, dite *produit*, et d'une structure de groupe commutatif gradué sur A telles que la graduation soit (0)-compatible avec le produit et que le produit soit bi-additif, associatif [et (0)-commutatif (resp. commutatif)].

Soit A un anneau gradué [possédant un élément unité]. Une *structure de A-module gradué* sur un ensemble $\mathfrak{X}$ est définie par la donnée d'une structure de A-module sur $\mathfrak{X}$ et d'une graduation sur le groupe additif sous-jacent à la structure de A-module telles que la graduation soit (0)-compatible avec la loi externe sous-jacente à la structure de A-module.

Soient $\mathfrak{X}$ un A-module gradué et $\gamma\in Z$. Nous appellerons *structure de A-module gradué à $\mathfrak{X}$-opérateurs (γ)-gradués* sur un ensemble V une structure constituée par une structure de A-module gradué sur V et par une application $\rho:\mathfrak{X}\to Endgr_A(V)$ qui est A-linéaire graduée de degré γ (généralement ρ est de type $\mathfrak{Y}$, où $\mathfrak{Y}$ est un sous-A-module de $Endgr_A(V)$ tel que $Im(\rho)\subset\mathfrak{Y}$).

On peut considérer une structure de A-module gradué à $\mathfrak{X}$-opérateurs (γ)-gradués sur un ensemble V comme étant définie par la donnée d'une structure de A-

module gradué sur V et d'une loi de composition externe

$$\star : \mathfrak{X} \times V \to V, \; X \star v = \rho(X)v$$

telle que les graduations données soient (γ)-compatibles avec la loi externe $\star$ et de plus

$$(X+Y) \star v = X \star v + Y \star v, \; X \star (u+v) = X \star u + X \star v,$$

$$(\alpha X) \star v = X \star (\alpha v) = \alpha (X \star v)$$

où $X, Y \in \mathfrak{X}$, $u, v \in V$ et $\alpha \in A$.

Une structure de A-module gradué à $\mathfrak{X}$-opérateurs (0)-gradués sera appelée *structure de A-module gradué à $\mathfrak{X}$-opérateurs gradués.*

Soient V un module gradué sur l'anneau gradué A et $C(A)$ le centre de A. Si l'on considère A comme $C(A)$-module, alors V est un $C(A)$-module gradué à A-opérateurs gradués. Soit $a \in A$; si l'homothétie de rapport a de V est A-linéaire et V est A-fidèle, alors $a \in C(A)$.

Soient V et V' deux modules gradués sur un anneau gradué A. Soient $T : V \to V'$ une application A-linéaire et $\gamma \in Z$; on dit que T est *gradué de degré* γ si l'on a

$$T(V^p) \subset V'^{p+\gamma} \text{ pour tout } p \in Z.$$

On désignera par $\overset{\gamma}{Homgr}_A(V, V')$ le groupe additif de toutes les applications A-linéaires de degré γ de V dans V'. Le groupe additif $\overset{\gamma}{Homgr}_A(V, V')$ est un sous-groupe du groupe additif $Hom_A(V, V')$ de toutes les applications A-linéaires de V dans V'. On note $Homgr_A(V, V')$ le sous-groupe additif de $Hom_A(V, V')$ somme directe de la famille $(\overset{\gamma}{Homgr}_A(V, V') \mid \gamma \in Z)$. Supposons que de plus V' soit un A-module à A-opérateurs, par suite $a(bv') = b(av')$ pour $a, b \in A$ et $v' \in V'$, alors $Hom_A(V, V')$ est un A-module à A-opérateurs et $Homgr_A(V, V')$ est un sous-A-module à A-opérateurs de $Hom_A(V, V')$. D'une façon plus précise $Homgr_A(V, V')$ est un A-module gradué à A-opérateurs gradués. L'ensemble $Homgr_A(V', V')$ muni de la structure de sous-anneau de $End_A(V')$ est un anneau gradué, que l'on note $Endgr_A(V')$.

COROLLAIRE 0.2. *Soit V un A-module gradué à A-opérateurs gradués. Si* $[\,,\,]$ *note la loi de composition interne sur $Endgr_A(V)$ caractérisée au moyen de l'identité*

$$[T, T'] = T \circ T' - (-1)^{tt'} T' \circ T \quad si \quad T \in \overset{t}{Endgr}_A(V) \quad et \quad T' \in \overset{t'}{Endgr}_A(V),$$

alors ce crochet et la structure de A-module sur $Endgr_A(V)$ définissent sur $Endgr_A(V)$ une structure de A-algèbre de Lie graduée.

Soit K un anneau gradué (commutatif) possédant un élément unité. Une *structure de K-algèbre graduée* sur un ensemble F est définie par la donnée d'une structure de K-module gradué et par une loi de composition interne associative sur F définie par une structure de K-module gradué à F-opérateurs gradués.

Soient F et F' deux K-algèbres graduées. Soit $\varphi \in \overset{o}{Homgr}_K(F, F')$ tel que $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$; on dit que D est une *(K, φ)-dérivation de degré t* de F dans F' si

$$D \in \overset{t}{Homgr}_K(F, F'),$$

$$D(fg) = (Df)(\varphi g) + J_{F'}^{t}(\varphi f)(Dg)$$

quels que soient $f, g \in F$ et où $J_{F'}$ est l'automorphisme de la K-algèbre F' tel que pour tout $p \in Z$,

$$J_{F'}(f') = (-1)^p f' \text{ quel que soit } f' \in F'^p.$$

Une $(K, 1_F)$-dérivation de degré t, où 1_F est l'application identique de F, est dite *K-dérivation de degré t*. On note

$$\mathfrak{D}^t_{gr_K}(F) \text{ (resp. } \mathfrak{D}^t_{gr_{K,\varphi}}(F, F'))$$

le groupe additif des K-dérivations (resp. des (K, φ)-dérivations) de degré t de F (resp. de F dans F'). Le groupe additif $\mathfrak{D}^t_{gr_K}(F)$ est un sous-groupe du groupe additif $Endgr_K(F)$. On note $\mathfrak{D}gr_K(F)$ le sous-groupe additif de $Endgr_K(F)$ somme directe de la famille $(\overset{t}{\mathfrak{D}gr}_K(F) \mid t \in Z)$. On vérifie que $\mathfrak{D}gr_K(F)$ est un sous-K-module gradué à K-opérateurs gradués de $Endgr_K(F)$.

Si l'on suppose que F est (0)-commutatif, alors $\mathfrak{D}gr_K(F)$ est un sous-F-module gradué à F-opérateurs gradués du F-module gradué à F-opérateurs gradués $Endgr_K(F)$.

THEOREME 0.2. *Soient F, F', G et G' des K-algèbres graduées. Soient*

$$D \in \mathfrak{D}^i_{gr_{K,\varphi}}(F, F'),\ D' \in \mathfrak{D}^i_{gr_{K,\varphi'}}(G, G')$$
$$d \in \mathfrak{D}^j_{gr_{K,\psi}}(F, G),\ d' \in \mathfrak{D}^j_{gr_{K,\psi'}}(F', G');$$

si

$$\psi' \circ \varphi = \varphi' \circ \psi$$

$$\psi' \circ D = D' \circ \psi \quad et \quad d' \circ \varphi = \varphi' \circ d$$

$$\begin{tikzcd} G' & G \arrow[l, "D'"', "\varphi'"] \\ F' \arrow[u, "d'", "\psi'"'] & F \arrow[l, "\varphi"', "D"] \arrow[u, "\psi", "d"'] \end{tikzcd}$$

alors

$$D' \circ d - (-1)^{ij} d' \circ D \in \mathfrak{D}^{i+j}_{gr_{K,\psi' \circ \varphi}}(F, G')$$

DEMONSTRATION. En effet, soient $f_1, f_2 \in F$, alors

$$(D' \circ d)(f_1 . f_2) = D'\{d(f_1 . f_2)\} = D'\{d(f_1).\psi(f_2) + J_G^j(\psi(f_1)) - d(f_2)\}$$
$$= D'\{(df_1)(\psi f_2)\} + D'\{J_G^j(\psi f_1)(df_2)\}$$

$$\begin{aligned}&= (D'df_1)(\varphi'\psi f_2) + (J^i_{G'}\varphi' df_1)(D'\psi f_2) +\\&+ (D'J^j_G\psi f_1)(\varphi' df_2) + (J^i_{G'}\varphi' J^j_G\psi f_1)(D'df_2)\\&= (D'df_1)(\varphi'\psi f_2) + (-1)^{ij}(\varphi' dJ^i_{F'}f_1)(\psi' Df_2)\\&+ (-1)^{i\cdot j}(J^j_{G'}\psi' Df_1)(d'\varphi f_2) + (J^{i+j}_G\varphi'\psi f_1)(D'df_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d'\circ D)(f_1.f_2) &= d'\{D(f_1.f_2)\} = d'\{(Df_1)(\varphi f_2) + (J^i_{F'}\varphi f_1)(Df_2)\}\\&= d'\{(Df_1)(\varphi f_2)\} + d'\{(J^i_{F'}\varphi f_1)(Df_2)\}\\&= (d'Df_1)(\psi'\varphi f_2) + (J^j_{G'}\psi' Df_1)(d'\varphi f_2)\\&+ (d'J^i_{F'}\varphi f_1)(\psi' Df_2) + (J^j_{G'}\psi' J^i_{F'}\varphi f_1)(d'Df_2)\\&= (d'Df_1)(\psi'\varphi f_2) + (J^j_{G'}\psi' Df_1)(d'\varphi f_2)\\&+ (\varphi' dJ^i_{F'}f_1)(\psi' Df_2) + (J^{i+j}_{G'}\varphi'\psi f_1)(d'Df_2).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}&(D'\circ d)(f_1.f_2) - (-1)^{i\cdot j}(d'\circ D) =\\&= (D'df_1)(\varphi'\psi f_2) - (-1)^{i\cdot j}(d'Df_1)(\varphi'\psi f_2)\\&+ (J^{i+j}_{G'}\varphi'\psi f_1)(D'df_2) - (-1)^{i\cdot j}(J^{i+j}_G\varphi'\psi f_1)(d'Df_2)\\&= \{(D'\circ d - (-1)^{ij}d'\circ D)f_1\}(\varphi'\psi f_2) + (J^{i+j}_{G'}\varphi'\psi f_1)\{(D'\circ d - (-1)^{ij}d'\circ D)f_2\}.\end{aligned}$$

Du corollaire 0.2, du théorème 0.1 et de la définition du K-module $\mathfrak{D}gr_K(F)$ il résulte:

COROLLAIRE 0.3. *La structure de K-module sur $\mathfrak{D}gr_K(F)$ et le crochet $[\,,\,]$ de deux éléments de $\mathfrak{D}gr_K(F)$ caractérisé au moyen de l'identité*

$$[D, D']f = (D\circ D' - (-1)^{tt'}D'\circ D)f$$

où $D \in \overset{t}{\mathfrak{D}gr}_K(F)$, $D' \in \overset{t'}{\mathfrak{D}gr}_K(F)$ et $f \in F$, définissent une structure de K-algèbre de Lie graduée sur $\mathfrak{D}gr_K(F)$. De plus

$$[D, fD'] = (Df)D' + (J_F(f))[D, D'] .$$

Soit A une K-algèbre graduée (0)-commutative. Soient $r, s \geq 0$. Si $\omega \in A$ et $D \in \mathfrak{D}gr_K(A)$, alors

$$deg(D^{2r}\omega) = (2r\,deg\,D + deg\,\omega)$$

$$deg(D^{2r-1}\omega) = ((2r-1)\,deg\,D + deg\,\omega).$$

Donc

$$(-1)^{deg\,D^{2r}\omega} = (-1)^{deg\,\omega},$$

$$(-1)^{deg\,D^{2r-1}\omega} = \begin{cases} 1 \text{ si } deg\,D \text{ est impair et } deg\,\omega \text{ est impair}\\ (-1)^{deg\,\omega} \text{ si } deg\,D \text{ est pair}\\ (-1)^{deg\,D} \text{ si } deg\,\omega \text{ est pair,}\end{cases}$$

$$(-1)^{(\deg D^{2r}\omega)(\deg D^{2r-1}\omega)} = \begin{cases} -1 & \text{si } \deg D \text{ est pair et } \deg\omega \text{ est impair} \\ 1 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

THEOREME 0.3. *Soient A une K-algèbre graduée (0)-commutative, $D \in \mathfrak{D}gr_K(A)$, $\omega \in A$ et $r, s \geq 0$. Alors :*

I. Si D ou ω est de degré pair, alors

$$D(D^{2r}\omega)^{2s-1} = (2s-1)D^{2r+1}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-2}. \tag{0.5}$$

II. Si $\deg D$ est impair et $\deg\omega$ est impair, alors

$$D(D^{2r}\omega)^{2s-1} = D^{2r+1}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-2}. \tag{0.6}$$

III. Si est de degré pair ou si ω est de degré impair, alors

$$D(D^{2r-1}\omega)^{s} = sD^{2r}\omega(D^{2r-1}\omega)^{s-1}. \tag{0.7}$$

IV. Si $\deg D$ est impair et $\deg\omega$ est pair, alors

$$D(D^{2r}\omega)^{2s} = 2sD^{2r+1}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-1}. \tag{0.8}$$

DEMONSTRATION. Les preuves de I, II et III seront faites par induction sur s. Pour $s = 1$ les formules (0.5), (0.6) et (0.7) sont vraies.

1. Avec les hypothèses de I supposons que (0.5) soit vrai pour s. Alors

$$\begin{aligned}
D(D^{2r}\omega)^{2(s+1)-1} &= (D^{2r+1}\omega)(D^{2r}\omega)^{2s} + (-1)^{\deg\omega}D^{2r}\omega\{D(D^{2r}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-1}\} \\
&= (D^{2r+1}\omega)(D^{2r}\omega)^{2s} \\
&\quad + (-1)^{\deg\omega}D^{2r}\omega\{D^{2r+1}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-1} + \\
&\qquad + (-1)^{\deg\omega}(D^{2r}\omega)D(D^{2r}\omega)^{2s-1}\} \\
&= (D^{2r+1}\omega)(D^{2r}\omega)^{2s} \\
&\quad + (-1)^{\deg\omega}(-1)^{(\deg D^{2r}\omega)(\deg D^{2r+1}\omega)}(D^{2r+1}\omega)(D^{2r}\omega)^{2s} \\
&\quad + (2s-1)(D^{2r}\omega)^{2}D^{2r+1}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-2}
\end{aligned}$$

or en vertu des hypothèses de I,

$$(-1)^{\deg\omega}(-1)^{(\deg D^{2r}\omega)(\deg D^{2r+1}\omega)} = 1,$$

donc

$$\begin{aligned}
D(D^{2r}\omega)^{(s+1)-1} &= 2(D^{2r+1}\omega)(D^{2r}\omega)^{2s} + (2s-1)(D^{2r}\omega)^{2}D^{2r+1}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-2} \\
&= 2(D^{2r+1}\omega)(D^{2r}\omega)^{2s} + (2s-1)D^{2r-1}\omega(D^{2r}\omega)^{2s} \\
&= \{2(s+1)-1)\}D^{2r+1}\omega(D^{2r}\omega)^{2(s+1)-2}.
\end{aligned}$$

2. Avec les hypothèses de II supposons que (0.6) soit vraie pour s. Alors

$$\begin{aligned}
D(D^{2r}\omega)^{2(s+1)-1} &= D(D^{2r}\omega)^{2s+1} = D\{(D^{2r}\omega)(D^{2r}\omega)^{2s}\} \\
&= (D^{2r+1}\omega)(D^{2r}\omega)^{2s} + (-1)^{\deg\omega}D^{2r}\omega\{D(D^{2r}\omega)^{2s}\}
\end{aligned}$$

$$= (D^{2r+1}\omega)(D^{2r}\omega)^{2s} - D^{2r}\omega\{D^{2r+1}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-1} - D^{2r}\omega D(D^{2r}\omega)^{2s-1}\}$$

$$= (D^{2r}\omega)^2\{D(D^{2r}\omega)^{2s-1}\}$$

$$= (D^{2r}\omega)^2\{D^{2r+1}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-2}\}$$

$$= (D^{2r+1}\omega)(D^{2r}\omega)^{2s} = (D^{2r+1}\omega)(D^{2r}\omega)^{2(s+1)-2}.$$

3. Avec les hypothèses de III supposons que (0.7) soit vraie pour s. Alors

$$D(D^{2r-1}\omega)^{s+1} = D\{(D^{2r-1}\omega)(D^{2r-1}\omega)^s\}$$

$$= (D^{2r}\omega)(D^{2r-1}\omega)^s + (-1)^{\deg D^{2r-1}\omega} D^{2r-1}\omega\{D(D^{2r-1}\omega)^s\}$$

$$= (D^{2r}\omega)(D^{2r-1}\omega)^s + (-1)^{\deg D^{2r-1}\omega} D^{2r-1}\omega\{s D^{2r}\omega(D^{2r-1}\omega)^{s-1}\}$$

$$= (D^{2r}\omega)(D^{2r-1}\omega)^s$$

$$+ (-1)^{\deg D^{2r-1}\omega}(-1)^{(\deg D^{2r-1}\omega)(\deg D^{2r}\omega)} s D^{2r}\omega(D^{2r-1}\omega)^s;$$

mais en vertu des hypothèses de III

$$(-1)^{\deg(D^{2r-1}\omega) + (\deg D^{2r-1}\omega)(\deg D^{2r}\omega)} = 1,$$

donc

$$D(D^{2r-1}\omega)^{s+1} = (s+1)(D^{2r}\omega)(D^{2r-1}\omega)^s.$$

4. Avec les hypothèses de IV et en utilisant (0.5) on a

$$D(D^{2r}\omega)^{2s} = D\{(D^{2r}\omega)(D^{2r}\omega)^{2s-1})\}$$

$$= D^{2r+1}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-1} + D^{2r}\omega D(D^{2r}\omega)^{2s-1}$$

$$= D^{2r+1}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-1} + D^{2r}\omega\{(2s-1)D^{2r+1}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-2}\}$$

$$= D^{2r+1}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-1} + (2s-1)D^{2r+1}\omega D^{2r}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-2}$$

$$= 2s D^{2r+1}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-1}.$$

COROLLAIRE 0.4. *Soient A une K-algèbre graduée (0)-commutative, $D \in \mathfrak{D}gr_K(A)$ $\omega \in A$ et $r, s \geq 0$. Alors*

V. *Si $\deg D$ est impair et $\deg \omega$ est impair, alors*

$$D(D^{2r}\omega)^{2s} = 0. \tag{0.9}$$

VI. *Si D est de degré pair ou si ω est de degré impair, alors*

$$D(D\omega)^s = s D^2\omega(D\omega)^{s-1}. \tag{0.10}$$

DEMONSTRATION. (0.9) est une conséquence de (0.6), en effet

$$D(D^{2r}\omega)^{2s} = D\{D^{2r}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-1}\}$$

$$= D^{2r+1}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-1} - D^{2r}\omega D(D^{2r}\omega)^{2s-1}$$

$$= D^{2r+1}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-1} - D^{2r}\omega D^{2r+1}\omega(D^{2r}\omega)^{2s-2} = 0.$$

Un élément d de $\mathfrak{D}gr_K(A)$ de degré 1 tel que $d^2 = 0$ sera appelé *K-différentielle.* Un élément δ de $\mathfrak{D}gr_K(A)$ de degré -1 sera appelé *K-co-différentielle.*

Une structure de *K-anneau polynomial* sur un ensemble A est définie par la donnée d'une structure d'anneau gradué $(A^p \mid p \in Z)$ telle que tout élément de A soit combinaison linéaire de produits de familles finies d'éléments de A^1 avec coefficients en A^o, c'est-à-dire, l'anneau A est engendré par les éléments de degrés 0 et 1, et A est un (K, A^o)-bimodule.

Par exemple, si V est un (K, F)-bi-module, alors $\otimes_F(V)$ et $\Lambda_F(V)$ sont des K-anneaux polynomiaux.

Si A est un K-anneau polynomial, $\omega \in A$ et $D \in \mathfrak{D}^r gr_K(A)$, alors

$$\omega = \Sigma a_{i_1 \dots i_\nu} \cdot \omega^{i_1} \dots \omega^{i_\nu},\ a_{i_1 \dots i_\nu} \in A^o \text{ et } \omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_\nu} \in A^1.$$

Donc

$$D\omega = \Sigma\{(Da_{i_1 \dots i_\nu}) \cdot \omega^{i_1} \dots \omega^{i_\nu} + \sum_\alpha (-1)^{r(\alpha+1)} a_{i_1, \dots, i_\nu} \cdot \omega^{i_1} \dots (D\omega^{i_\alpha}) \dots \omega^{i_\nu}\}.$$

Par conséquent

PROPOSITION 0.2. *Soit A un K-anneau polynomial. Si $D \in \mathfrak{D}^r_K(A)$ et $D(A^o) = D(A^1) = 0$, alors $D = 0$.*

COROLLAIRE 0.5. *Soit A un K-anneau polynomial. Si $D, D' \in \mathfrak{D}^r_{gr_K}(A)$ coïncident sur $A^o \oplus A^1$, alors $D = D'$. Par conséquent tout élément de $\mathfrak{D}_{gr_K}(A)$ est complètement caractérisé par son comportement sur (A^o, A^1).*

On dira qu'un K-anneau polynomial A est *d-coordonné* si $d \in \mathfrak{D}^{+1}_{gr_K}(A)$ et si $d(A^o)$ engendre le A^o-module A^1.

PROPOSITION 0.3. *Soit A un K-anneau d-coordonné. Si $D \in \mathfrak{D}^r gr_K(A)$ et*

$$[D, d] = 0,\ D(A^o) = 0,$$

alors $D = 0$.

DEMONSTRATION. En effet, à cause de la proposition 0.2 il suffit de démontrer que $D(A^1) = 0$. Soit $\omega \in A^1$, alors

$$\omega = \Sigma f^i dx_i,\ f^i, x_i \in A^o,$$

donc

$$D\omega = \Sigma(Df^i)dx^i + f^i(D\,dx^i) = \Sigma(Df^i)dx^i + (-1)^r f^i(dDx^i)$$

Par conséquent $D(A^1) = 0$ si $D(A^o) = 0$.

COROLLAIRE 0.6. *Soit A un K-anneau d-coordonné. Si $D, D' \in \mathfrak{D}\overset{r}{gr}_K(A)$ et*

$$[D, d] = 0 = [D', d], D \mid A = D' \mid A,$$

alors $D = D'$. Donc toute dérivation $D \in \mathfrak{D}\overset{r}{gr}_K(A)$ telle que $[D, d] = 0$, est parfaitement caractérisée par son comportement sur A^o.

PROPOSITION 0.4. *Soit A un anneau d-coordonné tel que $d^2 = 0$. Si $\delta \in \mathfrak{D}\overset{r-1}{gr}_K(A)$ et $\delta^2 = 0$, alors*

$$D = [\delta, d] = \delta \circ d + (-1)^r d \circ \delta$$

est l'unique dérivation de degré r de A telle que

$$[D, d] = 0 \text{ et } Df = (\delta \circ d)f \text{ si } f \in A^o.$$

1. Translations infinitésimales graduées.

Soit F une K-algèbre graduée. On dit qu'un couple (V, ρ_L) est un espace *(K, F)-linéaire gradué* si (V, ρ_L) est un K-module à F-opérateurs (0)-gradués tel que ρ_L soit aussi un morphisme de l'anneau F dans l'anneau $Endgr_K(V)$ qui transforme l'unité de F (si elle existe) en l'unité de $Endgr_K(V)$, c'est-à-dire V est un (K, F)-bimodule gradué vérifiant la condition supplémentaire suivante

$$(\lambda f)v = \lambda(fv), \text{ où } fv = (\rho_L(f))v \text{ et } \lambda \in K.$$

Si F est (0)-commutatif, alors

$$\mathfrak{D}gr_K(F) = \underset{p \in Z}{\oplus} \mathfrak{D}\overset{p}{gr}_K(F)$$

est un espace (K, F)-linéaire gradué.

Les espaces (K, F)-linéaires gradués dont les graduations sous-jacentes sont triviales seront appelés brièvement *espaces (K, F)-linéaires*. La graduation sur K sera toujours supposée triviale.

Si $\mathfrak{X}$ et V sont deux espaces (K, F)-linéaires (gradués), on peut munir d'une façon naturelle les ensembles ci-dessous de structures d'espaces (K, F)-linéaires :

$$(Homgr_K(\mathfrak{X}, V))$$

$$\mathfrak{X} \otimes_F V, \otimes_F(\mathfrak{X}), \Lambda_F(\mathfrak{X}),$$

$$L_F(\mathfrak{X}, V) = \underset{p \in Z}{\oplus} L_F^p(\mathfrak{X}, V)$$

$$A_F(\mathfrak{X}, V) = \underset{p \in Z}{\oplus} A_F^p(\mathfrak{X}, V)$$

Soit $(V \mid (V^q \mid q \in Z))$ un espace (K, F)-linéaire gradué, $F^p V^q \subset V^{p+q}$. On dit qu'un couple (T, D) est une *translation infinitésimale graduée* (t.i.g.) de V (de degré t) si (T, D) vérifie les conditions suivantes :

(i) $\qquad (T, D) \in Endgr_K(V) \times \mathfrak{D}gr_K(F)$ (et $deg(T) = t = deg(D)$),

(ii) $\qquad T(fv) = (Df)v + J_F^{(t)}(f)(Tv)$ où $f \in F^{(t)}$ et $v \in V$.

On note $\hat{\mathfrak{J}}^{(t)}gr_K(V)$ le K-module des t.i.g. (de degré t). On a

$$\hat{\mathfrak{J}}gr_K(V) = \underset{t \in Z}{\oplus} \hat{\mathfrak{J}}^{t}gr_K(V).$$

Dans la suite on supposera toujours que F est un anneau gradué (0)-commutatif. $\hat{\mathfrak{J}}gr_K$ est un sous-espace (K, F)-linéaire de $Endgr_K(V) \times \mathfrak{D}gr_K(F)$. On notera $\mathfrak{J}gr_K(V) = \underset{t \in Z}{\oplus} \overset{t}{\mathfrak{J}}gr_K(V)$ le sous-espace (K, F)-linéaire de $Endgr_K(V)$, image de $\hat{\mathfrak{J}}gr_K(V)$ par la première projection

$$pr_1 : Endgr_K(V) \times \mathfrak{D}gr_K(F) \to Endgr_K(V),$$

$\overset{t}{\mathfrak{J}}gr_K(V) = \{ T \mid T \in \overset{t}{E}ndgr_K(V)$ et il existe

$$D \in \overset{t}{\mathfrak{D}}gr_K(V) \text{ tel que } (T, D) \in \hat{\mathfrak{J}}^{t}gr_K(V)\}.$$

Un élément de $\overset{t}{\mathfrak{J}}gr_K(V)$ sera appelé *déplacement infinitésimal gradué* (d.i.g.) de V de degré t. On a, si F a une unité,

$$\overset{t}{E}ndgr_F(V) \subset \overset{t}{\mathfrak{J}}gr_K(V) \subset \overset{t}{E}ndgr_K(V).$$

THEOREME 1.1. *Soient (T, D) et (T', D') deux t.i.g. de V de degrés t et t' respectivement, alors*

$$([T, T'], [D, D']) \in \hat{\mathfrak{J}}^{t+t'}gr_K(V),$$

$$(ad\, T, D) \in \hat{\mathfrak{J}}^{t}gr_K(\mathfrak{J}gr_K(V)),$$

où ad est la représentation adjointe de la K-algèbre de Lie graduée $Endgr_K(V)$,

$$(ad\, T)T' = [T, T'].$$

DEMONSTRATION. On doit démontrer les identités :

(1.1) $\qquad [T, T'](fv) = ([D, D']f)v + (-1)^{(t+t')deg f} f[T, T']v$

(1.2) $\qquad [T, fT'] = (Df)T' + (-1)^{t\, deg f} f[T, T']$.

En effet,

$$[T, T'](fv) = TT'(fv) - (-1)^{tt'}T'T(fv),$$

$$\begin{aligned} TT'(fv) &= T\{ (D'f)v + (-1)^{t' deg f} f(T'v) \} \\ &= (DD'f)v + (-1)^{t\, deg(D'f)}(D'f)(Tv) + \\ &+ (-1)^{t' deg f}\{ (Df)(T'v) + (-1)^{t\, deg f} f(TT'v) \\ &= (DD'f)v + (-1)^{tt' + t\, deg f}(D'f)(Tv) + \\ &+ (-1)^{t' deg f}(Df)(T'v) + (-1)^{(t+t')deg f} f(TT'v). \end{aligned}$$

Donc on a aussi

$$-(-1)^{tt'}T'T(fv) = -(-1)^{tt'}(D'Df)v - (-1)^{t'\deg f}(Df)(T'v)$$
$$-(-1)^{tt'+t\deg f}(D'f)(Tv) - (-1)^{(t+t')\deg f}(-1)^{tt'}f(T'Tv).$$

En additionnant membre à membre les deux dernières identités on obtient (1.1).

$$[T, fT']v = (T(fT')v) - (-1)^{t\deg(fT')}(fT')Tv \ .$$

$$T(fT')v = T\{f(T'v)\}$$
$$= (Df)(T'v) + (-1)^{t\deg f}f(TT')v$$
$$-(-1)^{t\deg(fT')}(fT')Tv = -(-1)^{t\deg f}(-1)^{tt'}f(T'Tv).$$

Donc

$$[T, fT']v = (Df)(T'v) + (-1)^{t\deg f}f\{(TT')v - (-1)^{tt'}(T'T)v\}.$$

LEMME 1.1. *Soient* V_1 *et* V_2 *deux espaces* (K, F)*-linéaires gradués. Si*

$$(T_1, D_1) \in \hat{\mathfrak{J}}^t gr_K(V_1),\ (T_2, D_2) \in \hat{\mathfrak{J}}^t gr_K(V_2),\ h \in Homgr_F(V_1, V_2)$$

on définit $T_{12} : h \to T_{12}h$ *par*

$$(T_{12}h)v_1 = T_2(hv_1) - (-1)^{t\deg h}h(T_1v_1) \text{ pour } v_1 \in V_1,$$

(si $T_1 = T_2 = T_i$*, on pose* $T_{ii} = T_{12}$*);*

alors

$$(T_{12}h)(fv_1) = \{(D_2 - (-1)^{t\deg h}D_1)f\}hv_1 + (-1)^{t\deg f}f\{(T_{12}h)v_1\}$$
$$T_{12}(fh) = (D_2f)h + (-1)^{t\deg f}f(T_{12}h).$$

En particulier, si t *est pair et* $D = D_1 = D_2$*, alors*

$$(T_{12}, D) \in \hat{\mathfrak{J}}^t gr_K(Homgr_F(V_1, V_2)).$$

DEMONSTRATION.

$$a)\ (T_{12}h)(fv_1) =$$
$$= T_2(h(fv_1)) - (-1)^{t\deg h}h(T_1(fv_1))$$
$$= T_2(f(hv_1)) - (-1)^{t\deg h}h\{(D_1f)v_1 + (-1)^{t\deg f}f(T_1v_1)\}$$
$$= \{(D_2f)(hv_1) - (-1)^{t\deg h}(D_1f)(hv_1)\} +$$
$$+ (-1)^{t\deg f}f\{T_2(hv_1)) - (-1)^{t\deg h}h(T_1v_1)\}$$

$$b)\ (T_{12}(fh))v_1 =$$
$$= T_2((fh)v_1) - (-1)^{t\deg(fh)}(fh)(T_1v_1)$$
$$= T_2(f(hv_1)) - (-1)^{t\deg f}(-1)^{t\deg h}f(hT_1v_1)$$

$$= (D_2 f)(hv_1) + (-1)^{t\,deg f} f\{T_2(hv_1) - (-1)^{t\,deg h} h(T_1 v_1)\}.$$

LEMME 1.2. *Si* $(T_1, D), (T_2, D) \in \hat{\mathfrak{I}}\overset{t}{gr}_K(V)$, *alors*

$$T_{oo} = [T_{11}, T_{22}], \text{ où } T_o = [T_1, T_2].$$

DEMONSTRATION. $deg\, T_{11} = deg\, T_{22}$ et $deg\, T_o = 2t$, donc

a) $$(T_{oo} h)v = T_o(hv) - h(T_o v) = [T_1, T_2](hv) - h([T_1, T_2]v).$$

b) $$([T_{11}, T_{22}]h)v = ((T_{11} T_{22})h)v - ((T_{22} T_{11})h)v;$$

or $deg(T_{22} h) = t + deg\, h$, d'où :

$$((T_{11} T_{22})h)v = \{T_{11}(T_{22} h)\}v =$$

$$= T_1\{(T_{22} h)v\} - (-1)^{t deg(T_{22} h)}(T_{22} h)(T_1 v)$$

$$= T_1\{T_2(hv) - (-1)^{t deg h} h(T_2 v)\} - (-1)^{t\,deg h}\{T_2(hT_1 v) - (-1)^{t deg h} h(T_2 T_1 v)\}$$

$$= (T_1 T_2)(hv) - (-1)^{t deg h} T_1(h(T_2 v)) - (-1)^{t deg h} T_2(h(T_1 v)) + h((T_2 T_1)v).$$

Donc, on a aussi

$$-((T_{22} T_{11})h)v =$$

$$= -(T_2 T_1)(hv) + (-1)^{t deg h} T_2(h(T_1 v)) + (-1)^{t deg h} T_1(h(T_2 v)) - h((T_1 T_2)v).$$

De ces deux dernières identités et de a) on déduit l'identité cherchée.

COROLLAIRE 1.1. $(T_{oo}, [D_1, D_2]) \in \hat{\mathfrak{I}}gr_K(\overset{2t}{End}gr_F(V))$.

LEMME 1.3. *Soit* $(T, D) \in \hat{\mathfrak{I}}\overset{1}{gr}_K(V)$; *alors* $(T^2, D^2) \in \hat{\mathfrak{I}}\overset{2}{gr}_K(V)$. *En particulier* $T^2 \in \overset{2}{End}gr_F(V)$, *si* $D^2 = 0$.

DEMONSTRATION.

$$D^2(fg) = D\{(Df)g + (-1)^{deg f} f(Dg)\}$$

$$= (D^2 f)g + (-1)^{deg(Df)}(Df)(Dg) + (-1)^{deg f}(Df)(Dg) + f(D^2 g);$$

or, $deg(Df) = 1 + deg\, f$, donc $D^2 \in \mathfrak{D}\overset{2}{gr}_K(F)$.

$$T^2(fv) = T\{(Df)v + (-1)^{deg f} f(Tv)\}$$

$$= (D^2 f)v + (-1)^{deg(Df)}(Df)(Tv) + (-1)^{deg f}(Df)(Tv) + f(T^2 v).$$

$$= (D^2 f)v + f(T^2 v).$$

LEMME 1.4. *Soient* V_1 *et* V_2 *deux espaces (K, F)-linéaires gradués. Si* $(T_1, D_1) \in \hat{\mathfrak{I}}\overset{t}{gr}_K(V_1)$ *et* $T_2 \in \overset{t}{End}gr_K(V_2)$ *et si l'on pose*

$$T_{12}^{\otimes}(v_1 \otimes v_2) = (T_1 v_1) \otimes v_2 + (-1)^{t deg v_1} v_1 \otimes T_2 v_2,$$

alors $(T_{12}^{\otimes}, D_1) \in \hat{\mathfrak{I}}\overset{t}{gr}_K(V_1 \otimes_F V_2)$.

DEMONSTRATION.

$$T_{12}^{\otimes}((fv_1)\otimes v_2) = [\,T_1(fv_1)\,]\otimes v_2 + (-1)^{t\deg(fv_1)}(fv_1)\otimes(T_2v_2) =$$

$$= \{(D_1f)v_1 + (-1)^{t\deg f} f(T_1v_1)\}\otimes v_2 + (-1)^{t(\deg f+\deg v_1)}(fv)\otimes(T_2v_2)$$

$$= (D_1f)v_1\otimes v_2 + (-1)^{t\deg f} f\{(T_1v_1)\otimes v_2 + (-1)^{t\deg v_1} v_1\otimes(Tv_2)\}$$

$$= (D_1f)v_1\otimes v_2 + (-1)^{t\deg f} f T_{12}^{\otimes}(v_1\otimes v_2).$$

Soit $\mathfrak{X}$ un espace (K,F)-linéaire; on note brièvement $\hat{\mathfrak{T}}_K(\mathfrak{X})$ (resp. $\mathfrak{T}_K(\mathfrak{X})$) l'espace (K,F)-linéaire des t.i. (resp. d.i.). Soit $(X_j \mid 1 \leq j \leq r)$ une suite d'éléments de $\mathfrak{X}$; on note :

$\mathfrak{X}_{(r)}$ le r-vecteur $X_1\wedge\ldots\wedge X_r$ si $r>1$, le vecteur X_1 si $r=1$ et le 0-vecteur 0 si $r<1$.

$\mathfrak{X}^{\hat{j}}_{(r)}$ le $(r-1)$-vecteur $X_1\wedge\ldots\wedge X_{j-1}\wedge X_{j+1}\wedge\ldots\wedge X_r$ si $r>1$, le 0-vecteur 1 si $r=1$, le 0-vecteur 0 si $r<1$.

De même

$$\mathfrak{X}_r = \begin{cases} X_1\otimes\ldots\otimes X_r & \text{si } r>1,\\ X_1 & \text{si } r=1\\ 0 & \text{si } r<1.\end{cases}$$

$$\mathfrak{X}^{\hat{j}}_r = \begin{cases} X_1\otimes\ldots\otimes X_{j-1}\otimes X_{j+1}\otimes\ldots\otimes X_r & \text{si } r>1,\\ 1 & \text{si } r=1,\\ 0 & \text{si } r<1.\end{cases}$$

LEMME 1.5. *Soit $\mathfrak{X}$ un espace (K,F)-linéaire. Si $T\in End_K(\mathfrak{X})$ et si l'on pose*

$$\langle \mathfrak{X}_{(r)}, T^{\wedge}\rangle = \Sigma(-1)^{j+1}\langle X_j, T\rangle\, \mathfrak{X}^{\hat{j}}_{(r)}$$

$$= \Sigma\, X_1\wedge\ldots\wedge\langle X_j, T\rangle\wedge\ldots\wedge X_r$$

$$\langle \mathfrak{X}_r\,,\ T^{\otimes}\rangle = \Sigma\, X_1\otimes\ldots\otimes\langle X_j, T\rangle\otimes\ldots\otimes X_r,$$

alors $T^{\wedge}\in End_K(\Lambda_F(\mathfrak{X}))$ et $T^{\otimes}\in End_K(\otimes_F(\mathfrak{X}))$. Si de plus $(T,D)\in\hat{\mathfrak{T}}_K(\mathfrak{X})$, alors $(T^{\wedge},D)\in\hat{\mathfrak{T}}_K(\Lambda_F(\mathfrak{X}))$ et $(T^{\otimes},D)\in\hat{\mathfrak{T}}_K(\otimes_F(\mathfrak{X}))$.

DEMONSTRATION.

$$T^{\wedge}(f\mathfrak{X}_{(r)}) = T(fX_1)\wedge\mathfrak{X}^{\hat{1}}_{(r)} + (fX_1)\sum_{2\leq j\leq r}(-1)^{j+1}\langle X_j, T\rangle\,\mathfrak{X}^{\hat{1}\hat{j}}_{(r)}$$

$$= (Df)X_1\wedge\mathfrak{X}^{\hat{1}}_{(r)} + f\langle X_1, T\rangle\wedge\mathfrak{X}^{\hat{1}}_{(r)} + fX_1\wedge\langle\mathfrak{X}^{\hat{1}}_{(r)}, T^{\wedge}\rangle$$

$$= (Df)\mathfrak{X}_{(r)} + f\langle\mathfrak{X}_{(r)}, T^{\wedge}\rangle\,.$$

COROLLAIRE 1.2. *Si* $(T_1, D_1) \in \hat{\mathfrak{I}}_K(\mathfrak{X})$, $(T_2, D_2) \in \hat{\mathfrak{I}}_K(V)$ *si l'on pose*

$$\langle \mathfrak{X}_{(q)}, T_{21}^{\wedge}\omega \rangle = T_2 \langle \mathfrak{X}_{(q)}, \omega \rangle - \langle T_1^{\wedge}(\mathfrak{X}_{(q)}), \omega \rangle$$

pour $\omega \in A_F^q(\mathfrak{X}, V)$,

$$\langle \mathfrak{X}_q, T_{21}^{\otimes}\omega \rangle = T_2 \langle \mathfrak{X}_q, \omega \rangle - \langle T_1^{\otimes}(\mathfrak{X}_q), \omega \rangle$$

pour $\omega \in L_F^q(\mathfrak{X}, V)$,

alors $(T_{21}^{\wedge}, D_2) \in \hat{\mathfrak{I}}_K(\Lambda_F(\mathfrak{X}^*))$ *et* $(T_{21}^{\otimes}, D_2) \in \hat{\mathfrak{I}}_K(\otimes_F(\mathfrak{X}^*))$.

Si $(T, D) = (T_1, D_1) = (T_2, D_2)$ *on écrira* $T^{\wedge}$, *resp.* $T^{\otimes}$, *au lieu de* $T_{21}^{\wedge}$, *resp.* $T_{21}^{\otimes}$.

LEMME 1.6. *Si* $T, T' \in End_K(V)$, *alors*

$$[T, T']^{\wedge}(v_1 \wedge \dots \wedge v_q) = [T^{\wedge}, T'^{\wedge}](v_1 \wedge \dots \wedge v_q),$$
$$[T, T']^{\otimes}(v_1 \otimes \dots \otimes v_q) = [T^{\otimes}, T'^{\otimes}](v_1 \wedge \dots \wedge v_q).$$

DEMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
[T, T']^{\wedge}(v_1 \wedge \dots \wedge v_q) &= \Sigma v_1 \wedge \dots \wedge [T, T'] v_j \wedge \dots \wedge v_q = \\
&= \Sigma v_1 \wedge \dots \wedge T T' v_j \wedge \dots \wedge v_q - \Sigma v_1 \wedge \dots \wedge T' T v_j \wedge \dots \wedge v_q \\
&= \sum_j \{ v_1 \wedge \dots \wedge T T' v_j \wedge \dots \wedge v_q + \sum_{\substack{1 \leq i \leq q \\ i \neq j}} v_1 \wedge \dots \wedge T v_i \wedge \dots \wedge T' v_j \wedge \dots \wedge v_q \} \\
&- \Sigma \{ v_1 \wedge \dots \wedge T' T v_j \wedge \dots \wedge v_q + \sum_{\substack{1 \leq i \leq q \\ i \neq j}} v_1 \wedge \dots \wedge T v_i \wedge \dots \wedge T' v_j \wedge \dots \wedge v_q \} \\
&= T^{\wedge} \{ \Sigma v_1 \wedge \dots \wedge T' v_j \wedge \dots \wedge v_q \} - T'^{\wedge} \{ \Sigma v_1 \wedge \dots \wedge T v_j \wedge \dots \wedge v_q \} \\
&= T^{\wedge} T'^{\wedge}(v_1 \wedge \dots \wedge v_q) - T'^{\wedge} T^{\wedge}(v_1 \wedge \dots \wedge v_q).
\end{aligned}$$

Du théorème 1.1 et des lemmes 1.5 et 1.6 il résulte :

LEMME 1.7. *Si* $(T, D), (T', D') \in \hat{\mathfrak{I}}_K(V)$, *alors*

$$([T, T']^{\wedge}, [D, D']) \in \hat{\mathfrak{I}}_K(\Lambda_F(V))$$
$$([T, T']^{\otimes}, [D, D']) \in \hat{\mathfrak{I}}_K(\otimes_F(V)).$$

LEMME 1.8. *Soient* $(T_o, D_o) \in \hat{\mathfrak{I}}_K(\mathfrak{X})$ *et* $(T_i, D_o) \in \hat{\mathfrak{I}}_K(V_i)$. *Si l'on pose*

$$(1.3) \qquad \langle \mathfrak{X}_{(p)}, \tilde{T}_{oi}^{\wedge} P \rangle = T_i \langle \mathfrak{X}_{(p)}, P \rangle - \langle \langle \mathfrak{X}_{(p)}, T_o^{\wedge} \rangle, P \rangle,$$

$$(1.4) \qquad \langle \mathfrak{X}_q, \tilde{T}_{oi}^{\otimes} Q \rangle = T_i \langle \mathfrak{X}_q, Q \rangle - \langle \langle \mathfrak{X}_q, T_o^{\otimes} \rangle, Q \rangle,$$

où $P \in A_F^p(\mathfrak{X}, V_i)$ *et* $Q \in L_F^q(\mathfrak{X}, V_i)$, *alors*

$$(\tilde{T}_{oi}, D_o) \in \hat{\mathfrak{I}}\overset{o}{gr}_K(A_F(\mathfrak{X}, V_i)) \text{ et}$$
$$(\tilde{T}_{oi}^{\otimes}, D_o) \in \hat{\mathfrak{I}}\overset{o}{gr}_K(L_F(\mathfrak{X}, V_i)).$$

COROLLAIRE 1.3. *En particulier,* $(\tilde{D}_{oo}^{\wedge}, D_o) \in \mathfrak{I}\overset{o}{gr}_K(A_F(\mathfrak{X}, F))$, *où*

$$(1.5) \qquad \langle \mathfrak{X}_{(p)}, \tilde{D}^{\wedge}_{oo}\pi \rangle = D_o \langle \mathfrak{X}_{(p)}, \pi \rangle - \langle \langle \mathfrak{X}_{(p)}, T^{\wedge}_o \rangle, \pi \rangle \rangle$$

où $\pi \in A^p_F(\mathfrak{X}, F)$.

2. Représentations infinitésimales graduées.

Soient $\mathfrak{X}$ et V deux espaces (K, F)-linéaires gradués. Une application ρ de $\mathfrak{X}$ dans $\hat{\mathfrak{T}}gr_K(V)$ donne naissance aux applications

$$\rho_I : \mathfrak{X} \to \mathfrak{T}gr_K(V), \ \rho_D : \mathfrak{X} \to \mathfrak{D}gr_K(F)$$

$\rho_I(X) = pr_1 \rho(X)$ et $\rho_D(X) = pr_2\, \rho(X)$; on écrira $\rho = (\rho_I, \rho_D)$.

On dira que ρ est une *représentation infinitésimale graduée* (r.i.g.) ⌈de degré t⌉ de $\mathfrak{X}$ vers V si

$$\rho \in \overset{\lceil t \rceil}{Homgr_K}(\mathfrak{X}, \hat{\mathfrak{T}}gr_K(V)).$$

Si de plus

$$\rho_I \in Homgr_F(\mathfrak{X}, Endgr_K(V)), \text{resp. } \rho_D \in Homgr_F(\mathfrak{X}, \mathfrak{D}gr_K(F))$$

on dira que ρ est $\mathfrak{T}$-*régulière* (r.i.g.$\mathfrak{T}r.$), resp. $\mathfrak{D}$-*régulière* (r.i.g.$\mathfrak{D}r.$). Une r.i.g. ρ de $\mathfrak{X}$ vers V est appelée *birégulière* ou $\hat{\mathfrak{T}}$-*régulière* (r.i.g.*br.*) si ρ est $\mathfrak{T}$-régulière et $\mathfrak{D}$-régulière. Pour simplifier les énoncés, dorénavant on supposera toujours que toute application F-linéaire et aussi K-linéaire. On écrira

$$\overset{\lceil t \rceil}{\mathfrak{R}gr_K}(\mathfrak{X}, V) = \overset{\lceil t \rceil}{Homgr_K}(\mathfrak{X}, \hat{\mathfrak{T}}gr_K(V))$$
$$\overset{\lceil t \rceil}{\mathfrak{R}gr_F}(\mathfrak{X}, V) = \overset{\lceil t \rceil}{Homgr_F}(\mathfrak{X}, \hat{\mathfrak{T}}gr_K(V))$$

et on notera

$$\overset{\lceil t \rceil}{\mathfrak{R}gr_{\mathfrak{T}}}(\mathfrak{X}, V), \text{ resp. } \overset{\lceil t \rceil}{\mathfrak{R}gr_{\mathfrak{D}}}(\mathfrak{X}, V)$$

l'ensemble des r.i.g.$\mathfrak{T}r.$, resp. des r.i.g.$\mathfrak{D}r.$, ⌈de degré t⌉, de $\mathfrak{X}$ vers V.

Par définition on a

$$\overset{\lceil t \rceil}{\mathfrak{R}gr_F}(\mathfrak{X}, V) \subset \left\{ \begin{matrix} \overset{\lceil t \rceil}{\mathfrak{R}gr_{\mathfrak{T}}}(\mathfrak{X}, V) \\ \\ \overset{\lceil t \rceil}{\mathfrak{R}gr_{\mathfrak{D}}}(\mathfrak{X}, V) \end{matrix} \right\} \subset \overset{\lceil t \rceil}{\mathfrak{R}gr_K}(\mathfrak{X}, V).$$

Chaque fois qu'on fixe d'avance un $\rho_D \in \overset{\lceil t \rceil}{Homgr_K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{D}gr_K(F))$, par abus de langage, on dira encore qu'une application ρ_I de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{T}gr_K(V)$ est une r.i.g. resp. $\mathfrak{T}$-régulière, $\mathfrak{D}$-régulière, birégulière si $\rho = (\rho_I, \rho_D)$ est une r.i.g. resp. $\mathfrak{T}$-régulière, $\mathfrak{D}$-régulière, birégulière. Quand les graduations admises sont triviales on dira brièvement *représentation infinitésimale* (r.i.) au lieu de r.i.g. et on omettra gr dans les formules.

Un couple (V, ρ) constitué d'un espace (K, F)-linéaire gradué V et d'une r.i.g. ρ (resp. $\mathfrak{I}$-régulière, $\mathfrak{D}$-régulière, birégulière) ($\lceil$de degré $t\rceil$) de $\mathfrak{X}$ vers V est appelée *espace* (K, F)*-linéaire gradué à* $\mathfrak{X}$*-opérateurs (resp.* $\mathfrak{I}$*-réguliers,* $\mathfrak{D}$*-réguliers, biréguliers)* $\lceil(t)$-$\rceil$*gradués*. On dira qu'un couple $(\mathfrak{X}, \rho)$ est un *système* (resp. $\mathfrak{I}$-*régulier,* $\mathfrak{D}$*-régulier, birégulier) d'opérateurs infinitésimaux* $\lceil(t)$-$\rceil$*gradués sur* V si (V, ρ) est un espace (K, F)-linéaire gradué à $\mathfrak{X}$-opérateurs $\lceil(t)$-$\rceil$ gradués (resp. $\mathfrak{I}$-régulier, $\mathfrak{D}$-régulier, birégulier).

Des lemmes 1.1, 1.5, 1.8 et corollaire 1.1 il résulte

THEOREME 2.1. *Soient* $(V, \rho = (\rho_I, \rho_D))$ *et* $(V', \rho' = (\rho'_I, \rho_D))$ *deux espaces* (K, F)*-linéaires à* $\mathfrak{X}$*-opérateurs infinitésimaux*$\lceil\mathfrak{I}$*-réguliers*$\rceil$.*Posons :*

$$(\tilde{\rho}_I(X)h)v = \rho'_I(X)(hv) - h(\rho_I(X)v),\ h \in Hom_F(V, V'),$$

$$(\tilde{\rho}_I(X))(v \otimes v') = (\rho_I(X)v) \otimes v' + v \otimes (\rho'_I(X)v'),\ v \in V \text{ et } v' \in V'.$$

$$\tilde{\rho}_I(X)\ v = \begin{cases} 0 \text{ si } deg(v) < 0, \\ \rho_D(X)v \text{ si } deg(v) = 0, \\ \rho_I(X)^{\Lambda} v \text{ si } v = v_1 \wedge \dots \wedge v_q \text{ et } deg(v) > 0 \end{cases}$$

pour $v \in \Lambda_F(V)$.

$$\tilde{\rho}_I(X)v = \begin{cases} 0 \text{ si } deg(v) < 0, \\ \rho_D(X)v \text{ si } deg(v) = 0, \\ \rho_I(X)^{\otimes} v \text{ si } v = v_1 \otimes \dots \otimes v_q \text{ et } deg(v) > 0, \end{cases}$$

pour $v \in \otimes_F(V)$.

$$(2.1) \qquad \langle v, \tilde{\rho}_I(X)\,\omega \rangle = \rho'_I(X)\,\langle v, \omega \rangle - \langle \tilde{\rho}_I(X)v, \omega \rangle,$$

pour $v \in \Lambda^q_F(V)$ *et* $\omega \in A^q_F(V, V')$.

$$\langle v, \tilde{\rho}_I(X)\omega \rangle = \rho'_I(X)\,\langle v, \omega \rangle - \langle \tilde{\rho}_I(X)v, \omega \rangle,$$

pour $v \in \otimes^q_F(V)$ *et* $\omega \in L^q_F(V, V')$.

Alors les couples $\rho = (\tilde{\rho}_I, \rho^{\bullet}_D)$ *caractérisés par les identités ci-dessus sont des représentations infinitésimales*$\lceil\mathfrak{I}$*-régulières*$\rceil$ *de* $\mathfrak{X}$ *dans* $Hom_F(V, V')$, *resp.* $V \otimes_F V'$, $\Lambda_F(V)$, $\otimes_F(V)$, $A_F(V, V')$, $L_F(V, V')$.

Si (ρ_I, ρ_D) est une r.i. de $\mathfrak{X}$ vers V et si (ρ'_I, ρ_D) est une r.i. de $\mathfrak{X}$ vers V', la r.i. $\tilde{\rho}_I$ de $\mathfrak{X}$ vers $A_F(V, V')$ ou vers $L_F(V, V')$ extension du couple (ρ'_I, ρ_D) sera notée ∇ et sera appelée *représentation infinitésimale covariante sous-jacente à* (ρ_I, ρ'_I). La r.i. $\tilde{\rho}_I$ de $\mathfrak{X}$ vers $\Lambda_F(V)$ ou vers $\otimes_F(V)$ sera notée $\diamond$ et sera appelée *représentation infinitésimale contravariante sous-jacente à* (ρ_I, ρ'_I).

PROPOSITION 2.1. *On peut définir une r.i.* $\mathfrak{D}$*-régulière (resp.* $\hat{\mathfrak{I}}$*-régulière)* $\rho = (\rho_I, \rho_D)$

de $\mathfrak{X}$ *vers* V *par la donnée d'une application* K*-linéaire (resp.* F*-linéaire)* $\diamond$ *de* $\mathfrak{X}$ *dans* $\overset{o}{\mathfrak{D}}gr_K(\Lambda_F(\mathfrak{X}))$ *ou dans* $\overset{o}{\mathfrak{D}}gr_K(\otimes_F(V))$ *telle que*

$$\diamond(fX)v = f\diamond(X)v \quad si \quad deg(v) = 0.$$

La proposition suivante est un cas particulier d'un résultat plus général (théorème 4.1.).

PROPOSITION 2.2. *On peut définir une r.i.* $\mathfrak{D}$*-régulière (resp.* $\hat{\mathfrak{I}}$*-régulière)* $\rho = (\rho_I, \rho_D)$ *de* $\mathfrak{X}$ *vers* V *par la donnée d'une application* K*-linéaire (resp.* F*-linéaire)* ∇ *de* $\mathfrak{X}$ *dans* $\overset{o}{\mathfrak{D}}gr_K(\Lambda_F(\mathfrak{X}^*))$ *ou dans* $\overset{o}{\mathfrak{D}}gr_K(\otimes_F(V^*))$ *telle que*

$$\nabla(fX)\omega = f\nabla(X)\omega \quad si \quad deg\,\omega = 0.$$

On notera i l'application F-linéaire de $\Lambda_F(V)$ dans $Endgr_K(A_F(V, V'))$, définie par les identités

$$i(u)\omega = 0 \text{ si } deg(\omega) = p < r = deg(u) \text{ ou si } r < 0$$

et

$$\langle v, i(u)\omega \rangle = \langle u \wedge v, \omega \rangle \text{ si } 0 \leq r \leq p \text{ et } deg(v) = p - r.$$

En particulier $i(f)\omega = f\omega$. On a

$$i(v)(A_F^q(V, V')) \subset A_F^{q-r}(V, V'))$$

THEOREME 2.2. *Soit* $\rho = (\rho_I, \rho_D)$ *une r.i.*$\mathfrak{D}$*-régulière de* $\mathfrak{X}$ *vers* V*. Alors*

$$[\nabla(X), i(u)] = i(X\diamond v), \; u \in \Lambda_F(V). \tag{2.2}$$

En particulier

$$[\nabla(X), i(v_1 \wedge v_2)] = i((X\diamond v_1) \wedge v_2) + i(v_1 \wedge (X\diamond v_2)), \tag{2.3}$$

où $v_1, v_2 \in V$.

DEMONSTRATION. A cause de (2.1) on peut écrire

$$(\nabla(X)\omega)(u \wedge v) = X \diamond \langle u \wedge v, \omega \rangle - \langle X \diamond (u \wedge v), \omega \rangle,$$

donc

$$\begin{aligned} \langle v, i(u)[\nabla(X)\omega] \rangle &= X \diamond \langle v, i(u)\omega \rangle - \langle v, i(X\diamond u)\omega \rangle \\ &\quad - \langle X \diamond v, i(u)\omega \rangle \\ &= \langle v, \nabla(X)[i(u)\omega] \rangle - \langle v, i(X\diamond u)\omega \rangle, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$i(u)[\nabla(X)\omega] = \nabla(X)[i(u)\omega] - i(X \diamond u)\omega.$$

REMARQUE 2.1. Si ∇_∇ désigne la r.i.$\mathfrak{D}$-régulière covariante sous-jacente à (ρ_I, ∇), alors on peut écrire (2.2) sous la forme

$$(2.2') \qquad i(u)\,\nabla(X) = (\nabla_{\nabla}(X)\,i)(u), \text{ où } \nabla_{\nabla} \text{ est l'extension de } (\rho_J, \nabla).$$

PROPOSITION 2.3. *Soit* $(V, \rho = (\rho_I, \rho_D))$ *un espace* (K, F)*-linéaire à* $\mathfrak{X}$*- opérateurs infinitésimaux* $\hat{\mathfrak{J}}$ *-réguliers. Soit*

$$\rho^A = (\rho_I^A, \rho_D^A) \in Hom_F(\mathfrak{X}, \hat{\mathfrak{J}}_K(V))$$

défini par les identités

$$\rho_I^A(\mathfrak{X}_{(o)}, X) = \rho_I(X) \quad et \quad \rho_D^A(\mathfrak{X}_{(o)}, X) = \rho_D(X)$$

$$\rho_I^A(\mathfrak{X}_{(l)}, L)v = \rho_I(\langle \mathfrak{X}_{(l)}, L \rangle)v, \; \rho_D^A(\mathfrak{X}_{(l)}, L)v = \rho_D(\langle \mathfrak{X}_{(l)}, L \rangle)v\,,$$

pour $l \geq 1$.
Alors $(V, \rho^A = (\rho_I^A, \rho_D^A))$ *est un espace* (K, F)*-linéaire à* $\Lambda_F(\mathfrak{X}) \times A_F(\mathfrak{X})$*-opérateurs infinitésimaux* $\hat{\mathfrak{J}}$ *-réguliers.*

DEMONSTRATION. En effet, soit $l \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} \rho_I^A(\mathfrak{X}_{(l)}, L)(fv) &= \rho_I(\langle \mathfrak{X}_{(l)}, L \rangle)(fv) \\ &= \{\rho_D(\langle \mathfrak{X}_{(l)}, L \rangle)f\}v + f\{\rho_I(\langle \mathfrak{X}_{(l)}, L \rangle)v\} \\ &= \{\rho_D^A(\mathfrak{X}_{(l)}, L)f\}v + f\{\rho_I^A(\mathfrak{X}_{(l)}, L)v\}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.4. *Soit* $\mathfrak{X}$ *un espace* (K, F) *- linéaire gradué. Soit* $H \in \overset{o}{Endgr}_F(\mathfrak{X})$ *tel que* $H^2 = H$. *Si* (ρ_I, ρ_D) *est une r.i.g.* ($\mathfrak{J}$*-régulière*) *de* $\mathfrak{X}$ *vers* $\mathfrak{X}$ *et si l'on pose*

$$\rho_I^H(HX)(HY) = H(\rho_I(HX)HY),$$

alors (ρ_I^H, ρ_D) *est une r.i.g.* ($\mathfrak{J}$*-régulière*) *de* $\mathfrak{X}_H = H(\mathfrak{X})$ *vers* $\mathfrak{X}_H$.

DEMONSTRATION.

$$\begin{aligned} \rho_I^H(HX)(fHY) &= H(\rho_I(HX)fHY) = H\{\rho_D(HX)fHY + f\rho_I(HX)HY\} \\ &= \rho_D(HX)fHY + fH(\rho_I(HX)H) \\ (\rho_I^H(fHX)HY &= H(\rho_I(fHX)HY) = fH(\rho_I(HX)HY)\,) \end{aligned}$$

3. Produit de Grassmann.

Soit $(\sigma_p) = (\sigma(i) \mid 1 \leq i \leq p)$ une suite strictement croissante d'entiers de $[1, n]$. Désignons par $(X_j \mid 1 \leq j \leq n)$ une suite d'éléments de $\mathfrak{X}$. On écrira

$$\mathfrak{X}_{(\sigma)} = \begin{cases} X_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge X_{\sigma(p)} & \text{si } p > 0 \\ 1 \text{ si } p = 0 \\ 0 \text{ si } p < 0. \end{cases}$$

Pour indiquer qu'une suite (σ) est de longueur p, on la désignera aussi par (σ_p). Si $(\sigma) = (\sigma_p)$ et $(\tau) = (\tau_q)$ sont deux suites strictement croissantes à valeurs dans $\{1, \dots, p+q\}$, le signe $\varepsilon_{(\sigma\tau)}$ indiquera zéro si (σ) et (τ) possèdent une valeur commune et en cas contraire il indiquera la signature de la permutation

$$(\sigma\tau) : (1, \dots, p+q) \to (\sigma(1), \dots, \sigma(p), \tau(1), \dots, \tau(q)).$$

Soient V_1, V_2 et V_3 trois espaces (K, F)- linéaires. Si $\wedge$ est une forme bilinéaire de $V_1 \times V_2$ dans V_3, on écrira aussi $X \wedge Y$ au lieu de $\wedge(X, Y)$, on appelle *produit de Grassmann associé* à $\wedge$, la forme bilinéaire de $A_F(\mathfrak{X}, V_1) \times A_F(\mathfrak{X}, V_2)$ dans $A_F(\mathfrak{X}, V_3)$, notée aussi $\wedge$, telle que

$$\wedge(A_F^p(\mathfrak{X}, V_1) \times A_F^q(\mathfrak{X}, V_2)) \subset A_F^{p+q}(\mathfrak{X}, V_3)$$

et caractérisée par l'identité

$$(3.1) \qquad \langle \mathfrak{X}_{(p+q)}, \pi \wedge \omega \rangle = \sum_{(\sigma_p)(\tau_q)} \varepsilon_{(\sigma\tau)} \langle \mathfrak{X}_{(\sigma)}, \pi \rangle \wedge \langle \mathfrak{X}_{(\tau)}, \omega \rangle .$$

En particulier, pour $\pi \in Hom_F(\mathfrak{X}, V_1)$ et $\omega \in Hom_F(\mathfrak{X}, V_2)$,

$$(3.2) \qquad \langle X \wedge Y, \pi \wedge \omega \rangle = \pi(X) \wedge \omega(Y) - \pi(Y) \wedge \omega(X),$$

pour $\pi \in Hom_F(\mathfrak{X}, V_1)$ et $\omega \in A_F^q(\mathfrak{X}, V_2)$,

$$(3.3) \qquad \langle \mathfrak{X}_{(q+1)}, \pi \wedge \omega \rangle = \Sigma (-1)^{j+1} \langle X_j, \pi \rangle \wedge \langle \mathfrak{X}^{\hat{j}}_{(q+1)}, \omega \rangle .$$

Dans la suite on notera $\wedge$ le produit de Grassmann sur $A_F(\mathfrak{X}, F)$ associé au produit de l'anneau F (cas où $V_1 = V_2 = V_3 = F$). Le F-module $A_F(\mathfrak{X}, F)$ muni de ce produit de Grassmann est une F-algèbre graduée (0)-commutative appelée *algèbre de Grassmann sous-jacente* au F-module $\mathfrak{X}$. Dans ce travail chaque fois qu'on considère $A_F(\mathfrak{X}, F)$ en tant qu'anneau, on admettra toujours qu'il s'agit de $A_F(\mathfrak{X}, F)$ muni du produit de Grassmann associé à F et on notera $\mathfrak{S}_F(\mathfrak{X}) = A_F(\mathfrak{X}, F)$. La F-algèbre (0)-commutative $\Lambda_F(\mathfrak{X}^*)$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{S}_F(\mathfrak{X})$ engendrée par les éléments de degrés 0 et 1 de $\mathfrak{S}_F(\mathfrak{X})$.

Le produit de Grassmann de $A_F(\mathfrak{X}, F) \times A_F(\mathfrak{X}, V)$ dans $A_F(\mathfrak{X}, V)$ associé à la loi externe du F-module V définit sur $A_F(\mathfrak{X}, V)$ une structure de $\mathfrak{S}_F(\mathfrak{X})$-module gradué. Dans ce travail chaque fois qu'on considèrera $A_F(\mathfrak{X}, V)$ comme $\mathfrak{S}_F(\mathfrak{X})$-module gradué, il s'agira de la structure du $\mathfrak{S}_F(\mathfrak{X})$-module gradué défini ci-dessus qu'on désignera par $\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V)$.

On dit que les t.i.g. $(T_i, D_i) \in \hat{\mathfrak{T}}\mathfrak{g}r_K(V_i)$, $i = 1, 2, 3$, sont *compatibles* avec une application bilinéaire $\wedge$ de $V_1 \times V_2$ dans V_3, si

$$T_3(u \wedge v) = (T_1 u) \wedge v + (-1)^{t \deg(u)} u \wedge (T_2 v).$$

Par exemple, soit l'application

$$\star : Homgr(V_1, V_2) \times V_1 \to V_2,$$

définie par $\star(h, v_1) = h(v_1)$, si $deg(T_1) = deg(T_2) =$ pair et $D_1 = D_2 = D$; alors $(T_2, D), (T_{12}, D), (T_1, D)$ sont compatibles avec $\star$.

On dira que les r.i.g. (ρ_I^i, ρ_D^i) de $\mathfrak{X}$ vers V_i, $i = 1, 2, 3$ sont *compatibles* avec $\Lambda \in L_F(V_1, V_2; V_3)$ si $\rho_D^1 = \rho_D^2 = \rho_D^3$ et si pour chaque $X \in \mathfrak{X}$ les t.i.g. $(\rho_I^i(X), \rho_D^i(X))$ sont de même degré et compatibles avec Λ.

THEOREME 3.1. *Soient* $(T_i, D_o) \in \hat{\mathfrak{T}}_K(V_i)$, *où* $i = 1, 2, 3$, *compatibles avec* $\Lambda \in L_F(V_1, V_2; V_3)$ *et soit* $(T_o, D_o) \in \hat{\mathfrak{T}}_K(\mathfrak{X})$. *Alors non seulement les t.i.g. de degré 0,* $(\tilde{T}_{oi}^{\Lambda}, D_o)$, $i = 1, 2, 3$, *définies par (1.3) sont compatibles avec le produit de Grassmann de* $A_F(\mathfrak{X}, V_1) \times A_F(\mathfrak{X}, V_2)$ *dans* $A_F(\mathfrak{X}, V_3)$ *associé à* Λ, *c'est-à-dire*

$$\tilde{T}_{o3}^{\Lambda}(P \wedge Q) = (\tilde{T}_{o1}^{\Lambda} P) \wedge Q + P \wedge (\tilde{T}_{o2}^{\Lambda} Q), \tag{3.4}$$

mais de plus on a

$$(\tilde{T}_{oi}^{\Lambda}, \tilde{D}_{oo}^{\Lambda}) \in \hat{\mathfrak{T}}gr_K(\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V_i)),$$

c'est-à-dire $\tilde{D}_{oo}^{\Lambda} \in \overset{o}{\mathfrak{D}}gr_K(\mathcal{E}_F(\mathfrak{X}))$ *et*

$$T_{oi}^{\Lambda}(\pi \wedge P) = (\tilde{D}_{oo}^{\Lambda} \pi) \wedge P + \pi \wedge (\tilde{T}_{oi}^{\Lambda} P). \tag{3.5}$$

On démontre la formule (3.4) en calculant son premier membre au moyen des formules (1.3) et (3.1).

COROLLAIRE 3.1. *Soient* (ρ_I^i, ρ_D^o) *des r.i.$\mathfrak{D}$r. (resp. $\hat{\mathfrak{T}}$-régulière) de $\mathfrak{X}$ vers* V_i, *où* $i = 1, 2, 3$, *compatibles avec* $\Lambda \in L_F(V_1, V_2; V_3)$ *et* (ρ_I^o, ρ_D^o) *une r.i.$\mathfrak{D}$r. (resp. $\hat{\mathfrak{T}}$-régulière) de $\mathfrak{X}$ vers $\mathfrak{X}$. Alors les r.i.$\mathfrak{D}$r. (resp. $\hat{\mathfrak{T}}$-régulière)* $(\tilde{\rho}_I^i, \rho_D^o)$ *de $\mathfrak{X}$ vers* V_i, *définies au moyen de la formule (2.1), sont compatibles avec le produit de Grassmann associé à* Λ ; *de plus* $(\tilde{\rho}_I^i, \tilde{\rho}_D^o)$ *est une r.i.$\mathfrak{D}$r. (resp. $\hat{\mathfrak{T}}$-régulière) de $\mathfrak{X}$ vers* $\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V_i)$.

4. Morphismes croisés gradués.

Soit $\mathfrak{X}$ un espace (K, F)-linéaire gradué. On dit que d est un K-*morphisme* (resp. F-*morphisme*) *croisé gradué* de F dans $A_K(\mathfrak{X}, F)$ (resp. $A_F(\mathfrak{X}, F)$) si

$$d \in Hom_K(F, A_K(\mathfrak{X}, F)) \text{ (resp. } d \in Hom_K(F, A_F(\mathfrak{X}, F))),$$

$$d(F) \subset Homgr_K(\mathfrak{X}, F) \subset A_K^1(\mathfrak{X}, F)$$

$$\text{(resp. } d(F) \subset Homgr_F(\mathfrak{X}, F) \subset \mathfrak{X}^* = A_F^1(\mathfrak{X}, F)),$$

si la contraction

$$d : F \to Homgr_K(\mathfrak{X}, F)$$

$$(\text{resp. } d : F \to Homgr_F(\mathfrak{X}, F))$$

est graduée et si de plus

$$d(f.g) = (df) \wedge g + J_F(f) \wedge (dg). \tag{4.1}$$

On note

$$\mathcal{C}gr_K(F, A_K(\mathfrak{X}, F)) \ (\text{resp. } \mathcal{C}gr_K(F, A_F(\mathfrak{X}, F)))$$

l'espace (K, F)-linéaire des K-morphismes (resp. F-morphismes) croisés gradués de F dans $A_K(\mathfrak{X}, F)$ (resp. dans $A_F(\mathfrak{X}, F)$).

LEMME 4.1. *Soit $\mathfrak{X}$ un espace (K, F)-linéaire gradué. On a des isomorphismes canoniques*

$$Homgr_K(\mathfrak{X}, \mathfrak{D}gr_K(F)) \approx \mathcal{C}gr_K(F, A_K(\mathfrak{X}, F))$$
$$Homgr_F(\mathfrak{X}, \mathfrak{D}gr_K(F)) \approx \mathcal{C}gr_K(F, A_F(\mathfrak{X}, F))$$

définis au moyen de la formule

$$\rho_D(X)f = (df)(X). \tag{4.2}$$

DEMONSTRATION. En effet, par exemple

$$\begin{aligned} \rho_D(X)(f.g) &= (d(f.g)(X) = \{(df) \wedge g + J_F(f) \wedge (dg)\}(X) = \\ &= ((df)X).g + J_F(f)((dg)X) \\ &= (\rho_D(X)f).g + J_F(f).(\rho_D(X)g). \end{aligned}$$

On dira qu'un couple (D, d) est un *opérateur de connexion* (*$\mathfrak{D}$-régulier*) ($_1$*$\mathfrak{T}$-régulier*$)_1$ *gradué* de V vers $\mathfrak{X}$ si

$$(D, d) \in Hom_K(V, A_K(\mathfrak{X}, V)) \times \mathcal{C}gr_K(F, A_K(\mathfrak{X}, F)),$$
$$D(V) \subset Homgr_K(\mathfrak{X}, V) \subset A_K^1(\mathfrak{X}, V)$$
$$(d \in \mathcal{C}gr_K(F, A_F(\mathfrak{X}, F)))$$

$$(_1 D \in Hom_K(V, A_F(\mathfrak{X}, V)) \text{ et } D(V) \subset Homgr_F(\mathfrak{X}, V) \subset A_F^1(\mathfrak{X}, V))_1$$

si la contraction

$$D : V \to Homgr_K(\mathfrak{X}, V)$$
$$(_1 D : V \to Homgr_F(\mathfrak{X}, V))_1$$

est graduée et si

$$D(fv) = (df) \wedge v + J_F(f) \wedge (Dv). \tag{4.3}$$

Si (D, d) est un opérateur de connexion et si

$$(D, d) \in Hom_K(V, A_F(\mathfrak{X}, V)) \times \mathcal{C}gr_K(F, A_F(\mathfrak{X}, F))$$

on dira que (D, d) est un *opérateur de connexion* $\hat{\mathfrak{J}}$ *- régulier ou birégulier* de V vers $\mathfrak{X}$. On notera

$$\hat{\mathfrak{C}}gr_K(V, \mathfrak{X}) \; (\text{resp. } \hat{\mathfrak{C}}^d gr_K(V, \mathfrak{X}), \hat{\mathfrak{C}}^{br} gr_K(V, \mathfrak{X}))$$

les espaces (K, F)- linéaires des opérateurs de connexions (resp. $\mathfrak{D}$- régulières, birégulières) graduées de V vers $\mathfrak{X}$.

THEOREME 4.1. *Soient* $\mathfrak{X}$ *et* V *deux espaces* (K, F)*- linéaires gradués. On a des isomorphismes canoniques*

$$Homgr_K(\mathfrak{X}, \hat{\mathfrak{J}}gr_K(V)) \approx \hat{\mathfrak{C}}gr_K(V, \mathfrak{X})$$
$$\mathfrak{R}gr_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{X}, V) \approx \hat{\mathfrak{C}}^d gr_K(V, \mathfrak{X})$$
$$Homgr_F(\mathfrak{X}, \hat{\mathfrak{J}}gr_K(V)) \approx \hat{\mathfrak{C}}^{br} gr_K(V, \mathfrak{X})$$

définis au moyen des formules (4. 2) et

$$(4.4) \qquad \rho_I(X)v = (Dv)(X).$$

DEMONSTRATION. En effet

$$\begin{aligned} \rho_I(X)(fv) &= \{D(fv)\}(X) = \{(df) \wedge v + J_F(f) \wedge (Dv)\}(X) = \\ &= ((df)X)\, v + J_F(f)((Dv)X) \\ &= (\rho_D(X)f)v + J_F(f)(\rho_I(X)v). \end{aligned}$$

Les conditions de linéarité sont vérifiées par un calcul analogue.

Le théorème 4.1 exprime d'une façon précise que les notions de représentations infinitésimales (resp. $\mathfrak{D}$- régulières, birégulières) sont équivalentes aux notions d'opérateurs de connexion (resp. $\mathfrak{D}$- réguliers, biréguliers).

5. Opérateurs d'Elie Cartan.

Soient $\mathfrak{X}$ et V deux espaces (K, F)- linéaires gradués. On dira que (D^*, d) est un *opérateur d'Elie Cartan gradué* sur $(V, \mathfrak{X})$ si

$$(D^*, d) \in Hom_K(V, \mathfrak{X}^* \otimes_F V) \times \mathfrak{C}gr_K(F, A_F(\mathfrak{X}, F))$$

et

$$(5.1) \qquad D^*(fv) = (df) \otimes v + J(f)(D^*v).$$

On note $\Gamma gr_K(V, \mathfrak{X})$ l'espace (K, F)- linéaire constitué par les opérateurs d'Elie Cartan gradués sur $(V, \mathfrak{X})$. Du théorème 4.1 on déduit :

PROPOSITION 5.1. *Soient* $\mathfrak{X}$ *et* V *deux espaces* (K, F) *- linéaires gradués. Si* ν *est l'application canonique de* $\mathfrak{X}^* \otimes_F V$ *dans* $Hom_F(\mathfrak{X}, V)$,

$$(\nu(\omega \otimes v))X = \omega(X)\, v,$$

et si pour $(D^*, d) \in \Gamma gr_K(V, \mathfrak{X})$ *on pose*

$$(Dv)(X) = (\nu(D^*v))(X), \tag{5.2}$$

alors $(D, d) \in \hat{\mathfrak{S}} gr_K(V, \mathfrak{X})$. *Par conséquent il existe des homomorphismes*

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma gr_K(V, \mathfrak{X}) & \\ \swarrow & & \searrow \\ Hom_F(\mathfrak{X}, \hat{\mathfrak{J}} gr_K(V)) & \rightleftarrows & \hat{\mathfrak{S}}^{br}_{gr_K}(V, \mathfrak{X}) \end{array} \tag{5.3}$$

définis au moyen des formules (4.2), (4.4) *et* (5.2).

Si D et D^* vérifient la formule (5.2), on dira qu'ils sont *associés*.

Soient A et U deux espaces (K, F)-linéaires munis de structures de K-algèbres et graduations $(A^p \mid p \in Z)$ et $(U^q \mid q \in Z)$ respectivement, (0)-compatibles avec les structures d'anneaux et telles que $F = A^o = U^o$. On notera $\mathfrak{U}(A, U)$ la F-algèbre bigraduée telle que

$$\mathfrak{U}^p_q(A, U) = A^q \otimes_F U^p,$$

avec les identifications

$$\mathfrak{U}^o_q(A, U) = A^q \text{ et } \mathfrak{U}^p_o(A, U) = U^p,$$

le produit étant caractérisé par l'identité

$$(\omega \otimes u).(\pi \otimes v) = (\omega\pi) \otimes (uv), \omega, \pi \in A \text{ et } u, v \in U.$$

Si l'anneau gradué A est (0)-commutatif, alors

$$\omega.(\pi \otimes v) = (-1)^{qp}(\pi \otimes v).\omega \quad \text{si } \omega \in A^q \text{ et } \pi \in A^p. \tag{5.4}$$

Si de plus U est aussi (0)-commutatif, alors

$$L.L' = (-1)^{pp' + qq'} L'.L \text{ si } L \in \mathfrak{U}^p_q(A, U) \text{ et } L' \in \mathfrak{U}^{p'}_{q'}(A, U).$$

Si $\mathfrak{X}$ et V sont deux espaces (K, F)-linéaires, on notera brièvement

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{X}, V) = \mathfrak{U}(A_F(\mathfrak{X}, F), \otimes_F(V))$$

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{X}, V) = \mathfrak{U}(A_F(\mathfrak{X}, F), \Lambda_F(V)).$$

THEOREME 5.1. *Soient* $\mathfrak{X}$ *et* V *deux espaces* (K, F)*-linéaires et* $d \in \mathfrak{D}^1 gr_K(A_F(\mathfrak{X}, F))$. *Si*

$$D^* \in Hom_K(V, A^1_F(\mathfrak{X}, F) \otimes_F V)$$

et

$$D^*(fv) = (df) \otimes v + f(D^*v), f \in F \text{ et } v \in V,$$

donc

$$(D^*, d) \in \Gamma_K(V, \mathfrak{X}),$$

alors on a :

I. Il existe un seul élément de $\mathrm{End}_K(\mathfrak{T}(\mathfrak{X}, V))$ *aussi noté* D^* *tel que*

1) $D^*(\mathfrak{T}^p_q(\mathfrak{X}, V)) \subset \mathfrak{T}^p_{q+1}(\mathfrak{X}, V)$,

2) $D^*(L.M) = (D^*L).M + (-1)^q L.(D^*M)$,

où $L \in \mathfrak{T}^p_q(\mathfrak{X}, V)$ *et* $M \in \mathfrak{T}^r_s(\mathfrak{X}, V)$,

3) D^* *coïncide avec* d *sur* $\mathfrak{T}^o(\mathfrak{X}, V) = A_F(\mathfrak{X}, F)$ *et la contraction de* D^* *à* $(V, A^1_F(\mathfrak{X}, F) \otimes_F V)$ *coïncide avec l'application* K*-linéaire* D^* *sous-jacente à l'opérateur d'Elie Cartan donné d'avance.*

En particulier

$$D^*(\omega.M) = (d\omega).M + (-1)^q \omega.(D^*M)\ ,\ \omega \in A^q_F(\mathfrak{X}, F);$$

donc si l'on considère $\mathfrak{T}(\mathfrak{X}, V)$ *en tant que module bigradué sur* $A_F(\mathfrak{X}, F)$, *alors* (D^*, d) *est une translation infinitésimale graduée de bidegré* $\binom{0}{1}$.

II. L'énoncé déduit de I en remplaçant partout $\mathfrak{T}^{\{p\}}_{\{p\}}(\mathfrak{X}, V)$ *par* $\mathfrak{S}^{\{p\}}_{\{q\}}(\mathfrak{X}, V)$.

DEMONSTRATION. Soit $L \in \mathfrak{T}^p_q(\mathfrak{X}, V)$, alors L est une combinaison F-linéaire d'éléments de la forme

$$M = \omega v_1 \dots v_p\ ,\ \text{où } \omega \in A^q_F(\mathfrak{X}, F) \text{ et } v_1, \dots, v_p \in V,$$

puisque $\otimes_F(V)$ est polynomiale. S'il existe D^* satisfaisant les conditions 1), 2) et 3), alors

$$D^*M = (d\omega)v_1 \dots v_p + (-1)^q \omega.(\Sigma v_1 \dots D^*v_i \dots v_p).$$

Cette identité et la F-linéarité assurent l'unicité de D^*.

La preuve de l'existence de D^* vérifiant les propriétés 1), 2) et 3) sera faite en deux étapes. La première sur $\mathfrak{T}^p_o(\mathfrak{X}, V)$, la deuxième sur $\mathfrak{T}^p_q(\mathfrak{X}, V)$. En effet, soit

$$\varphi_{D^*} : (v_1, \dots, v_p) \to \Sigma v_1 \dots D^*v_i \dots v_p;$$

alors φ_{D^*} est une application multiadditive du F-module V dans $\mathfrak{T}^p_1(\mathfrak{X}, V)$ telle que

$$\varphi_{D^*}(fv_1, \dots, v_p) = \varphi_{D^*}(v_1, \dots, fv_i, \dots, v_p),\ 1 \le i \le p.$$

Donc, (N. Bourbaki, algèbre, chap. 2, 3^e édition, §5) il existe une application additive D^* de $\mathfrak{T}^p_o(\mathfrak{X}, V)$ dans $\mathfrak{T}^p_1(\mathfrak{X}, V)$ telle que

$$D^*(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) = \varphi_{D^*}(v_1, \dots, v_p).$$

Pour que D^* vérifie 2) pour $L \in \mathfrak{T}^p_o(\mathfrak{X}, V)$, il suffit, à cause de la F-linéarité, de considérer le cas $L = u_1 \otimes \dots \otimes u_p$ et $M = v_1 \otimes \dots \otimes v_r$, où $u_i, v_i \in V$. Dans ce cas 2) est une conséquence immédiate de la dernière formule.

Pour compléter la preuve, il faut considérer le deuxième cas. Soit

$$\psi_{D^*} : (\omega, v) \in \mathfrak{T}^o_q(\mathfrak{X}, V) \times \mathfrak{T}^p_o(\mathfrak{X}, V) \to (d\omega)v + (-1)^q \omega.(D^* v) \in \mathfrak{T}^p_{q+1}(\mathfrak{X}, V),$$

alors ψ_{D^*} est biadditive et

$$\psi_{D^*}(f\omega, v) = \psi_{D^*}(\omega, fv),$$

donc il existe une application additive

$$D^* : \mathfrak{T}^p_q(\mathfrak{X}, V) = \mathfrak{T}^o_q(\mathfrak{X}, V) \otimes_F \mathfrak{T}^p_o(\mathfrak{X}, V) \to \mathfrak{T}^p_{q+1}(\mathfrak{X}, V)$$

telle que

$$D^*(\omega \otimes v) = \psi_{D^*}(\omega, v) = (d\omega)v + (-1)^q \omega(D^* v)$$

pour tout $\omega \in \mathfrak{T}^o_q(\mathfrak{X}, V)$ et tout $v \in \mathfrak{T}^p_o(\mathfrak{X}, V)$.

Pour vérifier la propriété 2) dans ce 2^e cas, il suffit en vertu de la F-linéarité de considérer le cas spécial $L = \omega \otimes u$ et $M = \eta \otimes v$, où $\omega \in \mathfrak{T}^o_q(\mathfrak{X}, V)$, $\eta \in \mathfrak{T}^o_s(\mathfrak{X}, V)$, $u \in \mathfrak{T}^p_o(\mathfrak{X}, V)$ et $v \in \mathfrak{T}^r_o(\mathfrak{X}, V)$. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned}
D^*(L.M) &= D^*\{(\omega \otimes u).(\eta \otimes v)\} = D^*\{(\omega \wedge \eta) \otimes (u \otimes v)\} \\
&= \{d(\omega \wedge \eta)\}(u \otimes v) + (-1)^{q+s}(\omega \wedge \eta) D^*(u \otimes v) \\
&= \{(d\omega) \wedge \eta + (-1)^q \omega \wedge (d\eta)\}(u \otimes v) + \\
&+ (-1)^{q+s}(\omega \wedge \eta)\{(D^* u)v + u(D^* v)\} \\
&= \{(d\omega) \otimes u\}(\eta \otimes v) + (-1)^q (\omega \otimes u).\{(d\eta) \otimes v\} + \\
&+ (-1)^q (\omega . D^* u)(\eta \otimes v) + (-1)^{q+s}(\omega \otimes u)(\eta . D^* v) \\
&= \{(d\omega) \otimes u + (-1)^q \omega . D^* u\}(\eta \otimes v) + \\
&+ (-1)^q (\omega \otimes u)\{(d\eta) \otimes v + (-1)^s \eta . D^* v\} \\
&= (D^* L).M + (-1)^q L.(D^* M).
\end{aligned}$$

Dans ce calcul on fait usage de la relation $\eta(D^* u) = (-1)^s (D^* u)\eta$, laquelle est conséquence de l'identité (5.4).

La propriété 3) est vraie à cause de la construction réalisée.

La démonstration de II est analogue à celle de I.

6. La représentation infinitésimale graduée i.

LEMME 6.1. *Soit $\wedge \in L_F(V_1, V_2; V)$. Alors pour $X \in \mathfrak{X}$, $P \in A^p_F(\mathfrak{X}, V_1)$ et $Q \in A^q_F(\mathfrak{X}, V_2)$ on a*

$$(6.1) \qquad i(P \wedge Q) = (i(X)P) \wedge Q + (-1)^p P \wedge (i(X)Q).$$

Par conséquent le couple (i, i) définit une r.i.br. de $\mathfrak{X}$ dans $\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V)$ telle que pour chaque $X \in \mathfrak{X}$ le couple $(i(X), i(X))$ soit une t.i.g. de $\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V)$ de degré -1.

DEMONSTRATION. En effet,

$$\langle \mathfrak{X}_{(p+q-1)}, i(X)(P \wedge Q) \rangle =$$
$$= \sum_{(\sigma_{p-1})(\tau_q)} \varepsilon_{(\sigma\tau)} \langle X \wedge \mathfrak{X}_{(\sigma)}, P \rangle \wedge \langle \mathfrak{X}_{(\tau)}, Q \rangle +$$
$$\sum_{(\sigma'_p)(\tau'_{q-1})} \varepsilon_{(\sigma'\tau')} \langle \mathfrak{X}_{(\sigma')}, P \rangle \wedge \langle X \wedge \mathfrak{X}_{(\tau')}, Q \rangle$$

mais la première somme est égale à $\langle \mathfrak{X}_{(p+q-1)}, i(X)P) \wedge Q \rangle$ la deuxième somme est égale à $(-1)^p \langle \mathfrak{X}_{(p+q-1)}, P \wedge i(X)Q \rangle$.

Si $R \in \tilde{A}^r_F(\mathfrak{X})$ et $S \in \tilde{A}^s_F(\mathfrak{X}, V)$, on pose

$$(6,2) \quad \langle \mathfrak{X}_{(r+s-1)}, \tilde{i}(R)S \rangle = \sum \varepsilon_{(\sigma\tau)} \langle \langle \mathfrak{X}_{(\sigma)}, R \rangle \wedge \mathfrak{X}_{(\tau)}, S \rangle = \sum \varepsilon_{(\sigma\tau)} \langle \mathfrak{X}_{(\tau)}, i(\langle \mathfrak{X}_{(\sigma)}, R \rangle)S \rangle \quad \begin{cases} (\sigma) = (\sigma_r) \\ (\tau) = (\tau_{s-1}). \end{cases}$$

En particulier

$$\tilde{i}(R)S = i(R)S \text{ si } r \leq 0.$$

THEOREME 6.1. *Etant donnés deux espaces (K, F) - linéaires $\mathfrak{X}$ et V, le couple $(\tilde{i}, \tilde{i})$ défini une r.i. br. de degré -1 de l'espace $(K, \mathcal{E}_F(\mathfrak{X}))$ - linéaire gradué $\tilde{A}_F(\mathfrak{X})$ dans l'espace $(K, \mathcal{E}_F(\mathfrak{X}))$ - linéaire gradué $\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V)$,*

$$\tilde{i}(\tilde{A}^r_F(\mathfrak{X}))(\tilde{A}^s_F(\mathfrak{X}, V)) \subset A^{s+r-1}_F(\mathfrak{X}, V), \ \tilde{i}(\tilde{A}^r_F(\mathfrak{X}))(\mathcal{E}^s_F(\mathfrak{X})) \subset \mathcal{E}^{s+r-1}_F(\mathfrak{X}).$$

De plus si pour $R \in \tilde{A}^r_F(\mathfrak{X})$ et $S \in \tilde{A}^s_F(\mathfrak{X})$ on pose

$$(6.3) \qquad \{R, S\} = \tilde{i}(S)R - (-1)^{(s+1)(r+1)} \tilde{i}(R)S,$$

alors cette accolade définit une structure de F - algèbre de Lie graduée sur $\overline{A}_F(\mathfrak{X})$, où $\overline{A}^r_F(\mathfrak{X}) = A^{r+1}_F(\mathfrak{X})$.

$$(6.4) \qquad \{R, S\} = (-1)^{(r+1)(s+1)-1} \{S, R\}$$

$$(6.5) \qquad \sum_{Cyc} (-1)^{(r+1)(t+1)} \{\{R, S\}, T\} = 0.$$

On a encore les identités suivantes

$$(6.6) \qquad \{R, \omega \wedge S\} = \{\tilde{i}(R)\omega\} \wedge S + (-1)^{deg(\omega)} \omega \wedge \{R, S\}, \ \omega \in \mathcal{E}_F(\mathfrak{X}),$$

$$(6.7) \qquad \tilde{i}(\{R, S\}) = [\tilde{i}(R), \tilde{i}(S)]$$

$$\tilde{i}(1_{\mathfrak{X}})R = rR, \ \tilde{i}(R)1_{\mathfrak{X}} = R, \ \{R, 1_{\mathfrak{X}}\} = (r-1)R$$
$$\tilde{i}(R)(\tilde{A}^{r-1}_F(\mathfrak{X}, V)) = (0),$$

où $1_{\mathfrak{X}}$ est l'application identité de $\mathfrak{X}$.

DEMONSTRATION. En effet, la formule

$$(6.1') \qquad \tilde{i}(R)(P \wedge Q) = (\tilde{i}(R)P) \wedge Q + (-1)^{rq} P \wedge (\tilde{i}(R)Q)$$

est conséquence de (6.1) et de la 2e formule de (6.2). Les formules (6.4) et (6.5) sont conséquences de la formule (6.7); en effet, si l'on pose

$$R\, iS = i(S)R,$$

alors la structure de groupe additif gradué de $\tilde{A}_F(\mathfrak{X})$ est (-1)-compatible avec la loi interne i et (6.7) correspond à (0.2), $\gamma=-1$. Donc (6.4) et (6.5) sont valables à cause du théorème 0.1. Si l'on considère $\tilde{A}_F(\mathfrak{X})$ avec la graduation $\overline{A}^r_F(\mathfrak{X})=A_F^{r+1}(\mathfrak{X})$, $r \in Z$, en appliquant (1.2) du théorème 1.2 on obtient (6.6). La vérification de (6.7) est un simple calcul.

En particulier pour $R \in End_F(\mathfrak{X})$ on a

$$\langle \mathfrak{X}_{(s)}, i(R)S \rangle = \langle \langle \mathfrak{X}_{(s)}, R^{\wedge} \rangle, S \rangle = \Sigma (-1)^j \langle R(X_j) \wedge \mathfrak{X}^{\hat{j}}_{(s)}, S \rangle$$
$$\langle \mathfrak{X}_{(s)}, i(S)R \rangle = \langle \langle \mathfrak{X}_{(s)}, S \rangle, R \rangle .$$

Si $R,\ S \in A^2_F(\mathfrak{X})$, alors

$$\{R,S\}(X,Y,Z) = \sum_{Cyc} R(S(X,Y),Z) + S(R(X,Y),Z).$$

Si $R, S \in End_F(\mathfrak{X})$, alors

$$i(R)S = S \circ R \in End_F(\mathfrak{X}) \text{ et } \{R,S\} = RS - SR = [R,S].$$

Par conséquent :

COROLLAIRE 6.1. *La contraction de (i, i) à $(End_F(\mathfrak{X}), \hat{\mathfrak{J}}\mathring{g}r_K(A_F(\mathfrak{X},F)))$ définit une représentation infinitésimale birégulière de l'espace (K,F)-linéaire $End_F(\mathfrak{X})$ dans l'espace (K,F)-linéaire $A_F(\mathfrak{X},F)$ telle que pour tout $R,\ S \in End_F(\mathfrak{X})$ et tout $f \in F$ on ait :*

$$[R, fS] = f[R,S]$$
$$(6.8) \qquad i([R,S]) = [i(R), i(S)]$$
$$i(1_{\mathfrak{X}})R = R = i(R)1_{\mathfrak{X}}, \text{ donc } [R, 1_{\mathfrak{X}}] = 0.$$

7. Représentations infinitésimales sur les espaces (K, F) - linéaires F - libres de dimensions finies.

Soient V un espace (K,F)-linéaire et J un K-automorphisme de la K-algèbre F ; on note $J(f)=f_J$. On désigne par $N_K(V)$ l'ensemble des

$$T \in End_K(V)$$

tels que pour tout $f \in F$ il existe $g \in F$ tel que

$$(7.1) \qquad T(fv) = gv + f_J(Tv) \text{ pour tout } v \in V.$$

On a

$$\mathfrak{T}_K(V) \subset N_K(V).$$

PROPOSITION 7.1. *Soit V un espace (K, F)-linéaire. Si V est F-fidèle alors $\mathfrak{T}_K(V) = N_K(V)$; d'une façon plus précise pour tout $T \in N_K(V)$ il existe une seule $D \in \mathfrak{D}_K(F)$ telle que $(T, D) \in \hat{\mathfrak{T}}_K(V)$.*

DEMONSTRATION. Soit g' un autre élément de F vérifiant *(7.1)*, donc

$$T(fv) = g'v + f_J(Tv),$$

donc $(g - g')v = 0$, c'est-à-dire $g = g'$, en vertu de la F-fidélité de V. Notons f_D l'unique élément de F vérifiant (7.1). Alors

$$(f \in F \to f_D \in F) \in \mathfrak{D}_K(F); \tag{7.2}$$

en effet

$$\begin{aligned} T\{(fg).v\} = T\{f(gv)\} &= f_D(gv) + f_J\{T(gv)\} \\ &= (f_D g)v + f_J\{g_D.v + g_J T(v)\} \\ &= (f_D.g)v + (f_J g_D)v + (f_J g_J)(Tv) \\ &= \{f_D.g + f_J g_D\} v + (fg)_J(Tv). \end{aligned}$$

Donc

$$(f.g)_D = f_D g + f_J g_D \text{ pour tout } f, g \in F,$$

à cause de la F-fidélité de V. La F-fidélité entraîne aussi que pour chaque $T \in N_K(V)$ la $D \in \mathfrak{D}_K(F)$ définie par (7.2) est unique.

On dira qu'un F-module V projectif et de type fini est de *dimension constante* si la dimension des F-modules libres $V_{(\mathfrak{P})} = F_{(\mathfrak{P})} \otimes_{\mathfrak{P}} V$ déduits de V par extension de F à l'idéal premier $\mathfrak{P}$ de F est indépendante de $\mathfrak{P}$.

LEMME 7.1. *Soit V un espace (K, F)-linéaire tel que V en tant que F-module soit projectif, de type fini et de dimension constante. Alors V est F-fidèle.*

DEMONSTRATION. Soit I l'idéal de F constitué des $f \in F$ tels que $fv = 0$ pour tout $v \in V$. On peut vérifier que $I \otimes_{\mathfrak{P}} F_{(\mathfrak{P})} = 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de F. Donc $I = 0$.

COROLLAIRE 7.1. *Soit V un espace (K, F)-linéaire tel que V en tant que F-module soit projectif, de type fini et de dimension constante. Alors pour tout $T \in N_K(V)$ il existe une seule $D \in \mathfrak{D}_K(F)$ telle que $(T, D) \in \hat{\mathfrak{T}}_K(V)$. Par suite $\mathfrak{T}_K(V) = N_K(V)$.*

Soit V un espace (K, F)-linéaire F-libre de dimension finie. En vertu du corollaire 7.1. la projection

$$(T, D) \in \hat{\mathfrak{T}}_K(V) \to T \in \mathfrak{T}_K(V) = N_K(V)$$

est bijective et on identifiera $\hat{\mathfrak{T}}_K(V)$ à $\mathfrak{T}_K(V) = N_K(V)$. Soit $\{e_1, \dots, e_N\}$ une

F-base de V. Si $T \in N_K(V)$, on pose

$$T(e_\alpha) = \Sigma\, \mathcal{T}^\beta_\alpha e_\beta\,,\ \mathcal{T} = (\mathcal{T}^\beta_\alpha)\,.$$

Pour $v = \Sigma v^\alpha e_\alpha \in V$,

$$(7.3) \qquad T(v) = \Sigma\,(v^\beta_D + v^\alpha_J \mathcal{T}^\beta_\alpha) e_\beta\,,$$

alors $T \in N_K(V)$ est complètement déterminé par la matrice $\mathcal{T}$ et la K-dérivation $f \to f_D$ associée à T. Réciproquement si $\mathcal{T}$ est une matrice quelconque d'éléments de F, $D : f \to f_D$ une K-dérivation quelconque de F, et si $T : V \to V$ est définie par (7.3), alors $(T, D) \in \hat{\mathfrak{T}}_K(V)$.

Soit $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_N\}$ une autre F-base de V. On pose

$$\bar{e}_{\beta'} = \Sigma\, A^\beta_{\beta'} e_\beta \text{ et } T(\bar{e}_{\alpha'}) = \Sigma\, \bar{\mathcal{T}}^{\beta'}_{\alpha'} \bar{e}_{\beta'}\,.$$

Or

$$\begin{aligned} T(\bar{e}_\alpha) &= \Sigma\, T(A^\alpha_{\alpha'} e_\alpha) = \Sigma\,(D A^\alpha_{\alpha'}) e_\alpha + (A^\alpha_{\alpha' J})(T e_\alpha) = \\ &= \Sigma\,(D A^\beta_{\alpha'}) e_\beta + (A^\alpha_{\alpha' J}) \mathcal{T}^\beta_\alpha e_\beta \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \{D A^\beta_{\alpha'} + A^\alpha_{\alpha' J} \mathcal{T}^\beta_\alpha\}\, e_\beta\,; \end{aligned}$$

mais

$$T(\bar{e}_\alpha) = \sum_{\beta'} \bar{\mathcal{T}}^{\beta'}_{\alpha'} \bar{e}_{\beta'} = \sum_{\beta', \beta} \{\bar{\mathcal{T}}^{\beta'}_{\alpha'} A^\beta_{\beta'}\}\, e_\beta\,;$$

donc

$$(7.4) \qquad \sum_{\beta'} \bar{\mathcal{T}}^{\beta'}_{\alpha'} A^\beta_{\beta'} = D A^\beta_{\alpha'} + \sum_\alpha A^\alpha_{\alpha' J} \mathcal{T}^\beta_\alpha$$

ou encore sous la forme matricielle

$$(7.4') \qquad \bar{\mathcal{T}} A = D A + A_J \mathcal{T}\,.$$

Dans le reste du présent paragraphe on supposera F unitaire.

LEMME 7.2. *Soient $\mathfrak{X}$ et V deux espaces (K, F)-linéaires F-libres de dimensions finies. Alors les applications canoniques définies dans la propo.. 5.1 sont bijectives.*

Le lemme ci-dessus se démontre en remarquant que

$$\nu : \mathfrak{X}^* \otimes_F V \to Hom_F(\mathfrak{X}, V)$$

est une bijection avec les hypothèses admises. En vertu de la définition du produit de Grassmann associé à la loi externe de F-module de V, on a

$$\nu(\omega \otimes v) = \omega \wedge v\,.$$

Comme ν est bijectif, on identifiera $\mathfrak{X}^* \otimes_F V$ à $Hom_F(\mathfrak{X}, V)$ et on identifiera entre eux les espaces (K, F)-linéaires du diagramme (5.3).

Dans le reste du présent paragraphe on notera (D, d) un élément de $\hat{\mathfrak{C}}^{br}_K(V, \mathfrak{X})$,

$$D : V \to Hom_F(\mathfrak{X}, V), \ d : F \to Hom_F(\mathfrak{X}, F).$$

LEMME 7.3. *Soient* $\mathfrak{X}$ *et* V *deux espaces* (K, F)*-linéaires* F*-libres de dimensions finies. Soient* $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ *une* F*-base de* $\mathfrak{X}$ *et* $\{e_1, \dots, e_N\}$ *une* F*-base de* V*. Si* $(D^*, d) \in \Gamma_K(V, \mathfrak{X})$, *si* D *et* D^* *sont associés et si l'on pose*

$$(7.5) \qquad \langle e_\alpha, D\sigma_i \rangle = \Sigma\, \Gamma^\beta_{i\alpha} e_\beta ;$$

alors

$$(7.6) \qquad D^* e_\alpha = \Sigma\, \Gamma^\beta_{i\alpha} \sigma^i \otimes e_\beta$$

où $\{\sigma^1, \dots, \sigma^n\}$ *est la* F*-base duale de* $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$.

DEMONSTRATION. En effet, soit

$$D^* e_\alpha = \Sigma\, \Gamma^{*\beta}_{j\alpha} \sigma^j \otimes e_\beta ;$$

alors

$$\begin{aligned}\langle \sigma_i, D e_\alpha \rangle &= \nu(D^* e_\alpha)(\sigma_i) \\ &= \Sigma\, \Gamma^{*\beta}_{j\alpha} \{\nu(\sigma^j \otimes e_\beta)\}\, \sigma_i \\ &= \Sigma\, \Gamma^{*\beta}_{j\alpha} \langle \sigma^j, \sigma_i \rangle\, e_\beta \\ &= \Sigma\, \Gamma^{*\beta}_{j\alpha}\, e_\beta .\end{aligned}$$

Donc $\Gamma^{*\beta}_{i\alpha} = \Gamma^\beta_{i\alpha}$.

Soient $\{\tilde\sigma_1, \dots, \tilde\sigma_n\}$ et $\{\bar e_1, \dots, \bar e_N\}$ deux F-bases de $\mathfrak{X}$ et V respectivement. On écrira

$$\tilde\sigma_{j'} = \Sigma\, P^j_{j'} \sigma_j \ , \ \bar e_{\beta'} = \Sigma\, A^\beta_{\beta'} e_\beta$$

ou encore en langage matriciel

$$\tilde\sigma = P\sigma \ , \ \bar e = A e$$

ou

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix}$$

On pose

$$(7.7) \qquad \omega^\alpha_\beta = \sum_i \Gamma^\alpha_{\beta i}\, \sigma^i \ , \ \Omega = (\omega^\alpha_\beta), \ dA = (dA^\beta_{\beta'})$$

$$(7.\tilde 7) \qquad \tilde\omega^{\alpha'}_{\beta'} = \Sigma\, \Gamma^{\alpha'}_{\beta' i'} \tilde\sigma^{i'} \ , \ \tilde\Omega = (\tilde\omega^{\alpha'}_{\beta'}),$$

et, pour $v = \Sigma\, v^\alpha e_\alpha \in V$, on écrira

$$\frac{Dv^\alpha}{\sigma^j} = \langle \sigma_j, dv^\alpha \rangle + \Sigma\, v^\beta \Gamma^\alpha_{\beta j} ;$$

à cause des conventions faites on a

$$De_{\beta} = \Sigma\, \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge e_{\beta} \tag{7.8}$$

$$Dv = \sum_{\alpha} (dv^{\alpha} + \sum_{\beta} v^{\beta} \omega^{\alpha}_{\beta}) \wedge e_{\alpha}. \tag{7.9}$$

PROPOSITION 7.2. *Soient $\mathfrak{X}$ et V deux espaces (K, F)- linéaires F-libres de dimensions finies et $(D, d) \in \Gamma_K(V, \mathfrak{X})$. Avec les notations introduites ci-dessus on a*

$$\sum_{\alpha'} A^{\alpha}_{\alpha'}\, \overline{\omega}^{\alpha'}_{\beta'} = d\, A^{\alpha}_{\beta'} + \Sigma\, A^{\beta}_{\beta'}\, \omega^{\alpha}_{\beta}\,, \tag{7.10}$$

$$\overline{\Omega} A = dA + A\Omega\,, \tag{7.10'}$$

$$\sum_{\alpha'} A^{\alpha}_{\alpha'}\, \tilde{\Gamma}^{\alpha'}_{\beta' i'} = \tilde{\sigma}_{i'}(A^{\alpha}_{\beta'}) + \sum_{\beta, i} A^{\beta}_{\beta'}\, \Gamma^{\alpha}_{\beta i}\, P^{i}_{i'} \tag{7.11}$$

où $\tilde{\sigma}_{i'}(A^{\alpha}_{\beta'}) = \langle \tilde{\sigma}_{i'}, dA^{\alpha}_{\beta'} \rangle$,

$$Dv = \Sigma\, \frac{Dv^{\alpha}}{\sigma^{i}}\, \sigma^{i} \wedge e_{\alpha} \tag{7.12}$$

$$\left(\frac{D\overline{v}^{\alpha'}}{\tilde{\sigma} i'}\right) A = P\left(\frac{Dv^{\alpha}}{\sigma i}\right),\ \frac{D(fv^{\alpha})}{\sigma i} = \langle \sigma_{j},\, df \rangle\, v^{\alpha} + f\left(\frac{Dv^{\alpha}}{\sigma i}\right). \tag{7.13}$$

DEMONSTRATION. En effet,

$$D\overline{e}_{\beta'} = \Sigma\, \overline{\omega}^{\alpha'}_{\beta'} \wedge \overline{e}_{\alpha'} = \Sigma\, \{ A^{\alpha}_{\alpha'}\, \overline{\omega}^{\alpha'}_{\beta'} \} \wedge e_{\alpha}. \tag{$*$}$$

En appliquant *(7.9)* à $\overline{e}_{\beta'} = \sum_{\alpha} A^{\alpha}_{\alpha'}\, e_{\alpha}$, on a

$$D\overline{e}_{\beta'} = \Sigma\, (dA^{\alpha}_{\beta'} + \Sigma\, A^{\beta}_{\beta'}\, \omega^{\alpha}_{\beta}) \wedge e_{\alpha}. \tag{$**$}$$

Donc il en résulte *(7.10)* et *(7. 10')*.

On a

$$dA^{\alpha}_{\beta'} = \Sigma\, \{ \sigma_{i}(A^{\alpha}_{\beta'}) \}\, \sigma^{i} \tag{$***$}$$

puisque $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ et $\{\sigma^1, \dots, \sigma_n\}$ sont des bases duales. En vertu de (7.7),($\tilde{7.7}$) et ($***$) on peut écrire ($*$) et ($**$) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} D\overline{e}_{\beta'} &= \Sigma\, \{ A^{\alpha}_{\alpha'}\, \tilde{\Gamma}^{\alpha'}_{\beta' i'}\, \tilde{\sigma}^{i'} \} \wedge e_{\alpha} \\ &= \Sigma\, \{ A^{\alpha}_{\alpha'}\, \Gamma^{\alpha'}_{\beta' i'} \}\, \tilde{\sigma}^{i'} \wedge e_{\alpha} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D\overline{e}_{\beta'} &= \sum_{\alpha} \{ (\tilde{\sigma}_{i'}(A^{\alpha}_{\beta'}) \}\, \tilde{\sigma}^{i'} + \sum_{\beta i} A^{\beta}_{\beta'}\, \Gamma^{\alpha}_{\beta i} \sigma^{i}) \wedge e_{\alpha} \\ &= \sum_{i', \alpha} \{ \tilde{\sigma}_{i'}(A^{\alpha}_{\beta'}) + \sum_{\beta, i} A^{\beta}_{\beta'}\, \Gamma^{\alpha}_{\beta i}\, P^{i}_{i'} \}\, \tilde{\sigma}^{i'} \wedge e_{\alpha}. \end{aligned}$$

En comparant les coefficients des deux formules ci-dessus on obtient (7.11).

Par suite de (7.9), de $dv^{\beta} = \Sigma\, \langle \sigma_{i}, dv^{\beta} \rangle\, \sigma^{i}$ et des notations adoptées on peut écrire

$$\begin{aligned}
Dv &= \Sigma \{ \Sigma \langle \sigma_i, dv^\beta \rangle \sigma^i \wedge e_\beta + v^\beta \Sigma \omega_\beta^\alpha \wedge e_\alpha \} \\
&= \Sigma \{ \Sigma \langle \sigma_i, dv^\beta \rangle \sigma^i \wedge e_\beta + v^\beta \Sigma \Gamma_{\beta i}^{\alpha} \sigma^i \wedge e_\alpha \} \\
&= \Sigma \{ \langle \sigma_i, dv^\alpha \rangle + \Sigma v^\beta \Gamma_{\beta i}^{\alpha} \} \sigma^i \wedge e_\alpha \\
&= \Sigma \frac{Dv^\alpha}{\sigma^i} \sigma^i \wedge e_\alpha .
\end{aligned}$$

Finalement montrons (7.13).

De (7.12) et de $\langle \sigma_i, \sigma^j \rangle = \delta_i^j$ on déduit

$$\langle \sigma_j, Dv \rangle = \Sigma \left(\frac{Dv^\alpha}{\sigma^j}\right) e_\alpha, \quad \langle \tilde{\sigma}_{j'}, Dv \rangle = \Sigma \left(\frac{D\overline{v}^{\alpha'}}{\tilde{\sigma}^{j'}}\right) \overline{e}_{\alpha'}$$

Or

$$\langle \tilde{\sigma}_{j'}, Dv \rangle = \langle P_{j'}^{j} \sigma_j, Dv \rangle = P_{j'}^{j} \langle \sigma_j, Dv \rangle = P_{j'}^{j} \left(\frac{Dv^\alpha}{\sigma^j}\right) e_\alpha ,$$

$$\langle \tilde{\sigma}_{j'}, Dv \rangle = \Sigma \left(\frac{D\overline{v}^{\alpha'}}{\tilde{\sigma}^{j'}}\right) \overline{e}_{\alpha'} = \Sigma \left(\frac{D\overline{v}^{\alpha'}}{\tilde{\sigma}^{j'}}\right) A_{\alpha'}^{\alpha} e_{\alpha} ,$$

Donc

$$P_{j'}^{j} \left(\frac{Dv^\alpha}{\sigma^j}\right) = \left(\frac{D\overline{v}^{\alpha'}}{\tilde{\sigma}^{j'}}\right) A_{\alpha'}^{\alpha} ,$$

$$P \left(\frac{Dv^\alpha}{\sigma^j}\right) = \left(\frac{D\overline{v}^{\alpha'}}{\tilde{\sigma}^{j}}\right) A .$$

$$\begin{aligned}
\frac{Dfv^\alpha}{\sigma^j} &= \langle \sigma_j, d(fv^\alpha) \rangle + \Sigma f v^\alpha \Gamma_{\beta j}^{\alpha} \\
&= \langle \sigma_j, df \rangle v_\alpha + f \langle \sigma_j, dv^\alpha \rangle + f \Sigma v^\alpha \Gamma_{\beta j}^{\alpha} \\
&= \langle \sigma_j, df \rangle v^\alpha + f . \left(\frac{Dv^\alpha}{\sigma^j}\right).
\end{aligned}$$

En examinant la démonstration de la proposition 7.2 on constate la validité du lemme suivant :

LEMME 7.4. *Soient $\mathfrak{X}$ et V deux espaces (K, F) - linéaires F - libres de dimensions finies et $d \in \mathcal{C}_K(F, A_F(\mathfrak{X}, F))$. Avec les conventions déjà faites on voit que les formules (7.10), (7.11) et (7.13) sont équivalentes.*

PROPOSITION 7.3. *Soient $\mathfrak{X}$ et V deux espaces (K, F) - linéaires F - libres de dimensions finies et $d \in \mathcal{C}_K(F, A_F(\mathfrak{X}, F))$. Avec les conventions déjà faites, si à chaque F - base $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ de $\mathfrak{X}$ et à chaque F - base $\{e_1, \ldots, e_N\}$ de V on associe*

$$\omega_\beta^\alpha \in Hom_F(\mathfrak{X}, F) \ \left(\text{resp. } \Gamma_{\beta i}^{\alpha}, \frac{Dv^\alpha}{\sigma^j} \in F\right)$$

vérifiant (7.10) (resp. (7.11), (7.13)) et si l'on définit Dv au moyen de la formule (7.12), alors Dv est indépendant des F - bases considérées et $(D, d) \in \hat{\mathfrak{C}}_K^{br}(V, \mathfrak{X})$.

DEMONSTRATION. En effet,

$$\Sigma \frac{Dv^{\alpha}}{\sigma^i}\sigma^i \wedge e_\alpha = \Sigma \frac{D\bar{v}^{\alpha'}}{\tilde{\sigma}^{i'}} \tilde{\sigma}^{i'} \wedge \bar{e}_\alpha$$

en vertu de (7.13). L'additivité de D est immédiate. Faisons la preuve de (5.1).

$$\begin{aligned} D(fv) &= \Sigma \frac{Dfv^{\alpha}}{\sigma^i}\sigma^i \wedge e_\alpha \\ &= \Sigma \{ \langle \sigma_i, df \rangle v^\alpha + f(\frac{Dv^\alpha}{\sigma^i})\} \sigma^i \wedge e_\alpha \\ &= \Sigma \{ \langle \sigma_i, df \rangle \sigma^i \} \wedge \{v^\alpha e_\alpha\} + f\{\frac{Dv^\alpha}{\sigma^i}\sigma^i \wedge e_\alpha\} \\ &= (df) \wedge v + f(Dv). \end{aligned}$$

PROPOSITION 7.4. *Soient $\mathfrak{X}$ et V deux espaces (K, F)-linéaires F-libres de dimensions finies et $d \in \mathcal{C}_K(F, A_F(\mathfrak{X}, F))$ tel qu'il existe $\{x^1, \dots, x^n\} \subset F$ et $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ étant une base de $A^1_F(\mathfrak{X}, F)$. Avec les conventions introduites, si $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\} \subset \mathfrak{X}$ est la F-base duale de $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ et si l'on pose*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, df \rangle \quad \text{pour } f \in F,\ i = 1, \dots, n,$$

alors pour $\sigma^i = dx^i$, $\sigma_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, on a

$$P^{\alpha}_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^{\alpha'}}, \quad \tilde{\sigma}_{i'}(A^{\alpha}_{\beta'}) = \frac{\partial A^{\alpha}_{\beta'}}{\partial \tilde{x}^{i'}}.$$

Donc

$$(7.11') \qquad \sum_{\alpha'} A^{\alpha}_{\alpha'} \tilde{\Gamma}^{\alpha'}_{\beta' i'} = \frac{\partial A^{\alpha}_{\beta'}}{\partial \tilde{x}^{i'}} + \sum_{\beta, i} A^{\beta}_{\beta'} \Gamma^{\alpha}_{\beta i} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{i'}}.$$

$$\frac{Dv^\alpha}{dx^j} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^j} + \Sigma v^\beta \Gamma^{\alpha}_{\beta j}.$$

Dans ce cas on écrira aussi

$$v^\alpha |\, i = \frac{Dv^\alpha}{dx^i} \quad \text{et} \quad \nabla v^\alpha = dv^\alpha + \Sigma v^\beta \omega^\alpha_\beta = v^\alpha |\, i\, dx^i.$$

Donc

$$Dv = \Sigma (\nabla v^\alpha) \wedge e_\alpha.$$

REMARQUE 7.1. Soit $d \in \mathcal{C}_K(F, A_F(\mathfrak{X}, F))$ tel qu'il existe $\{x^1, \dots, x^n\}$ et que $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ soit une base de $A^1_F(\mathfrak{X}, F)$. Si l'on pose

$$\rho_D(X)f = \langle X, df \rangle \quad \text{pour } X \in \mathfrak{X} \text{ et } f \in F,$$

alors $\rho_D \in Hom_F(\mathfrak{X}, \mathfrak{D}_K(F))$ est injective. En effet, soit $\rho_D(X)f = \rho_D(Y)f$ pour tout $f \in F$. On a

$$X = \Sigma X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{et} \quad Y = \Sigma Y^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

donc

$$\begin{aligned} \rho_D(X)\, x^j &= \Sigma X^i \rho_D(\frac{\partial}{\partial x^i}) x^j = \Sigma X^i \delta^j_i = X^j \\ &= \rho_D(Y) x^j = Y^j. \end{aligned}$$

CHAPITRE II

ESPACES INFINITESIMAUX GRADUES

8. Espaces d'Elie Cartan gradués.

On dira qu'une application K-bilinéaire μ de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ dans V est $\lceil(\gamma)$-$\rceil$ *graduée* $\lceil$ où $\gamma \in Z\rceil$ si

$$\mu(\mathfrak{X}^r \times \mathfrak{X}^s) \subset V^{r+s\lceil+\gamma\rceil},$$

c'est-à-dire si les graduations sous-jacentes sont $\lceil(\gamma)$-$\rceil$ compatibles avec μ. Si de plus

$$\mu(X, X) = 0 \text{ pour tout } X \in \mathfrak{X}^{2r},$$

on dira que μ est *pair-alternée.*

Dans ce chapitre on supposera toujours que la K-algèbre graduée F est (0)-commutative.

Une *structure de (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan gradué* $\lceil$*régulier*$\rceil$ sur l'ensemble $\mathfrak{X}$ est défini par la donnée :

- *d'une structure d'espace (K, F)-linéaire graduée $(\mathfrak{X}^r \mid r \in Z)$ sur $\mathfrak{X}$;*
- *d'une représentation infinitésimale graduée $\lceil\mathfrak{D}$-régulière$\rceil$ de degré 0, notée (ad, ρ_D), de $\mathfrak{X}$ vers $\mathfrak{X}$,* c'est-à-dire

$$(ad, \rho_D) : \mathfrak{X} \to \hat{\mathfrak{J}}gr_K(\mathfrak{X})$$

est K-linéaire $\lceil$de plus $\rho_D : \mathfrak{X} \to \mathfrak{D}gr_K(F)$ est F-linéaire$\rceil$ et

$$\rho_D(\mathfrak{X}^r) \subset \mathfrak{D}gr^r_K(F),$$

(8.1) $$[X, \omega Y] = (X_D\,\omega)Y + (-1)^{qr}\omega[X, Y],$$

où [,] est l'application K-bilinéaire de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{X}$ définie par

(8.2) $$[X, Y] = (ad X)Y$$

et $X_D = \rho_D(X)$, $X \in \mathfrak{X}^r$, $\omega \in F^q$;

ces données satisfaisant l'axiome

CI. La loi interne [,] est graduée, (0)-anti-commutative et pair-alternée.

Si de plus

CII. $$[X, Y]_D = [X_D, Y_D]$$

on dira que la structure de (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan gradué est *sans courbure.*

Une structure de (K, F)- pré-espace d'Elie Cartan gradué vérifiant l'axiome suivant

$$CIII. \qquad \mathfrak{J}(X, Y, Z) = 0$$

sera appelée *structure de* (K, F)*- espace d'Elie Cartan gradué* . Dans ce cas par définition même $\mathfrak{X}$ est muni d'une structure de K- algèbre de Lie graduée.

EXEMPLE 8.1. En vertu du corollaire 0.3, $\mathfrak{D}gr_K(F)$ muni de $(ad, 1_{\mathfrak{D}gr_K(F)})$, où *ad* est la représentation *adjointe* définie par le crochet de deux dérivations graduées, est un (K, F)- espace d'Elie Cartan gradué régulier et sans courbure.

EXEMPLE 8.2. Soit $\mathfrak{X}$ un espace (K, F)- linéaire. Si l'on considère $A_F(\mathfrak{X})$ muni de la graduation $(E^q = A_F^{q+1}(\mathfrak{X}), q \in Z)$ et de l'accolade $\{\ ,\ \}$ sur $A_F(\mathfrak{X})$ défini par (6.3), il résulte des identités (6.4), (6.5), (6.6) et (6.7) que la représentation adjointe associée à $\{,\}$ et l'opération i définissent une structure de $(K, \mathfrak{E}_F(\mathfrak{X}))$- espace d'Elie Cartan gradué régulier et sans courbure.

EXEMPLE 8.3. Soit $\mathfrak{X}$ un espace (K, F)- linéaire gradué dont la graduation $(\mathfrak{X}^r \mid r \in Z)$ est compatible avec une loi interne $[\ ,\ ]$ sur $\mathfrak{X}$, K- bilinéaire, (0)- anti-commutative et satisfaisant (8.3) (et jacobienne), alors $(ad, 0)$ est un (K, F)- (pré)- espace d'Elie Cartan gradué régulier sans courbure.

D'autres exemples seront donnés dans le §14.

LEMME 8.1. *Soient* $\mathfrak{L}_1$ *et* $\mathfrak{L}_2$ *deux anneaux de Lie gradués. Si sur* $\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2$ *on définit le crochet suivant*

$$(8.4) \qquad [(T,D),(T',D')] = ([T,T'], [D,D']),$$

où $(T, D), (T', D') \in \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2$, *et si l'on pose*

$$(T, D) \in (\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2)^t \text{ si, et seulement si, } T \in \mathfrak{L}_1^t \text{ et } D \in \mathfrak{L}_2^t,$$

alors la graduation ci-dessus et le crochet définit par (8.4) *définissent un anneau de Lie gradué.*

DEMONSTRATION. En effet, soit $t = deg(T, D)$ et $t' = deg(T', D')$, alors

$$\begin{aligned}
[(T, D),(T', D')] &= ([T, T'], [D, D']) \\
&= (-1)^{tt'+1}([T', T], [D', D]) \\
&= (-1)^{tt'+1}[(T', D'),(T, D)].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(-1)^{deg(T, D) deg(T'', D'')}[[(T, D),(T', D')],(T'', D'')] = \\
&= (-1)^{deg(T, D) deg(T'', D'')}[([T, T'], [D, D']),(T'', D'')] \\
&= (-1)^{deg(T, D) deg(T'', D'')}([[T,T'], T''], [[D, D'], D''])
\end{aligned}$$

$$= ((-1)^{deg(T)deg(T'')}[[T, T'], T''], (-1)^{deg(D)deg(D'')}[[D, D'], D'']).$$

Donc

$$\sum_{Cyc} (-1)^{deg(T,D)deg(T'',D'')}[[(T,D),(T',D')], (T'',D'')] =$$

$$= (\sum_{Cyc} (-1)^{deg(T)deg(T'')}[[T,T'], T''], \sum_{Cyc} (-1)^{deg(D)deg(D'')}[[D,D'], D'']).$$

De cette dernière identité il résulte l'identité de Jacobi pour $\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2$.

Du théorème 1. 1 et du lemme 8.1 il résulte

THEOREME 8.1. *Soit V un espace (K,F)-linéaire gradué. Soit $\hat{\rho}_V : \hat{\mathfrak{I}}gr_K(V) \to \mathfrak{D}gr_K(F)$ telle que $\hat{\rho}_V(T,D) = D$ et ad la représentation adjointe associée au crochet défini sur $\hat{\mathfrak{I}}gr_K(V)$ par*

$$(8.4') \qquad [(T, D),(T', D')] = ([T, T'], [D, D']),$$

où $(T,D),(T',D') \in \hat{\mathfrak{I}}gr_K(V)$. Alors $\hat{\mathfrak{I}}gr_K(V)$ muni de $(ad, \hat{\rho}_V)$ est un (K,F)-espace d'Elie Cartan gradué régulier et sans courbure. $\hat{\mathfrak{I}}gr_K(V)$ muni du couple $(ad, \hat{\rho}_V)$ sera appelé (K,F)-espace d'Elie Cartan gradué régulier sans courbure associé à l'espace (K,F)-linéaire V. De plus $pr_1 : \hat{\mathfrak{I}}gr_K(V) \to \mathfrak{I}gr_K(V)$, $pr_1(T,D) = T$, est K-linéaire et est un épimorphisme de l'anneau de Lie gradué $\hat{\mathfrak{I}}gr_K(V)$ sur l'anneau de Lie gradué $\mathfrak{I}gr_K(V)$.

Comme $D \in \mathfrak{D}gr_K(F) \to (D,D) \in \hat{\mathfrak{I}}gr_K(F)$ est bijective, si F possède une unité, on identifiera alors $\mathfrak{D}gr_K(F)$ à $\hat{\mathfrak{I}}gr_K(F)$.

Un (K,F)-("pré-") espace de Cartan gradué dont les graduations sont triviales sera appelé brièvement (K,F)-("pré-") espace d'Elie Cartan. Par hypothèse dans ce cas F est commutatif.

LEMME 8.2. *Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K,F)-pré-espace d'Elie Cartan gradué. Si $X \in \mathfrak{X}^r$, $Y \in \mathfrak{X}^s$, $Z \in \mathfrak{X}^t$, $\pi \in F^p$ et $\omega \in F^q$, alors*

$$(8.5) \qquad [\omega Y, X] = \omega[Y, X] - (-1)^{r(s+q)}(X_D \omega) Y;$$

$$(8.6) \qquad (-1)^{(r+s)q}\omega \mathfrak{J}(X, Y, Z) - \mathfrak{J}(X, Y, \omega Z) = = \{[X_D, Y_D]\omega\} Z;$$

$$(8.7) \qquad [\pi X, \omega Y] = (-1)^{(r+p)q}\omega\pi[X, Y] + \{(\pi X)_D \omega\} Y + (-1)^{(r+p)(s+q)}\omega(Y_D \pi) X;$$

$$(8.8) \quad \{(\pi X)_D \omega - \pi(X_D \omega)\} Y + (-1)^{(r+p)(s+q)}\{(\omega Y)_D \pi - \omega(Y_D \pi)\} X = 0.$$

DEMONSTRATION. La formule (8.5) est conséquence immédiate de la (0)-anti-commutativité de $[\ ,\ ]$ par rapport à la graduation $(\mathfrak{X}^r \mid r \in Z)$. On obtient la formule (8.6) en calculant le premier membre avec l'aide des formules (8.1), (8.5) et de l'anti-commutativité; d'ailleurs *(8.6)* est un cas particulier de la formule *(11.3)*. La formule *(8.7)* est une conséquence immédiate de *(8.1)* et *(8.5)*. La formule *(8.8)* se déduit de

$$[\pi X, \omega Y] + (-1)^{(r+p)(s+q)}[\omega Y, \pi X] = 0$$

en appliquant *(8.7)* et en faisant usage de la *(0)*-commutativité du produit de F par rapport à la graduation $(F^p \mid p \in Z)$.

De la proposition 7.1 et des formules *(8.6)* et *(8.8)* il résulte

PROPOSITION 8.1. *Soit $\mathfrak{X}$ un espace (K, F)-linéaire gradué F-fidèle. Alors*

(i) une structure de (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan gradué sur $\mathfrak{X}$ peut être définie par la donnée d'une application $[\ ,\ ] : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ bi-additive vérifiant l'axiome CI par rapport à la graduation de $\mathfrak{X}$ et telle que pour tout $X \in \mathfrak{X}$, $(ad X) \in Ngr_K(\mathfrak{X})$.

(ii) Si $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ est un (K, F)-espace d'Elie Cartan gradué, alors $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ est sans courbure.

(iii) Si $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ est un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan gradué et si $\mathfrak{X}$ en tant que F-module est libre et de dimension > 1, alors $\mathfrak{X}$ est régulier, $(\pi X)_D \omega = \pi(X_D \omega)$.

9. Espaces infinitésimaux gradués.

Soient $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ et $(\mathfrak{X}', (ad, \rho'_D))$ deux (K, F)-pré-espaces d'Elie Cartan gradués. On dira qu'une application φ de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{X}'$ est un *morphisme gradué* (⌈*différentiel*⌉) de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{X}'$ si φ est K-linéaire de degré 0 et

$$(9.1) \qquad a. \quad \rho_D = \rho'_D \circ \varphi \qquad (⌈b.\ \varphi[X, Y] = [\varphi(X), \varphi(Y)]⌉).$$

On dira que $(V, (\rho_I, \overline{\rho}_D))$ est un *espace infinitésimal gradué* (⌈*différentiel*⌉) *sur* le (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan gradué $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$, ou encore par abus de langage que (V, ρ_I) est un *espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal gradué* (⌈*différentiel*⌉), si V est un espace (K, F)-linéaire gradué et $(\rho_I, \overline{\rho}_D) = \rho$ une r.i.g. de degré 0 de $\mathfrak{X}$ vers V (⌈vérifiant *(9.1)b*⌉) et telle que $\overline{\rho}_D = \rho_D$, c'est-à-dire $(\rho_I, \overline{\rho}_D)$ est un morphisme gradué (⌈différentiel⌉) de $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ dans $(\hat{\mathfrak{T}}gr_K(V), (ad, \hat{\rho}_V))$. Un espace infinitésimal gradué $(V, (\rho_I, \overline{\rho}_D))$ sur $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ est appelé $\mathfrak{T}$-*régulier* resp. $\mathfrak{D}$-*régulier*, $\hat{\mathfrak{T}}$-*régulier* ou *birégulier*, si la r.i.g. sous-jacente à $(\rho_I, \overline{\rho}_D)$ est $\mathfrak{T}$-régulière resp. $\mathfrak{D}$-régulière, $\hat{\mathfrak{T}}$-régulière. Quand on se donne d'avance un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan gradué $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$, par abus de langage on dira que ρ_I est une *structure $\mathfrak{X}$-infinitésimale graduée* sur V, resp. $\mathfrak{T}$-*régulière*, $\mathfrak{D}$-*régulière*, *birégulière*, si $(V, (\rho_I, \rho_D))$ est un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal gradué, resp. $\mathfrak{T}$-régulier, $\mathfrak{D}$-régulier, birégulier. On dira qu'un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal gradué $(V, (\rho_I, \rho_D))$ est *sans courbure* si $\rho_I([X, Y]) = [\rho_I(X), \rho_I(Y)]$.

EXEMPLE 9.1. Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan gradué (resp.

régulier, sans courbure), alors $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ est un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal gradué (resp. $\mathfrak{D}$- régulier, sans courbure).

EXEMPLE 9.2. Soient $\mathfrak{X}$ et V deux espaces (K, F)-linéaires. Si l'on considère $A_F(\mathfrak{X})$ muni de la structure de $(F, \mathfrak{E}_F(\mathfrak{X}))$-espace de Cartan gradué définie dans l'exemple 8.2, alors en vertu du théorème,6.1 $(V, (i, i))$ est un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal gradué différentiel birégulier.

Dans les §14, 15 on trouvera d'autres exemples.

Dans Hattori [21] on trouve plusieurs exemples d'espaces infinitésimaux $\mathfrak{D}$-réguliers différentiels sur l'espace de Cartan des champs de vecteurs de classe C^∞ d'une C^∞-variété.

LEMME 9.1. *Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K, F)- pré-espace d'Elie Cartan gradué. Alors pour que $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ en tant qu'espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal gradué soit différentiel, il faut et il suffit que $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ soit un (K, F)-espace d'Elie Cartan gradué sans courbure.*

DEMONSTRATION. En effet, si on suppose que $(\mathfrak{X}, (ad, \rho))$ est un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal *g.bg.* on a

$$(ad[X, Y])Z = [adX, adY]Z;$$

mais cette identité est une autre forme de l'identité de Jacobi.

Des lemmes et corollaires du §2 il résulte :

THEOREME 9.1. *Soit V un espace (K, F)-linéaire. Avec les notations du §1, les applications*

$$(T_1, D) \in \hat{\mathfrak{T}}_K(V) \to (T_{11}, D) \in \hat{\mathfrak{T}}_K(End_F(V))$$
$$(T, D) \in \hat{\mathfrak{T}}_K(V) \to (T^\wedge, D) \in \hat{\mathfrak{T}}_K(\Lambda_F(V))$$
$$(T, D) \in \hat{\mathfrak{T}}_K(V) \to (T^\otimes, D) \in \hat{\mathfrak{T}}_K(\otimes_F(V))$$

sont des structures d'espaces infinitésimaux différentiels biréguliers sur $(\hat{\mathfrak{T}}_K(V), (ad, \hat{\rho}_V))$.

10. Les translations infinitésimales graduées d et $\theta(X)$.

On notera ξ et ∂ les éléments appartenant respectivement à

$$Hom_K(L^2_K(\mathfrak{X}), Hom_K(\mathfrak{X}, \overset{-1}{Endgr}_K(\Lambda_F(\mathfrak{X})))),$$
$$Hom_K(L^2_K(\mathfrak{X}), \overset{-1}{Endgr}_K(\Lambda_F(\mathfrak{X})))$$

définis par les identités

$$\xi_\Phi(X)(\mathfrak{X}_{(r)}) = \sum_{i<j}(-1)^{j+1}\Phi(X, X_j) \wedge \mathfrak{X}^{\hat{j}}_{(r)},$$
$$\partial_\Phi(\mathfrak{X}_{(r)}) = \Sigma\,(-1)^{i+j+1}\Phi(X_i, X_j) \wedge \mathfrak{X}^{\hat{i}\hat{j}}_{(r)},$$

où $\Phi \in L^2_K(\mathfrak{X})$ et $X \in \mathfrak{X}$. On pose $\xi_\Phi = \xi(\Phi))$.

On notera ξ^* et ∂^* les éléments appartenant respectivement à

$$Hom_K(L_K^2(\mathfrak{X}), Hom_K(\mathfrak{X}, Hom_K(A_F(\mathfrak{X}, V), V))),$$
$$Hom_K(L_K^2(\mathfrak{X}), Hom_K(A_F(\mathfrak{X}, V), V)),$$

définis par les identités

$$\langle \mathfrak{X}_{(q)}, \xi_\Phi^*(X)\omega \rangle = \langle \xi_\Phi(X)(\mathfrak{X}_{(q)}), \omega \rangle$$
$$\langle \mathfrak{X}_{(q)}, \partial_\Phi^* \omega \rangle = \langle \partial_\Phi(\mathfrak{X}_{(q)}), \omega \rangle .$$

Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan. Si $(V, (\rho_I, \rho_D))$ et $(V', (\rho_I', \rho_D))$ sont deux espaces $\mathfrak{X}$-infinitésimaux $\mathfrak{D}$-réguliers ⌈et $\mathfrak{J}$-réguliers⌉, alors les couples $(\tilde{\rho}_I, \rho_D)$ considérés dans le théorème 2.1 qui définissent des structures d'espaces $\mathfrak{X}$-infinitésimaux $\mathfrak{D}$-réguliers ⌈et $\mathfrak{J}$-réguliers⌉ sur $\Lambda_F(V)$ ou $\otimes_F(V)$ (resp. sur $A_F(V, V')$ ou $L_F(V, V')$) seront notés $(\diamond, \diamond)$ (resp. (∇, ∇)).

Si de plus (V, ρ_I) est sans courbure, il résulte du théorème 8.1 que $End_F(V)$, $\Lambda_F(V)$ et $\otimes_F(V)$ sont aussi sans courbure.

$(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ en tant qu'espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal ⌈$\mathfrak{D}$-régulier⌉ définit des structures d'espaces $\mathfrak{X}$-infinitésimaux ⌈$\mathfrak{D}$-réguliers⌉ :

1. sur $\Lambda_F(\mathfrak{X})$, $\otimes_F(\mathfrak{X})$, les couples $(\tilde{ad}, \rho_D)$ associés étant notés $(\square, \square)$, au lieu de $(\diamond, \diamond)$. En particulier

$$X \square Y = (ad X) Y = [X, Y] \text{ pour } X, Y \in \mathfrak{X},$$
$$X \square f = (\rho_D(X)) f \text{ pour } X \in \mathfrak{X} \text{ et } f \in F;$$

2. sur $A_F(\mathfrak{X}, V)$, $L_F(\mathfrak{X}, V)$, les couples $(\tilde{ad}, \rho_D)$ associés étant notés (θ, θ), au lieu de (∇, ∇). (Même notation en remplaçant F par K). En particulier

$$\theta(X)v = (\rho_I(X))v \text{ pour } X \in \mathfrak{X} \text{ et } v \in V,$$
$$\theta(X)f = (\rho_D(X))f \text{ pour } X \in \mathfrak{X} \text{ et } f \in F.$$

Avec ces nouvelles notations on a par définition (théorème 2.1)

$$(X \square \mathfrak{X}_r) = \Sigma X_1 \otimes \dots \otimes [X, X_i] \otimes \dots \otimes X_r$$
$$(X \square \mathfrak{X}_{(r)}) = (\xi_{[\, ,\,]}(X)) (\mathfrak{X}_{(r)})$$
$$= \Sigma (-1)^{j+1} [X, X_j] \square \mathfrak{X}_{(r)}^{\hat{j}}.$$

Pour $\omega \in A_F^q(\mathfrak{X}, V)$, on a de même

$$(10.1) \qquad \langle \mathfrak{X}_{(q)}, \theta(X)\omega \rangle = \rho_I(X) \langle \mathfrak{X}_{(r)}, \omega \rangle - \langle X \square \mathfrak{X}_{(q)}, \omega \rangle$$
$$= \rho_I(X) \langle \mathfrak{X}_{(r)}, \omega \rangle - \langle \mathfrak{X}_{(q)}, \xi_{[\, ,\,]}^*(X)\omega \rangle .$$

De (2.2) il résulte en particulier qu'on peut écrire

$$(10.2)\quad [\,\theta(X)\,,i(\mathfrak{X}_{(q+1)})]\,\omega = \langle \mathfrak{X}_{(q+1)}, \xi^*_{[\,,\,]}(X)\omega \rangle$$
$$= \langle\, \xi_{[\,,\,]}(X)(\mathfrak{X}_{(q+1)}), \omega\, \rangle$$
$$= \Sigma\,(-1)^{j+1}\,\langle [\,X, X_j\,] \wedge \mathfrak{X}^{\hat{j}}_{(q+1)}, \omega \rangle\,.$$

Par exemple si $J \in End_F(\mathfrak{X})$ et $B \in L^2_F(\mathfrak{X}, V)$, alors

$$(10.3)\qquad (\theta(X)J)(Y) = [\,X, JY\,] - J([\,X, Y\,])$$

$$(10.4)\qquad (\theta(X)B)(Y, Z) = \rho_I(X)(B(Y,\ Z)) - B([\,X,\ Y\,], Z)$$
$$- B(Y,\ [\,X,\ Z\,]).$$

Les t.i. $(\theta(X), \theta(X))$ seront appellées *t.i. covariantes de Lie* tandis que les t.i. $(X\Box, X\Box)$ seront appellées *t.i. contravariantes de Lie sous-jacentes à* $(\mathfrak{X}, V)$.

THEOREME 10.1. *Soit* $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ *un* (K, F)*-pré-espace de Cartan. Soit* $(V, (\rho_I, \rho_D))$ *un espace* $\mathfrak{X}$*-infinitésimal* ⌈$\mathfrak{J}$*-régulier*⌉. *Alors il existe un seul*

$$\tilde{d} \in \overset{1}{Endgr}_K(A_K(\mathfrak{X}, V))$$

⌈*qui laisse* $A_F(\mathfrak{X}, V) \subset A_K(\mathfrak{X},\ V)$ *stable*⌉ *tel que*

$$(10.5)\qquad \theta(X) = [\,\tilde{d}, i(X)\,]\ .$$

DEMONSTRATION. Pour montrer ce théorème, il suffit de montrer qu'il existe une seule famille d'applications K-linéaires $\tilde{d} : A^q_K(\mathfrak{X}, V) \to A^{q+1}_K(\mathfrak{X}, V)$ telles que

$$(10.5')\qquad \theta(X)\omega = \tilde{d}\,i(X)\omega + i(X)\tilde{d}\omega$$

pour tout $X \in \mathfrak{X}$ et tout $\omega \in A^q_K(\mathfrak{X}, V)$ ⌈et que

$$(10.6)\qquad \tilde{d}(A^q_F(\mathfrak{X}, V)) \subset \tilde{d}(A^{q+1}_F(\mathfrak{X}, V))⌉.$$

S'il existe une telle famille vérifiant $(10.5')$ ⌈et (10.6)⌉, alors elle est unique. En effet, soit $\tilde{d}'$ une application K-linéaire satisfaisant $(10.5')$; alors

$$i(X)(\tilde{d} - \tilde{d}')\omega = (\tilde{d} - \tilde{d}')i(X)\omega$$

pour tout $\omega \in A^q_K(\mathfrak{X}, V)$. On montrera par induction sur q que $\tilde{d}\omega = \tilde{d}'\omega$ pour chaque $\omega \in A^q_K(\mathfrak{X}, V)$. Si $deg(\omega) = 0$, alors

$$0 \equiv (\tilde{d} - \tilde{d}')i(X)\ \omega = i(X)(\tilde{d} - \tilde{d}')\omega\ ,$$

puisque $i(X)\omega = 0$. Mais ceci étant vrai pour tout $X \in \mathfrak{X}$, alors $\tilde{d}\omega = \tilde{d}'\omega$. Supposons démontrée l'unicité pour $q = p - 1$, alors

$$0 \equiv (\tilde{d} - \tilde{d}')i(X)\omega = i(X)(\tilde{d} - \tilde{d}')\omega\ ,$$

puisque $deg(i(X)\omega) = p - 1$; or $X \in \mathfrak{X}$ étant arbitraire, on a $\tilde{d}\omega = \tilde{d}'\omega$.

La preuve de l'existence d'un tel élément $\tilde{d}$ sera aussi faite par induction sur q. Soit $\omega \in A^o_K(\mathfrak{X}, V) = V$. Alors on pose

$$\langle X, \tilde{d}\omega \rangle = \theta(X)\omega = i(X)\tilde{d}\omega = \rho_I(X)\omega.$$

Cette application $\tilde{d} : A^o_K(\mathfrak{X}, V) \to A^1_K(\mathfrak{X}, V)$ est K-linéaire ⌈et $\tilde{d}(A^o_F(\mathfrak{X},V)) \subset A^1_F(\mathfrak{X},V)$ en vertu de la F-linéarité de ρ_I⌉. Supposons qu'on ait démontré l'existence de

$$\tilde{d} \in Hom_K(A^q_K(\mathfrak{X}, V), A^{q+1}_K(\mathfrak{X}, V))$$

vérifiant *(10.5)* ⌈et *(10.6)*⌉ pour tout $q < p$. Si $\omega \in A^p_K(\mathfrak{X}, V)$, on pose

$$\langle \mathfrak{X}_{(p+1)}, \tilde{d}\omega \rangle = \langle \mathfrak{X}^{\hat{1}}_{(p+1)}, \theta(X_1)\omega \rangle - \langle \mathfrak{X}^{\hat{1}}_{(p+1)}, \tilde{d}i(X_1)\omega \rangle ;$$

alors on doit démontrer que $\tilde{d}\omega \in A^{p+1}_K(\mathfrak{X},V)$ ⌈et $\tilde{d}\omega \in A^{p+1}_F(\mathfrak{X},V)$ si $\omega \in A^p_F(\mathfrak{X},V)$⌉. La K-linéarité ⌈et F-linéarité⌉ en chaque $X_2, \ldots, X_{p+1}$ est conséquence par hypothèse d'induction de la K-multilinéarité ⌈et de la F-multilinéarité⌉ de $\theta(X_1)\omega$. Montrons que $\tilde{d}\omega$ est alternée. Or

$$\langle \mathfrak{X}_{(p+1)}, \tilde{d}\omega \rangle = \langle \mathfrak{X}^{\hat{1}}_{(p+1)}, i(X_1)\tilde{d}\omega \rangle ,$$

et $\tilde{d}i(X_1)\omega$ est K-multilinéaire ⌈F-multilinéaire⌉ alternée en vertu de l'hypothèse d'induction; mais

$$\theta(X_1)\omega \in A^p_K(\mathfrak{X}, V) \ ⌈\theta(X_1)\omega \in A^p_F(\mathfrak{X}, V)⌉,$$

puisque par hypothèse ω est K-multilinéaire ⌈F-multilinéaire⌉ alternée. Donc $i(X_1)\tilde{d}\omega = = \theta(X_1)\omega - \tilde{d}i(X_1)\omega$ est K-multilinéaire ⌈F-multilinéaire⌉ alternée. Par conséquent pour démontrer que $\tilde{d}\omega$ est alternée il suffit, à cause de *(10.7)*, de montrer que

$$\langle \mathfrak{X}^{\hat{1}}_{(p+1)}, i(X_1)\tilde{d}\omega \rangle = 0 \text{ si } X_1 = X_2 ,$$

c'est-à-dire que

$$\langle \mathfrak{X}^{\hat{1}}_{(p+1)}, \theta(X_1)\omega \rangle = \langle \mathfrak{X}^{\hat{1}}_{(p+1)}, \tilde{d}i(X_1)\omega \rangle \text{ si } X_1 = X_2 ;$$

mais ceci est vrai puisque

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{X}^{\hat{1}}_{(p+1)}, \theta(X_2)\omega \rangle &= \langle \mathfrak{X}^{\hat{1}\hat{2}}_{(p+1)}, i(X_2)\theta(X_2)\omega \rangle \\ &= \langle \mathfrak{X}^{\hat{1}\hat{2}}_{(p+1)}, \theta(X_2)i(X_2)\omega \rangle \quad \text{par } (10.2) \\ &= \langle \mathfrak{X}^{\hat{1}}_{(p+1)}, \tilde{d}i(X_2)i(X_2) + i(X_2)\tilde{d}i(X_2)\omega \rangle \\ &= \langle \mathfrak{X}^{\hat{1}}_{(p+1)}, \tilde{d}i(X_2)\omega \rangle . \end{aligned}$$

Pour achever la démonstration, il suffit de prouver la K-linéarité ⌈F-linéarité⌉ en X_1. Mais ceci est conséquence du fait que $\tilde{d}\omega$ est alternée et de la K-linéarité ⌈F-linéarité⌉ en $X_2, \ldots, X_{p+1}$.

REMARQUE 10.1. Si $\tilde{d}$ laisse stable $A_F(\mathfrak{X}, V)$, alors ρ_I est F-linéaire.

COROLLAIRE 10.1. *Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K,F)-pré-espace d'Elie Cartan. Si (V, ρ_I) est un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal $\mathfrak{I}$-régulier, alors il existe une seule application*

$d \in \overset{1}{Endgr}_K(A_F(\mathfrak{X}, V))$ telle que

$$\theta(X) = [d, i(X)]. \tag{10.6}$$

Ce d est la contraction de $\tilde{d}$ sur $A_F(\mathfrak{X}, V)$.

Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan. On note

$$[\mathfrak{X}_{(r)}] = \partial_{[\,,\,]}(\mathfrak{X}_{(r)}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} [X_i, X_j] \wedge \mathfrak{X}_{(r)}^{\hat{i}\hat{j}}.$$

En particulier

$$[\mathfrak{X}_{(r)}] = 0 \text{ si } r < 1 \text{ et } [\mathfrak{X}_{(r)}] = [X_1, X_2] \text{ si } r = 2.$$

Pour $\omega \in A_K^q(\mathfrak{X}, V)$ on a

$$\langle [\mathfrak{X}_{(q)}], \omega \rangle = \langle \mathfrak{X}_{(q)}, i([\,,\,])\omega \rangle .$$

THEOREME 10.2. *Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan. Si (V, ρ_I) est un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal ($\mathfrak{J}$-régulier) et si l'on pose*

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{X}_{(q+1)}, \dot{d}\omega \rangle &= \Sigma(-1)^{j+1} \rho_I(X_j) \langle \mathfrak{X}_{(q+1)}^{\hat{j}}, \omega \rangle - \langle [\mathfrak{X}_{(q+1)}], \omega \rangle \\ &= \Sigma(-1)^{j+1} \langle \mathfrak{X}_{(q+1)}^{\hat{j}}, \theta(X_j)\omega \rangle + \langle [\mathfrak{X}_{(q+1)}], \omega \rangle , \end{aligned} \tag{10.7}$$

alors $\dot{d}\omega = \tilde{d}\omega$ si $\omega \in A_K^q(\mathfrak{X}, V)$ ($\dot{d}\omega = d\omega$ si $\omega \in A_F^q(\mathfrak{X}, V)$).

DEMONSTRATION. En faisant usage de la formule

$$[\theta(X), i(Y)] = i([X, Y]),$$

de la formule (10.5) (et de la F-linéarité de ρ_I), on voit aisément par un calcul direct que $\dot{d}$ vérifie (10.3) pour $\omega \in A_K^q(\mathfrak{X}, V)$ (et pour $\omega \in A_F^q(\mathfrak{X}, V)$, on a $\dot{d}\omega \in A_F^{q+1}(\mathfrak{X}, V)$ et $\dot{d}$ vérifie (10.5)).

Dans la suite, $\dot{d}$ désignera d ou $\tilde{d}$. D'après (10.7) on a en particulier

$$(\dot{d}\omega)(X, Y, Z) = \sum_{Cyc} \rho_D(X)(\omega(Y, Z)) - \omega([X, Y], Z).$$

Par un calcul direct, en faisant usage de (10.2) et (10.7), on obtient :

THEOREME 10.3. *Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan. Si (V, ρ_I) est un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal, alors*

$$\begin{aligned} [i(\mathfrak{X}_{(r)}), \dot{d}] &= \Sigma(-1)^{j+1} \theta(X_j) i(\mathfrak{X}_{(r)}^{\hat{j}}) - i([\mathfrak{X}_{(r)}]) \\ &= \Sigma(-1)^{j+1} i(\mathfrak{X}_{(r)}^{\hat{j}}) \theta(X_j) + i([\mathfrak{X}_{(r)}]). \end{aligned} \tag{10.8}$$

Les formules (10.5), (10.6) et (10.7) sont des cas particuliers de (10.8). Pour $\mathfrak{X}_{(2)} = X \wedge Y$, on a

$$\begin{aligned} [i(X \wedge Y), \dot{d}] &= \theta(X)\, i(Y) - \theta(Y) i(X) - i([X, Y]) \\ &= i(Y)\theta(X) - i(X)\theta(Y) + i([X, Y]). \end{aligned} \tag{10.9}$$

On peut écrire la formule *(10.8)* sous la forme suivante

$$(10.8') \qquad [\,i(X), \tilde{d}\,]\,\omega = \tilde{d}_\theta(i(X)\,\omega),\ X \in \Lambda_F(\mathfrak{X}),$$

où $\tilde{d}_\theta$ est le $\tilde{d}$ sous-jacent au (K, F)-espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal $(A_F(\mathfrak{X}, F), \theta)$.

THEOREME 10.4. *Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan. Soient (V_i, ρ_I^i), $i = 1, 2, 3$, trois $\mathfrak{X}$-espaces infinitésimaux $\mathfrak{T}$-réguliers tels que les ρ_I^i, $i = 1, 2, 3$, soient compatibles avec une application F-bilinéaire $\wedge$ de $V_1 \times V_2$ dans V_3. Si $\omega \in A_F^q(\mathfrak{X}, V_1)$ et $\pi \in A_F^p(\mathfrak{X}, V_2)$, alors*

$$(10.10) \qquad d_3(\omega \wedge \pi) = (d_1\omega) \wedge \pi + (-1)^q \omega \wedge (d_2 \pi).$$

DEMONSTRATION. On fera la preuve par induction sur $q + p$. Si $q + p = 0$, la formule *(10.7)* se réduit à la condition de compatibilité de ρ_I^i, $i = 1, 2, 3$, avec $\wedge$. Supposons que la formule *(10.10)* soit vraie pour $q + p = r - 1$. On a

$$\langle \mathfrak{X}_{(q+p+1)}, d_3(\omega \wedge \pi)\rangle = \langle \mathfrak{X}^{\hat{1}}_{(q+p+1)}, i(X_1) d_3(\omega \wedge \pi)\rangle$$

En faisant usage de la formule *(10.5)* et par hypothèse d'induction on peut écrire

$$\begin{aligned}
i(X_1) d_3(\omega \wedge \pi) &= \theta_3(X_1)(\omega \wedge \pi - d_3(i(X_1)(\omega \wedge \pi)) \\
&= \{\theta_1(X)\omega\} \wedge \pi + \omega \wedge \theta(X_1)\pi - d_3\{(i(X_1)\omega) \wedge \pi + (-1)^q \omega \wedge i(X_1)\pi\} \\
&= \{\theta_1(X)\omega\} \wedge \pi + \omega \wedge \theta(X_1)\pi \\
&- \{d_1 i(X_1)\omega\} - (-1)^{q-1}\{i(X_1)\omega\} \wedge d_2\pi \\
&- (-1)^q (d_1\omega) \wedge i(X_1)\pi - \omega \wedge d_2\, i(X_1)\pi.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
i(X_1) d_3(\omega \wedge \pi) &= \{i(X_1) d_3\omega\} \wedge \pi - (-1)^q (d_1\omega) \wedge i(X_1)\pi \\
&+ \omega \wedge i(X_1) d_2 \pi - (-1)^{q-1}\{i(X_1)\omega\} \wedge d_2\pi \\
&= i(X_1)\{(d_1\omega) \wedge \pi\} + (-1)^q i(X_1)(\omega \wedge d_2\pi) \\
&= i(X_1)\{(d_1\omega) \wedge \pi + (-1)^q \omega \wedge (d_2\pi)\}
\end{aligned}$$

Ainsi *(10.10)* est vraie pour tout q.

COROLLAIRE 10.2. *Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan. Soit (V, ρ_I) un espace infinitésimal birégulier. Alors (F, ρ_D) est un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal, donc*

$$(d, d) \in \hat{\mathfrak{T}}^1 gr_K(\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V)).$$

La t.i.g. de degré 1 (d, d) de l'espace $(K, \mathfrak{E}_F(\mathfrak{X}))$-linéaire gradué $\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V)$ sera appellée translation infinitésimale extérieure sous-jacente à $(\mathfrak{X}, V)$.

11. La forme de courbure d'un espace infinitésimal.

Soit $(\mathfrak{X},(ad,\rho_D))$ un (K,F) - espace de Cartan gradué. Si (V,ρ_I) est un espace $\mathfrak{X}$- infinitésimal gradué, on appelle *forme de courbure*, et on note Ω_{ρ_I}, l'application de $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ dans $End_K(V)$ définie par l'identité

$$(11.1)\qquad \{\Omega_{\rho_I}(X,Y)\}(v)=[\rho_I(X),\rho_I(Y)](v)-(\rho_I([X,Y])(v).$$

En particulier

$$\{\Omega_{\rho_D}(X,Y)\}(\omega)=[\rho_D(X),\rho_D(Y)](\omega)-(\rho_D([X,Y])(\omega).$$

Ω_{ρ_I} est K- bilinéaire graduée, (0)- anti-commutative et pair-alternée, c'est-à-dire

$$\Omega_{\rho_I}(X,Y)\in \overset{r+s}{Endgr_K}(V)\ ,\ \Omega_{\rho_I}(X,Y)=(-1)^{rs+1}\Omega_{\rho_I}(Y,X)$$

pour $X\in\mathfrak{X}^r$, $Y\in\mathfrak{X}^s$, et

$$\Omega_{\rho_I}(X,X)=0 \text{ si } X\in\mathfrak{X}^{2r},$$

Par exemple

$$(11.2)\qquad \{\Omega ad(X,Y)\}(Z)=-\mathfrak{J}(X,Y,Z)$$

est la forme de courbure de $(\mathfrak{X},ad)$ en tant qu'espace $\mathfrak{X}$- infinitésimal gradué.

THEOREME 11.1. *Soient $(\mathfrak{X},(ad,\rho_D))$ un (K,F) - espace de Cartan gradué et (V,ρ_I) un espace $\mathfrak{X}$- infinitésimal gradué. Alors pour tout $X\in\mathfrak{X}^r$ et tout $Y\in\mathfrak{X}^s$ on a*

$$(11.3)\ \Omega_{\rho_I}(X,Y)(\pi v)=\{\Omega_{\rho_D}(X,Y)(\pi)\}v+J^{r+s}(\pi)\{\Omega_{\rho_I}(X,Y)(v)\},$$

$$(11.4)\ \Omega_{\rho_D}(X,Y)(\pi\omega)=\{\Omega_{\rho_D}(X,Y)(\pi)\}\omega+J^{\cdot+s}(\pi)\{\Omega_{\rho_D}(X,Y)(\omega)\},$$

c'est-à-dire

$$(\Omega_{\rho_I}(X,Y),\Omega_{\rho_D}(X,Y))\in\hat{\mathfrak{J}}\overset{r+s}{gr_K}(V).$$

Donc

$$(\Omega_{\rho_I},\Omega_{\rho_D})\in L^2_K(\mathfrak{X},\hat{\mathfrak{J}}gr_K(V))$$

et la restriction de $(\Omega_{\rho_I},\Omega_{\rho_D})$ à $\mathfrak{X}^o\times\mathfrak{X}^o$ appartient à $A^2_K(\mathfrak{X}^o,\hat{\mathfrak{J}}gr_K(V))$. De plus

1) Si (V,ρ_I) est $\mathfrak{J}$-régulier, alors

$$(11.5)\qquad \begin{aligned}\Omega_{\rho_I}(X,\pi Y)&=J^r(\pi)\Omega_{\rho_I}(X,Y)\\ \Omega_{\rho_I}(\omega X,Y)&=\omega\Omega_{\rho_I}(X,Y);\end{aligned}$$

2) Si $\mathfrak{X}$ est sans courbure, $\Omega_{\rho_D}=0$, la contraction de Ω_{ρ_I} à $(\mathfrak{X}^o\times\mathfrak{X}^o, End_{F^o}(V))$ appartient à $A^2_K(\mathfrak{X}^o, End_{F^o}(V))$.

3) Si $\mathfrak{X}$ est sans courbure et (V,ρ_I) est $\mathfrak{J}$-régulier, alors la contraction de Ω_{ρ_I} à $(\mathfrak{X}^o\times\mathfrak{X}^o, End_{F^o}(V))$ appartient à $A^2_{F^o}(\mathfrak{X}^o, End_{F^o}(V))$.

DEMONSTRATION. En effet, soit $\pi \in F^p$. D'après (1.1) du théorème 1.1 on peut écrire

$$\begin{aligned}\Omega_{\rho_I}(X,Y)(\pi v) &= [\rho_I(X), \rho_I(Y)](\pi v) - \rho_I([X,Y])(\pi v)\\ &= \{[\rho_D(X), \rho_D(Y)]\pi\} v + (-1)^{(r+s)p}\pi\{[\rho_I(X), \rho_I(Y)] v\}\\ &- \{\rho_D([X,Y])\pi\} v - (-1)^{(r+s)p}\pi\{\rho_I([X,Y])v\}\\ &= \{[\rho_D(X), \rho_D(Y)]\pi - \rho_D([X,Y])\pi\} v\\ &+ (-1)^{(r+s)p}\pi\{[\rho_I(X), \rho_I(Y)] v + \rho_I([X,Y])v\}\\ &= \{\Omega_{\rho_D}(X,Y)(\pi)\} v + (-1)^{(r+s)p}\pi\{\Omega_{\rho_I}(X,Y)(v)\}.\end{aligned}$$

De la F-linéarité de ρ_I et en faisant usage de *(1.2)* du théorème 1.1 on peut écrire

$$\begin{aligned}\Omega_{\rho_I}(X,\pi Y) &= [\rho_I(X), \pi\rho_I(Y)] - \rho_I\{(\rho_D(X)\pi)Y + (-1)^{pr}\pi[X,Y]\}\\ &= (\rho_D(X)\pi)\rho_I(Y) + (-1)^{pr}\pi[\rho_I(X), \rho_I(Y)]\\ &- (\rho_D(X)\pi)\rho_I(Y) - (-1)^{pr}\pi\rho_I([X,Y])\\ &= (-1)^{pr}\pi\Omega_{\rho_I}(X,Y).\end{aligned}$$

2) est conséquence de *(11.3)* et 3) est conséquence de 1) et 2).

Le corollaire suivant est conséquence de *(11.3)* et il admet aussi pour cas particulier *(ii)* de la proposition 8.1, puisque (8.6) est un cas spécial de *(11.3)*.

COROLLAIRE 11.1. *Soit (V, ρ_I) un espace infinitésimal gradué sans courbure sur le (K,F)-pré-espace d'Elie Cartan $(\mathfrak{X},(ad, \rho_D))$. Si V en tant que F-module est fidèle, alors $\mathfrak{X}$ est sans courbure. En particulier si $\mathfrak{X}$ est un espace d'Elie Cartan F-fidèle, alors $\mathfrak{X}$ est sans courbure, puisque $(\mathfrak{X}, ad)$ est sans courbure.*

Soit $(\mathfrak{X},(ad,\rho_D))$ un (K,F)-pré-espace d'Elie Cartan et (V,ρ_I) un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal. Alors

$$\Omega_{\rho_I}(X,Y)(v) = (d^2 v)(X,Y); \tag{11.6}$$

de plus les structures d'espaces $\mathfrak{X}$-infinitésimaux sur $End_F(V)$ et V sont compatibles avec la loi interne

$$\star : (h, v) \in End_F(V) \times V \to h(v) \in V.$$

On note aussi $\star$ le produit de Grassmann associé à cette loi externe.

THEOREME 11.2. *Soit $(\mathfrak{X},(ad,\rho_D))$ un (K,F)-pré-espace d'Elie Cartan. Si (V,ρ_I) est un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal (resp. $\mathfrak{T}$-régulier) :*

I. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $$[\theta(X), \theta(Y)]\omega = \theta([X,Y])\omega + \Omega_{\rho_I}(X,Y)\star\omega$$

pour tout $\omega \in A_K(\mathfrak{X}, V)$ *(resp.* $\omega \in A_F(\mathfrak{X}, V)$*),*

2) $$[\theta(X), \dot{d}]\,\omega = (i(X)\Omega_{\rho_I}) \star \omega,\; i(X)\Omega_{\rho_I} \in End_K(V)$$

pour tout $\omega \in A_K(\mathfrak{X}, V)$ *(resp.* $\omega \in A_F(\mathfrak{X}, V)$*),*

3) $$\dot{d}^{2n}\omega = \Omega^n_{\rho_I} \star \omega \quad (\textit{E. Cartan } [6]\, p.\ 212)$$

pour tout $\omega \in A_K(\mathfrak{X}, V)$ *(resp.* $\omega \in A_F(\mathfrak{X}, V)$*).*

En particulier, pour tout ω *de degré 1,*

$$(11.7) \qquad (\dot{d}^2\omega)(X, Y, Z) = \Sigma\, (\Omega_{\rho_I}(X, Y)) \diamond \omega(Z).$$

II. Si de plus $\mathfrak{X}$ *est un* (K, F)*-espace d'Elie Cartan, alors les conditions 1), 2) et 3) sont vérifiées.*

DEMONSTRATION.

I. Supposons que *1)* soit vraie. On démontrera *2)* par induction sur q. Soit $q = 0$, alors en vertu des définitions du produit de Grassmann et de $\theta(X)$ et d, on a

$$\begin{aligned}\{(i(X)\Omega_{\rho_I}) \star \omega\}\, Y &= \{(i(X)\Omega_{\rho_I})Y\} \star \omega = \{\Omega_{\rho_I}(X, Y)\}(\omega) \\ &= \rho_I(X)(\rho_I(Y)\omega) - \rho_I(Y)(\rho_I(X))\omega) - \rho_I([X, Y])\omega \\ &= \{\rho_I(X)\, \langle Y, d\omega\rangle - \langle [X, Y], d\omega\rangle\} - \rho_I(Y)\, \langle X, d\omega\rangle \\ &= \langle Y, \theta(X)d\omega\rangle - \langle Y, d\theta(X)\omega\rangle = [\theta(X), d]\,\omega.\end{aligned}$$

Supposons que la formule de *2)* soit vraie pour les formes ω de degré $< q$, alors

$$i(Y)\theta(X)\dot{d}\omega - i(Y)\dot{d}\theta(X)\,\omega - i(Y)\,\{i(X)\Omega_{\rho_I} \star \omega\} =$$
$$\begin{aligned}&= \theta(X)i(Y)\,\dot{d}\omega - i([X, Y])\dot{d}\omega + i(Y)\theta(X)\omega - \theta(Y)\theta(X) \\ &- (i(Y)i(X)\Omega_{\rho_I}) \star \omega + (i(X)\Omega_{\rho_I}) \star i(Y) \\ &= -\theta(X)\dot{d}i(Y)\omega + \theta(X)\,\theta(Y) - i([X, Y])\dot{d}\omega + \dot{d}\theta(X)i(Y)\omega \\ &- \dot{d}i([X, Y])\omega - \theta(Y)\theta(X)\omega - \{i(X)i(Y)\Omega_{\rho_I}\} \star \omega + (i(X)\Omega_{\rho_I}) \star (i(Y)\omega) \\ &= -\theta(X)\dot{d}i(Y)\omega + \dot{d}\theta(X)i(Y)\omega + (i(X)\Omega_{\rho_I}) \star (i(Y)\omega)\end{aligned}$$

(d'après *2)*)

$= 0$ par induction.

On démontrera que *3)* est une conséquence de *2)* en deux étapes. En premier lieu on le prouvera pour $n = 1$ par induction sur q. Ensuite la formule est obtenue par induction sur n. Si $q = 0$, alors $\omega \in V$, donc $(d^2\omega)(X, Y) = \{\Omega_{\rho_I}(X, Y)\} \star \omega$ par suite de *(11.6)* et de la définition du produit de Grassmann associé à $\star$. Supposons que $\dot{d}^2\omega = \Omega_{\rho_I} \star \omega$ soit vraie pour les formes ω de degré $< q$. En faisant usage de *2)* on a

$$\begin{aligned} i(X)\dot{d}^2\omega &= \theta(X)d\omega - \dot{d}i(X)d\omega \\ &= \dot{d}\theta(X)\omega + \{i(X)\Omega_{\rho_I}\}\star\omega - \dot{d}\theta(X)\omega + \dot{d}^2 i(X)\omega \\ &= \{i(X)\Omega_{\rho_I}\}\star\omega + \Omega_{\rho_I}\star i(X)\omega \text{ par induction} \\ &= i(X)(\Omega_{\rho_I}\star\omega). \end{aligned}$$

Or X est arbitraire, donc $\dot{d}^2\omega = \Omega_{\rho_I}\star\omega$.

Supposons *3)* vraie pour n, alors

$$\begin{aligned} \dot{d}^{2(n+1)}\omega &= \dot{d}^2(d^{2n}\omega) = \dot{d}^2(\Omega^n_{\rho_I}\star\omega) \text{ par induction} \\ &= \Omega_{\rho_I}\star(\Omega^n_{\rho_I}\star\omega) = \Omega^{n+1}_{\rho_I}\star\omega. \end{aligned}$$

3) entraîne *1)*; en effet, à cause du théorème 10.1 et de *3)* on peut écrire

$$\begin{aligned} \theta(X)\theta(Y)\,\omega &= \theta(X)[\,i(Y),\dot{d}\,]\,\omega = \theta(X)\,\{\,i(Y)\dot{d} + \dot{d}i(Y)\}\,\omega \\ &= \theta(X)\,i(Y)\dot{d}\omega + \dot{d}\theta(X)i(Y)\omega + (i(X)\Omega_{\rho_I})\star i(Y)\omega, \end{aligned}$$

donc

$$\theta(Y)\theta(X)\omega = \theta(Y)i(X)\dot{d}\omega + \dot{d}\theta(Y)i(X)\omega + (i(Y)\Omega_{\rho_I})\star i(X)\omega.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} [\,\theta(X),\theta(Y)\,]\,\omega &= \{\,\theta(X)i(Y) - \theta(Y)i(X)\}\dot{d}\omega + \dot{d}\{\,\theta(X)i(Y) - \theta(Y)i(X)\} \\ &\quad + \{\,i(X)\Omega_{\rho_I}\}\star i(Y)\omega - \{i(Y)\Omega_{\rho_I}\}\star i(X)\omega. \end{aligned}$$

En faisant usage de *(10.9)* et *3)* on peut écrire

$$\begin{aligned} [\,\theta(X),\theta(Y)\,]\,\omega &= \{-\dot{d}i(X\wedge Y) + i(X\wedge Y)\dot{d} + i([\,X,Y\,])\}\,\dot{d}\omega \\ &\quad + \dot{d}\{-\dot{d}i(X\wedge Y) + i(X\wedge Y)\dot{d} + i([\,X,Y])\}\,\omega \\ &\quad + \{\,i(X)\Omega_{\rho_I}\}\star i(Y)\,\omega - \{\,i(Y)\Omega_{\rho_I}\}\star i(X)\omega \\ &= \{\,i([\,X,Y\,])\dot{d} + \dot{d}i([\,X,Y\,])\}\,\omega + i(X\wedge Y)\dot{d}^2\omega \\ &\quad - \dot{d}^2 i(X\wedge Y)\omega + \{i(X)\Omega_{\rho_I}\}\star i(Y)\omega - \{i(Y)\,\Omega_{\rho_I}\}\star i(X)\omega \\ &= \theta([\,X,Y])\omega + i(X\wedge Y)\,\{\Omega_{\rho_I}\star\omega\} - \Omega_{\rho_I}\star i(X\wedge Y)\omega \\ &\quad + \{i(X)\Omega_{\rho_I}\}\star i(Y)\omega - \{i(Y)\Omega_{\rho_I}\}\star i(X)\omega \\ &= \theta([X,Y])\omega - i(X)\{(i(Y)\Omega_{\rho_I})\star\omega + \Omega_{\rho_I}\star i(Y)\,\omega\} \\ &\quad - \Omega_{\rho_I}\star i(X\wedge Y)\,\omega + \{i(X)\Omega_{\rho_I}\}\star i(Y)\omega - \{i(Y)\Omega_{\rho_I}\}\star i(X)\omega \\ &= \theta([\,X,Y\,])\omega + \Omega_{\rho_I}(X,Y)\star\omega + \{i(Y)\Omega_{\rho_I}\}\star i(X)\omega \\ &\quad - \{\,i(X)\Omega_{\rho_I}\}\star i(Y)\omega + \Omega_{\rho_I}\star i(X\wedge Y)\omega \\ &\quad - \Omega_{\rho_I}\star i(X\wedge Y)\omega + \{i(X)\Omega_{\rho_I}\}\star i(Y)\omega - \{i(Y)\,\Omega_{\rho_I}\}\star i(X)\omega \\ &= \theta([\,X,Y\,])\omega + \Omega_{\rho_I}(X,Y)\star\omega. \end{aligned}$$

II. Supposons que $\mathfrak{X}$ soit un (K, F) - espace d'Elie Cartan. Nous montrerons que $1)$ est vérifiée. La preuve sera faite par induction sur le degré de ω. Pour $q = deg(\omega) = 0$, on a

$$
\begin{aligned}
[\theta(X), \theta(Y)\omega] &= \theta(X)\theta(Y)\omega - \theta(Y)\theta(X)\omega \\
&= \rho_I(X)(\rho_I(Y)\omega) - \rho_I(Y)(\rho_I(X)\omega) \\
&= \rho_I([X, Y])\omega + \rho_I(X)(\rho_I(Y)\omega) - \rho_I(Y)(\rho_I(X)\omega) - \rho_I([X,Y])\omega \\
&= \theta([X, Y])\omega + \Omega_{\rho_I}(X, Y)\star\omega.
\end{aligned}
$$

Supposons que $1)$ soit vraie pour les formes ω de degrés $< q$. En faisant usage de la formule (10.2) (pour $q = 0$) et de l'identité de Jacobi, on a

$$
\begin{aligned}
i(Z)\theta([X, Y])\omega &= \theta([X, Y])i(Z)\omega - i([[X, Y], Z])\omega \\
&= \{[\theta(X), \theta(Y)]\}\, i(Z)\omega - \Omega_{\rho_I}(X, Y)\star i(Z)\omega \\
&\quad - i([[X, Y], Z])\omega' \\
&= \theta(X)\theta(Y)i(Z)\omega - \theta(Y)\theta(X)i(Z)\omega \\
&\quad - i(Z)\{\Omega_{\rho_I}(X, Y)\star\omega\} - i([[X, Y], Z])\omega \\
&= \theta(X)\{i(Z)\theta(Y)\omega + i([Y, Z])\omega\} \\
&\quad - \theta(Y)\{i(Z)\theta(X)\omega + i([X, Z])\omega\} \\
&\quad - i(Z)\{\Omega_{\rho_I}(X, Y)\star\omega\} - i([[X, Y], Z])\omega \\
&= i(Z)\theta(X)\theta(Y)\omega + i([X, Z])\theta(Y)\omega \\
&\quad + i([Y, Z])\theta(X)\omega + i([X, [Y, Z]])\omega \\
&\quad - i(Z)\theta(Y)\theta(X)\omega - i([Y, Z])\theta(X)\omega \\
&\quad - i([X; Z])\theta(Y)\omega - i([Y, [X, Z]])\omega \\
&\quad - i(Z)\{\Omega_{\rho_I}(X, Y)\star\omega\} - i([[X, Y], Z])\omega \\
&= i(Z)[\theta(X), \theta(Y)]\omega - i(Z)\{\Omega_{\rho_I}(X, Y)\star\omega\};
\end{aligned}
$$

par conséquent

$$
\begin{aligned}
\langle Z \wedge \mathfrak{X}_{(q-1)}, [\theta(X), \theta(Y)]\omega\rangle &= \langle Z \wedge \mathfrak{X}_{(q-1)}, \theta([X, Y])\omega\rangle \\
&\quad + \langle Z \wedge \mathfrak{X}_{(q-1)}, \Omega_{\rho_I}(X, Y)\star\omega\rangle .
\end{aligned}
$$

COROLLAIRE 11.2. *Soit* $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ *un* (K, F)-*espace d'Elie Cartan. Si* (V, ρ_I) *est un espace* $\mathfrak{X}$- *infinitésimal* ($\mathfrak{T}$ - *régulier*), *alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes :*

0) V *est sans courbure,* $\Omega_{\rho_I} = 0$;

1) $[\theta(X), \theta(Y)] = \theta([X, Y])$;

2) $[\theta(X), \dot{d}] = 0$;

3) $\dot{d}^2 = 0$.

REMARQUE 11.1. De *(11.6)* et de la démonstration du théorème 11.2 il résulte que si (V, ρ_I) est un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal ($\mathfrak{J}$-régulier) sur un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan, alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

0') V est sans courbure;

1') $[\theta(X), \theta(Y)]\, v = \theta([X, Y])v$ pour tout $v \in V$;

2') $[\theta(X), \dot{d}]\, v = 0$ pour tout $v \in V$;

3') $\dot{d}^2 v = 0$ pour tout $v \in V$.

LEMME 11.1. *Soit* $(\Omega, (ad, \rho_D))$ *un* (K, F)-*pré-espace d'Elie Cartan. Si* (V, ρ_I) *est un espace* $\mathfrak{X}$-*infinitésimal* ($\mathfrak{J}$-*régulier*), *alors*

$$\{(\dot{d}\Omega_{\rho_I})(X, Y, Z)\}\, v = \rho_I(\mathfrak{J}(X, Y, Z))(v) \tag{11.8}$$

et 3) du théorème 11. 2 entraîne

$$\dot{d}^{2n+1}\omega = (\dot{d}\Omega^n_{\rho_I}) \star \omega + \Omega^n_{\rho_I} \star \dot{d}\omega \tag{11.9}$$

pour tout $\omega \in A_K(\mathfrak{X}, V)$ ($\omega \in A_F(\mathfrak{X}, V)$).

DEMONSTRATION. En effet,

$$\begin{aligned}
\{(\dot{d}\Omega_{\rho_I})(X, Y, Z)\}\, v &= \{\sum_{Cyc} \nabla(X)(\Omega_{\rho_I}(Y, Z)) - \Omega_{\rho_I}([X, Y], Z)\}\, v \\
&= \sum_{Cyc} \{X \diamond (\Omega_{\rho_I}(Y, Z)) \diamond v] - [\Omega_{\rho_I}(Y, Z)] \diamond (X \star v) \\
&\quad - [X, Y] \diamond (Z \star v) + Z \diamond ([X, Y] \diamond v) + [[X, Y], Z] \diamond v \\
&= (\sum_{Cyc} [[X, Y], Z]) \diamond v + 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{d}^{2n+1}\omega = \dot{d}(\dot{d}^{2n}\omega) &= \dot{d}(\Omega^n_{\rho_I} \star \omega) \\
&= (\dot{d}\Omega^n_{\rho_I}) \star \omega + \Omega^n_{\rho_I} \star \dot{d}\omega .
\end{aligned}$$

THEOREME 11.3. *Soit* $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ *un* (K, F)-*espace d'Elie Cartan. Si* (V, ρ_I) *est un espace* $\mathfrak{X}$-*infinitésimal* ($\mathfrak{J}$-*régulier*), *alors*

$$\dot{d}\Omega_{\rho_I} = 0 \qquad \textit{(Bianchi)} \tag{11.10}$$

$$\dot{d}^{2n+1}\omega = \Omega^n_{\rho_I} \star \dot{d}\omega \qquad \textit{(Cartan [9] p. 212).} \tag{11.11}$$

Des formules du théorème 0.3 et du corollaire 0.4, de la formule *3)* du théorème 11.2 et de la formule (*11.11*) il résulte :

THEOREME 11.4. *Soit* $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ *un* (K, F)*-espace d'Elie Cartan. Si* (V, ρ_I) *est un espace* $\mathfrak{X}$*-infinitésimal* ($\mathfrak{T}$*-régulier*), *et si* $\omega \in A_F(\mathfrak{X}, V)$, *alors*

I. Si ω *est de degré pair, alors*

$$d(\Omega^r_{\rho_I} \star \omega)^{2s-1} = (2s-1)\{\Omega^r \star d\omega\}(\Omega^r_{\rho_I} \star \omega)^{2s-2};$$

II. Si ω *est de degré impair, alors*

$$\begin{aligned} d(\Omega^r_{\rho_I} \star \omega)^{2s-1} &= (\Omega^r_{\rho_I} \star d\omega)(\Omega^r_{\rho_I} \star \omega)^{2s-2} \\ &= \Omega^{s-1}_{\rho_I} \star \{\Omega^r \star d\omega\}; \end{aligned}$$

III. Si ω *est de degré impair, alors*

$$d(\Omega^{r-1}_{\rho_I} \star d\omega)^s = s(\Omega^r_{\rho_I} \star \omega)(\Omega^{r-1}_{\rho_I} \star d\omega)^{s-1};$$

IV. Si ω *est de degré pair, alors*

$$\begin{aligned} d(\Omega^r_{\rho_I} \star \omega)^{2s} &= 2s(\Omega^r_{\rho_I} \star d\omega)(\Omega^r_{\rho_I} \star \omega)^{2s-1}; \\ &= \Omega^s_{\rho_I} \star (\Omega^r_{\rho_I} \star \omega); \end{aligned}$$

V. Si ω *est de degré impair, alors*

$$d(\Omega^r_{\rho_I} \star \omega)^{2s} = 0 = \Omega^s_{\rho_I} \star (\Omega^r_{\rho_I} \star \omega);$$

VI. Si ω *est de degré impair, alors*

$$d(d\omega)^s = s(d^2\omega)(d\omega)^{s-1} = s(\Omega \star \omega)(d\omega)^{s-1} \quad \textit{(Flanders [16])}.$$

Du théorème 11.1 il résulte

REMARQUE 11.2. Soit (V, ρ_I) un espace infinitésimal sur un pré-espace d'Elie Cartan $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ (régulier, resp. sans courbure). Alors la forme de courbure

$$\Omega_\rho = (\Omega_{\rho_I}, \Omega_{\rho_D}) : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \hat{\mathfrak{T}}_K(V)$$

est K-bilinéaire alternée (et Ω_{ρ_D} est F-bilinéaire, resp. $\Omega_{\rho_I}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}) \subset End_F(\mathfrak{X})$). Si de plus (V, ρ_I) est $\mathfrak{T}$-régulier, alors Ω_{ρ_I} est F-bilinéaire.

PROPOSITION 11.1. *Soit* (V, ρ_I) *un espace infinitésimal gradué sur le* (K, F)*-pré-espace d'Elie Cartan* $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$. *Si* $\Omega_{\rho_I} = 0$ *et si* ρ_I *est injective, alors* $\mathfrak{X}$ *est un* (K, F)*-espace d'Elie Cartan gradué.*

DEMONSTRATION. A cause de $\Omega_{\rho_I} = 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} (-1)^{rt}\rho_I([[X, Y], Z]) &= (-1)^{rt}\rho_I[X, Y]\,\rho_I(Z) - (-1)^{st}\rho_I(Z)\,\rho_I[X, Y] \\ &= (-1)^{rt}\rho_I(X)\rho_I(Y)\rho_I(Z) - (-1)^{r(s+t)}\rho_I(Y)\rho_I(X)\rho_I(Z) \\ &\quad - (-1)^{st}\rho_I(Z)\rho_I(X)\rho_I(Y) + (-1)^{s(r+t)}\rho_I(Z)\rho_I(Y)\rho_I(X) \end{aligned}$$

$$(-1)^{ts}\rho_I([[Z,X],Y]) = (-1)^{ts}\rho_I(Z)\rho_I(X)\rho_I(Y) - (-1)^{t(r+s)}\rho_I(X)\rho_I(Z)\rho_I(Y)$$
$$- (-1)^{rs}\rho_I(Y)\rho_I(Z)\rho_I(X) + (-1)^{r(t+s)}\rho_I(Y)\rho_I(X)\rho_I(Z)$$
$$(-1)^{sr}\rho_I([[Y,Z],X]) = (-1)^{sr}\rho_I(Y)\rho_I(Z)\rho_I(X) - (-1)^{s(t+r)}\rho_I(Z)\rho_I(Y)\rho_I(X)$$
$$- (-1)^{tr}\rho_I(X)\rho_I(Y)\rho_I(Z) + (-1)^{t(s+r)}\rho_I(X)\rho_I(Z)\rho_I(Y).$$

Donc

$$\rho_I(\Omega ad(X,\ Y)Z) = 0\ ;$$

or ρ_I est injective, par conséquent $\Omega ad(X,\ Y)Z = 0$.

F étant un F-module F-fidèle et (F,ρ_D) un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal, du corollaire 11.1, de *(iii)* de la proposition 8.1 et de la proposition 11.1 il résulte :

PROPOSITION 11.2. *Soit $(\mathfrak{X},(ad,\rho_D)$ un (K,F)-pré-espace d'Elie Cartan gradué. Si $\mathfrak{X}$ en tant que F-module est fidèle et si ρ_D est injective, alors $\mathfrak{X}$ est un (K,F)-espace d'Elie Cartan gradué sans courbure. Si de plus $\mathfrak{X}$ est F-libre de dimension > 1, alors $(\mathfrak{X},(ad,\rho_D))$ est régulier.*

12. Connexions linéaires.

Soit $(\mathfrak{X},(ad,\rho_D))$ un (K,F)-pré-espace d'Elie Cartan. Une structure d'espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal ($\mathfrak{T}$-régulière) sur $\mathfrak{X}$ est appellée *connexion linéaire* (*$\mathfrak{T}$-régulière*) sur $\mathfrak{X}$. Par définition même d'un pré-espace d'Elie Cartan (régulier), *ad* est une connexion linéaire sur $\mathfrak{X}$. Dans ce paragraphe, on notera $\diamond$ une connexion linéaire générique sur $\mathfrak{X}$. Si (V,ρ_I) est un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal ($\mathfrak{T}$-régulier), on notera ∇ la structure d'espace ($\mathfrak{T}$-régulier) $\mathfrak{X}$-infinitésimal sur $A_K(\mathfrak{X},V)$ (sur $A_F(\mathfrak{X},V)$) définie au moyen de $(\diamond,\rho_I)$.

La *forme de torsion* d'une connexion linéaire ($\hat{\mathfrak{T}}$-régulière) est l'élément, noté $T_\diamond$, de $A_K^2(V)$ (de $A_F^2(V)$), défini par la formule

$$T_\diamond(X,Y) = (\dot{d}1_{\mathfrak{X}})(X,Y) = X\diamond Y - Y\diamond X - [X,Y]. \tag{12.1}$$

En particulier, $Tad(X,Y) = [X,Y]$. Donc $\dot{d}Tad = 2\Omega ad$. De *(12.1)* et de la formule *(11.7)* il résulte

$$(\dot{d}T_\diamond)(X,Y,Z) = \sum_{Cyc}(\Omega_\diamond(X,Y))\diamond Z. \tag{12.2}$$

On note $D_\diamond$ le K-endomorphisme de degré 1 de $A_K(\mathfrak{X},V)$ ou de $A_F(\mathfrak{X},V)$ défini par la formule

$$\langle \mathfrak{X}_{(q+1)}, D_\diamond\omega\rangle = \Sigma(-1)^{j+1}\langle \mathfrak{X}^{\hat{j}}_{(q+1)}, \nabla(X_j)\omega\rangle\ , \tag{12.3}$$

où ω est de degré q.

Avec les notations introduites on peut écrire la formule *(10.7)* de la façon suivante

$$\dot{d} = Dad + \partial^*_{Tad} = Dad + i(Tad). \tag{12.4}$$

Plus généralement

THEOREME 12.1. *Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan. Soit $\diamond$ une connexion linéaire sur $\mathfrak{X}$ et V un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal ($\mathfrak{T}$-régulier) ; alors*

$$\dot{d}\omega = D_\diamond \omega + \partial^*_{T_\diamond} \omega = D_\diamond \omega + \dot{i}(T_\diamond)\omega. \tag{12.5}$$

En particulier

$$(\dot{d}\omega)(X, Y) = (\nabla(X)\omega)(Y) - (\nabla(Y)\omega)(X) - \omega(T_\diamond(X, Y)) \tag{12.6}$$

$$(\dot{d}\omega)(X, Y, Z) = \sum_{Cyc} \{(\nabla(X)\omega)(Y, Z) + \omega(T_\diamond(X, Y), Z)\}. \tag{12.7}$$

On peut démontrer *(12.5)* en calculant les deux premiers membres ou en remarquant que le deuxième membre vérifie la formule *(10.5)* qui caractérise $\dot{d}$. Ces deux façons de démontrer sont de simples vérifications.

Or (d, d) et $(\dot{i}(T_\diamond), \dot{i}(T_\diamond))$ sont deux t.i.g. de degré 1 de l'espace $(K, \mathfrak{E}_F(\mathfrak{X}))$-linéaire $\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V)$, donc *(12.5)* entraîne que $(D_\diamond, D_\diamond)$ est une t.i.g. de degré 1 de de $\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V)$, laquelle est appellée *translation infinitésimale extérieure absolue.*

Des formules *(12.2)*, *(12.7)* et du théorème 11.3 il résulte

COROLLAIRE 12.1. *Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K, F)-espace d'Elie Cartan. Si $\diamond$ est une connexion linéaire $\mathfrak{T}$-régulière sur $\mathfrak{X}$ et si (V, ρ_I) un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal, alors on a*

$$\sum \{(\nabla(X)\Omega_{\rho_I})(Y, Z) + \Omega_{\rho_I}(T_\diamond(X, Y), Z)\} = 0 \qquad (Bianchi)$$

$$\dot{d}T_\diamond = 0. \qquad (Ricci)$$

13. Le formalisme d'Elie Cartan.

Ce paragraphe est, avec une nouvelle terminologie, une continuation des § 4 et 5. Une structure de (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan (régulière) sur l'ensemble $\mathfrak{X}$ peut être aussi définie par la donnée : d'une structure d'espace (K, F)-linéaire, d'une application K-bilinéaire alternée de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{X}$, notée $[\ ,\ ]$, et d'une application K-linéaire d de F dans $Hom_K(\mathfrak{X}, F)$ (dans $Hom_F(\mathfrak{X}, F)$) telle que

$$[X, fY] = (i(X)\,df)Y + f[X, Y]$$

$$d(f \wedge g) = (df) \wedge g + f \wedge dg.$$

Une structure d'espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal ($\mathfrak{T}$-régulier) peut être aussi définie par la donnée : d'une structure d'espace (K, F)-linéaire et d'un $\mathfrak{X}$-*opérateur de connexion* ($\mathfrak{T}$-*régulier*) sur V, noté aussi d; c'est-à-dire d est une application K-bilinéaire de

V dans $Hom_K(\mathfrak{X}, V)$ (dans $Hom_F(\mathfrak{X}, V)$) et

$$d(f \wedge v) = (df) \wedge v + f \wedge (dv) .$$

Dans le cas birégulier on ne perd pas en généralité, à cause du corollaire 10.2, si l'on suppose que (d, d) est une t. i. g. de degré 1 de $\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V)$.

Soit $(\mathfrak{X}, [\ ,\ ], d)$ un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan régulier; on dit que D est un $\mathfrak{X}$- *déplacement d'Elie Cartan* sur V si D est une application K-linéaire de V dans $A_F(\mathfrak{X}, F) \otimes V$ telle que

$$D(fv) = (df) \otimes v + f(Dv),$$

c'est-à-dire $(D, d) \in \Gamma_K(V, \mathfrak{X})$.

Des théorèmes 5.1, 10.1 et 10.4 il résulte

THEOREME 13.1. *Soit $(\mathfrak{X}, [\ ,\ ], d)$ un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan régulier. Si V est un espace (K, F)-linéaire muni d'un $\mathfrak{X}$-opérateur d'Elie Cartan D, alors il existe un K-endomorphisme unique de $\mathfrak{T}(\mathfrak{X}, V)$, noté aussi D tel que : $1°)$ D est une dérivation de degré 1 pour $\mathfrak{T}(\mathfrak{X}, V)$ muni de la première graduation partielle; $2°)$ D coïncide sur $A_F(\mathfrak{X}, F)$ avec la dérivée extérieure d sous-jacente à $\mathfrak{X}$; $3°)$ D coïncide sur $\mathfrak{T}^1_o(\mathfrak{X}, V) = V$ avec le $\mathfrak{X}$-déplacement d'Elie Cartan D donné d'avance; $4°)$ D est de degré 0 pour $\mathfrak{T}(\mathfrak{X}, V)$ munie de la deuxième graduation partielle déduite de la bigraduation; $5°)$ D^2 est une K-dérivation de bidegré $\binom{0}{2}$ de $\mathfrak{T}(\mathfrak{X}, V)$, appelée* opérateur de courbure; *$6°)$ Si de plus $(\mathfrak{X}, [\ ,\ ], d)$ est sans courbure, ceci équivaut à dire que $d^2 = 0$, alors D^2 est $A_F(\mathfrak{X}, F)$- linéaire.*

En vertu de la proposition 5.1 on voit que (5.3) permet de définir une application canonique de l'ensemble des $\mathfrak{X}$-opérateurs d'Elie Cartan sur V dans l'ensemble des structures $\mathfrak{X}$- infinitésimales sur V.

14. Quelques contructions générales d'espaces infinitésimaux gradués.

Ce paragraphe est une suite naturelle des § 0, 1 et 2.

LEMME 14.1. *Soit $\rho = (\rho_I, \rho_D)$ une représentation infinitésimale gradué ($\mathfrak{D}$-régulière, resp. $\mathfrak{I}$-régulière) de $\mathfrak{X}$ vers V. Soit $J \in \overset{\gamma}{Endgr}_F(\mathfrak{X})$. Si l'on pose*

$$(14.1) \qquad \rho^*_J = (\rho_I \circ J, \rho_D \circ J),$$

alors ρ^*_J est une représentation infinitésimale graduée ($\mathfrak{D}$- régulière, resp. $\mathfrak{I}$-régulière) de degré γ de $\mathfrak{X}$ vers V.

DEMONSTRATION. Soient $p = deg f$ et $r = deg X$.

$$\{(\rho_I \circ J)(X)\}(fv) = \{\rho_I(JX)\}(fv)$$
$$= \{\rho_D(JX)f\}v + (-1)^{p(r+\gamma)} f\{\rho_I(JX)v\}$$
$$\{((\rho_D \circ J)X)f\}v + (-1)^{p(r+\gamma)} f\{(\rho_I \circ J)(X)\}v.$$

LEMME 14.2. *Soit $\rho = (\rho_I, \rho_D)$ une représentation infinitésimale graduée ($\mathfrak{D}$-régulière resp. $\mathfrak{J}$-régulière) de $\mathfrak{X}$ vers V. Soient $J \in Endgr_F(\mathfrak{X})$ et $\overline{J} \in Endgr_F(V)$ tels que $deg\ J = deg\ \overline{J} = 2\sigma$. Si l'on pose*

$$(14.2) \qquad \overline{\rho}_J(X)(v) = \rho_I(JX)v + \rho_I(X)(\overline{J}v) - \overline{J}(\rho_I(X)v),$$

alors $(\overline{\rho}_J, \rho_D \circ J)$ est une représentation infinitésimale graduée ($\mathfrak{D}$-régulière resp. $\mathfrak{J}$-régulière) de degré 2σ de $\mathfrak{X}$ vers V.

DEMONSTRATION. Soient $p = deg\ f$ et $r = deg\ X$.

$$\overline{\rho}_J(X)(fv) = \rho_I(JX)(fv) + \rho_I(X)(\overline{J}fv) - \overline{J}(\rho_I(X)f)v)$$
$$= \{\rho_D(JX)f\}v + (-1)^{p(r+2\sigma)} f\{\rho_I(JX)v\} +$$
$$+ \{\rho_D(X)f\}\overline{J}v + (-1)^{pr} f\{\rho_I(X)\overline{J}v\}$$
$$- \{\rho_D(X)f\}\overline{J}v - (-1)^{pr} f\overline{J}\{\rho_I(X)v\}$$
$$= \{((\rho_D \circ J)X)f\}v + (-1)^{p(r+2\sigma)} f\{\overline{\rho}_I(X)v\}.$$

LEMME 14.3. *Soit $\rho = (\rho_I, \rho_D)$ une représentation infinitésimale graduée ($\mathfrak{J}$-régulière) de $\mathfrak{X}$ vers $\mathfrak{X}$. Soit $J \in Endgr_F(\mathfrak{X})$ ($_1$ tel que $deg\ J = 2\sigma$)$_1$. Si l'on pose*

$$(14.\ 2') \qquad (\rho_J(X)Y) = \rho_I(JX)Y + \rho_I(X)JY - J(\rho_I(X)Y),$$

$$(14.\ 3) \qquad \mathfrak{B}_J(X, Y) = \rho_I(JX)JY - J(\rho_J(X)Y),$$

alors on a :

$$(14.4) \qquad \mathfrak{B}_J(X, Y) = (\rho_J(X)\ J)Y - (\rho_I(X)J)JY$$

$$((14.5) \qquad \mathfrak{B}_J(fX, Y) = f\,\mathfrak{B}_J(X, Y))$$

$$(_1(14.6) \qquad \mathfrak{B}_J(X, fY) = (-1)^{pr+1} f\,\mathfrak{B}_J(X, Y),$$

où $p = deg\ f$ et $r = deg\ X$)$_1$.

DEMONSTRATION. Pour prouver la formule *(14.4)*, il suffit de développer son 2^e membre; en effet,

$$(\rho_J(X)\ J)Y = \rho_J(X)(JY) - J(\rho_J(X)Y)$$
$$= (\rho_I(JX))JY + \rho_I(X)(J^2Y) - J(\rho_I(X)(JY))$$
$$- J(\rho_I(JX)Y) - J(\rho_I(X)(JY)) + J^2(\rho_I(X)Y)$$

et

$$-(\rho_I(X)J)JY = -\rho_I(X)(J^2Y) + J(\rho_I(X)JY);$$

en additionnant les deux identités ci-dessus on obtient la formule *(14.4)*.

$\mathcal{C}_1$ On démontre la formule *(14.6)* en faisant usage du lemme 14.2 et de la formule *(10.3)*; en effet

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_J(X, fY) &= (\rho_J(X)J)fY - (\rho_I(X)J)JfY \\ &= \{((\rho_D \circ J)X)f\}\, Y + (-1)^{pr} f(\rho_J(X)J)Y \\ &- \{((\rho_D \circ J)X)f\}\, Y - (-1)^{pr} f(\rho_I(X)J)JY \\ &= (-1)^{pr+1} f\{(\rho_I(X)J)JY - (\rho_J(X)J)Y\}.\mathfrak{J}_1\end{aligned}$$

Soit $[\ ,\ ]$ une application K-bilinéaire graduée de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{X}$. Si $J \in Endgr_K(\mathfrak{X})$, on pose

$$[X, Y]_J = (ad_J X)Y = [JX, Y] + [X, JY] - J[X, Y], \tag{14.7}$$

$$\mathfrak{N}_J(X, Y) = [JX, JY] - J[X, Y]_J, \tag{14.8}$$

$$\mathfrak{I}_J(X, Y, Z) = \sum_{Cyc} (-1)^{rt}[[X, Y]_J, Z]_J, \tag{14.9}$$

$$T_{\rho_J}(X, Y) = (\rho_J X)Y - (-1)^{rs}(\rho_J Y)X - [X, Y]_J, \tag{14.10}$$

où $r = deg\ X$, $s = deg\ Y$ et $t = deg\ Z$.

En particulier pour $J = 1_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{I}_J = \mathfrak{I}$, $T_{\rho_J} = T_{\rho_I}$.

Les formules ci-dessus définissent des applications K- multilinéaires.

LEMME 14.4. *Soit $[\ ,\ ]$ une structure de K-algèbre graduée (0)-anti-commutative Jacobienne sur $\mathfrak{X}$. Si $J \in \overset{o}{E}ndgr_K(\mathfrak{X})$, alors*

$$\mathfrak{I}_J(X, Y, Z) + \sum_{Cyc} (-1)^{rt}\{[\mathfrak{N}_J(X, Y), Z] + \mathfrak{N}_J([X, Y], Z)\} = 0. \tag{14.11}$$

DEMONSTRATION. Soient $r = deg\ X$, $s = deg\ Y$ et $t = deg\ Z$.

$$\begin{aligned}(-1)^{rt}[[X, Y]_J, Z]_J = (-1)^{rt}\{&[J[JX, Y], Z] + [[JX, Y], JZ] - J[[JX, Y], Z] + \\ &+ [J[X, JY], Z] + [[X, JY], JZ] - J[[X, JY], Z] - \\ &- [J^2[X, Y], Z] - [J[X, Y], JZ] + J[J[X, Y], Z]\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^{ts}[[Z, X]_J, Y]_J = (-1)^{ts}\{&[J[JZ, X], Y] + [[JZ, X], JY] - J[[JZ, X], Y] + \\ &+ [J[Z, JX], Y] + [[Z, JX], JY] - J[[Z, JX], Y] - \\ &- [J^2[Z, X], Y] - [J[Z, X], JY] + J[J[Z, X], Y]\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^{sr}[[Y, Z]_J, X]_J = (-1)^{sr}\{&[J[JY, Z], X] + [[JY, Z], JX] - J[[JY, Z], X] + \\ &+ [J[Y, JZ], X] + [[Y, JZ], JX] - J[[Y, JZ], X] - \\ &- [J^2[Y, Z], X] - [J[Y, Z], JX] - J[J[Y, Z], X]\},\end{aligned}$$

$$(-1)^{rt}[\mathfrak{N}_J(X,Y),Z]=(-1)^{rt}\{[[JX,JY],Z]-[J[JX,Y],Z]-$$
$$-[J[X,JY],Z]+[J^2[X,Y],Z]\},$$
$$(-1)^{ts}[\mathfrak{N}_J(ZX),Y]=(-1)^{ts}\{[[JZ,JX],Y]-[J[JZ,X],Y]-$$
$$-[J[Z,JX],Y]+[J^2[Z,X],Y]\},$$
$$(-1)^{sr}[\mathfrak{N}_J(Y,Z),X]=(-1)^{sr}\{[[JY,JZ],X]-[J[JY,Z],X]-$$
$$-[J[Y,JZ],X]+[J^2[Y,Z],X]\},$$
$$(-1)^{rt}\mathfrak{N}_J([X,Y],Z)=(-1)^{rt}\{[J[X,Y],JZ]-J[J[X,Y],Z]-$$
$$-J[[X,Y],JZ]+J^2[[X,Y],Z]\},$$
$$(-1)^{ts}\mathfrak{N}_J([Z,X],Y)=(-1)^{ts}\{[J[Z,X],JY]-J[J[Z,X],Y]-$$
$$-J[[Z,X],JY]+J^2[[Z,X],Y]\},$$
$$(-1)^{sr}\mathfrak{N}_J([Y,Z],X)=(-1)^{sr}\{[J[Y,Z],JX]-J[J[Y,Z],X]-$$
$$-J[[Y,Z],JX]+J^2[[Y,Z],X]\},$$

La formule *(14.11)* s'obtient en faisant la somme membre à membre des neuf formules ci-dessus et en tenant compte de $J^2.\mathfrak{J}(X,Y,Z)=0$, de la (0)- anti-commutativité de $[\ ,\ ]$ et des six identités ci-dessous, conséquences de l'identité de Jacobi:

$$(-1)^{rt}[[JX,JY],Z]=(-1)^{ts+1}[[Z,JX],JY]+(-1)^{sr+1}[[JY,Z],JX],$$
$$(-1)^{ts}[[JZ,JX],Y]=(-1)^{rt+1}[[JX,Y],JZ]+(-1)^{sr+1}[[Y,JZ],JX],$$
$$(-1)^{sr}[[JY,JZ],X]=(-1)^{rt+1}[[X,JY],JZ]+(-1)^{ts+1}[[JZ,X],JY],$$
$$(-1)^{rt}J[[X,Y],JZ]=(-1)^{ts+1}J[[JZ,X],Y]+(-1)^{rs+1}J[[Y,JZ],X],$$
$$(-1)^{ts}J[[Z,X],JY]=(-1)^{rt+1}J[[X,JY],Z]+(-1)^{sr+1}J[[JY,Z],X],$$
$$(-1)^{sr}J[[Y,Z],JX]=(-1)^{rt+1}J[[JX,Y],Z+(-1)^{ts+1}J[[Z,JX],Y].$$

Des lemmes 14.1, 14.2, 14.3 et 14.4 il résulte:

THEOREME 14.1. *Soit $(\mathfrak{X},(ad,\rho_D))$ un (K,F)- espace d'Elie Cartan gradué* ⌜*régulier*⌝. *Si $J\in \overset{o}{Endgr}_F(\mathfrak{X})$, alors $(\mathfrak{X},(ad_J,\rho_D\circ J))$ est un (K,F)-pré-espace d'Elie Cartan* ⌜*régulier*⌝ *et*

$$\mathfrak{N}_J(X,fY)=(-1)^{\deg f\deg X}f\mathfrak{N}_J(X,Y).$$

Si de plus $\mathfrak{N}_J=0$, alors $(\mathfrak{X},(ad_J,\rho_D\circ J))$ est un espace d'Elie Cartan gradué.

PROPOSITION 14.1. *Soit $[\ ,\ ]$ une application K-bilinéaire (2σ)-graduée et (2σ)-anti-commutative de $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{X}$. Si $\rho=(\rho_I,\rho_D)$ est une représentation infinité-*

simale graduée de $\mathfrak{X}$ *vers* $\mathfrak{X}$ *et si* $J \in \overset{2\sigma}{End}gr_K(\mathfrak{X})$, *alors*

$$(14.12) \qquad T_{\rho_J}(X,Y) = T_{\rho_I}(JX,Y) + T_{\rho_I}(X,JY) - J\,T_{\rho_I}(X,Y),$$

$$(14.13) \qquad \mathfrak{N}_J(X,Y) = \mathfrak{B}_J(X,Y) - (-1)^{\deg X \deg Y}\mathfrak{B}_J(Y,X) - T_{\rho_I}(JX,JY) + J\,T_{\rho_J}(X,Y).$$

En particulier, à cause de (14.12), *si* $T_{\rho_I} = 0$, *alors*

$$(14.14) \qquad \mathfrak{N}_J(X,Y) = \mathfrak{B}_J(X,Y) - (-1)^{\deg X \deg Y}\mathfrak{B}_J(Y,X).$$

PROPOSITION 14.2. *Soit* (ρ_I, ρ_D) *une représentation infinitésimale graduée birégulière de* $\mathfrak{X}$ *vers* $\mathfrak{X}$. *Si l'on pose*

$$\{ad\}_{\rho_I} = \{X,Y\}_{\rho_I} = \rho_I(X)Y - (-1)^{rs}\rho_I(Y)X,$$

où $r = \deg X$ *et* $s = \deg Y$, *alors* $(\mathfrak{X},(\{ad\}_{\rho_I}, \rho_D))$ *est un pré-espace d'Elie Cartan régulier.*

DEMONSTRATION. Soit $f \in F^p$, alors

$$\begin{aligned}\{X, fY\}_{\rho_I} &= \rho_I(X)(fY) - (-1)^{r(s+p)}\rho_I(fY)X \\ &= (\rho_D(X)f)Y + (-1)^{rp} f\rho_I(X)Y - (-1)^{r(s+p)} f\rho_I(Y)X \\ &= (\rho_D(X)f)Y + (-1)^{rp} f\{\rho_I(X)Y - (-1)^{rs}\rho_I(Y)X\} \\ &= (\rho_D(X)f)Y + (-1)^{rp} f\{X,Y\}_{\rho_I}.\end{aligned}$$

Avec ces nouvelles notations on peut écrire la formule *(14.10)* sous la forme

$$(14.10') \qquad T_{\rho_J}(X,Y) = \{X,Y\}_{\rho_J} - [X,Y]_J.$$

LEMME 14.5. *Soit* $(\mathfrak{X},(ad,\rho_D))$ *un* (K,F)*-pré-espace d'Elie Cartan gradué (régulier). Soit* H *un* F*-projecteur de* $\mathfrak{X}$, $H \in \overset{o}{End}gr_F(\mathfrak{X})$ *et* $H^2 = H$. *On pose* $\mathfrak{X}_H = H(\mathfrak{X})$. *Soit* F' *une sous-K-algèbre graduée de* F *et* $\mathfrak{X}'$ *une sous-K-module gradué de* $\mathfrak{X}_H$ *qui soit un* F'*-module tel que*

$$(i) \qquad \rho_D(\mathfrak{X}')(F') \subset F';$$

$$(ii) \qquad \text{si } HX, HY \in \mathfrak{X}', \text{ alors } H[HX,HY] \in \mathfrak{X}'.$$

Si l'on pose

$$\{HX,HY\} = H[HX,HY],$$

alors $\mathfrak{X}'$ *muni de cette accolade et de la contraction* ρ'_D *de* ρ_D *à* $(\mathfrak{X}', \mathfrak{D}gr_K(F'))$ *est un* (K,F')*-pré-espace d'Elie Cartan gradué (régulier).*

Si de plus $(\mathfrak{X},(ad,\rho_D))$ *est un* (K,F)*-espace d'Elie Cartan et si* (*iii*) *pour tout* $HX, HY \in \mathfrak{X}'$, $H[X, Y] = H[HX, HY]$,

alors $(\mathfrak{X}', (\{\ ,\ \}, \rho'_D))$ *est un* (K, F')*-espace d'Elie Cartan.*

DEMONSTRATION. En effet, soient $HX \in \mathfrak{X}'^r$ et $HY \in \mathfrak{X}'^s$, alors

$$\{HX, HY\} = H[HX, HY] = (-1)^{rs+1} H[HY, HX]$$
$$= (-1)^{rs+1}\{HY, HX\}.$$

A cause de (*i*) on peut considérer la contraction ρ'_D. Soit $\omega \in F'$, alors

$$\{HX, \omega HY\} = \{HX, H\omega Y\} = H[HX, H\omega Y] = H[HX, \omega HY]$$
$$= H(\rho'_D(HX)\omega HY) + J^r_{F'}(\omega)[HX, HY])$$
$$= \rho'_D(HX)\omega H^2 Y + J^r_{F'}(\omega)[HX, HY]$$
$$= \rho'_D(HX)\omega\ HY + J^r_{F'}(\omega)\{HX, HY\}.$$

Supposons (*iii*); si $HZ \in \mathfrak{X}'^t$, alors

$$(-1)^{rt}\{\{HX, HY\}, HZ\} = (-1)^{rs}\{H[X, Y], HZ\}$$
$$= (-1)^{rs} H[[X, Y], Z].$$

Donc $\{\ ,\ \}$ vérifie l'identité de Jacobi si $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ est un (K, F)-espace d'Elie Cartan gradué.

REMARQUE 14.1. $\mathfrak{X}_H$ est un espace (K, F)-linéaire vérifiant (*i*) et (*ii*), pour $F' = F$ et $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}_H$.

THEOREME 14.2. *Soit* $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ *un* (K, F)*-espace d'Elie Cartan gradué régulier. Soit* $H \in \overset{\circ}{Endgr}_F(\mathfrak{X})$ *un projecteur. Soit* $\mathfrak{X}'$ *un sous-K-module de* $\mathfrak{X}_H$ *et* F' *la sous-K-algèbre* $F_H = \{\omega \mid \omega \in F \text{ et } \rho_D(X)\omega = 0, \forall\, X \in Ker(H)\}$ *vérifiant* (*i*), (*ii*) *et* (*iii*) *du lemme 14.5. Alors le* F'*-module* $\bar{\mathfrak{X}}'$ *engendré par* $\mathfrak{X}'$ *est aussi une sous-K-algèbre de* $\mathfrak{X}'$ *vérifiant* (*i*), (*ii*) *et* (*iii*) *du lemme 8.2. Donc l'accolade associé à* $\bar{\mathfrak{X}}'$ *et la contraction de* ρ_D *à* $(\bar{\mathfrak{X}}', \mathfrak{D}gr_K(F'))$ *définissent sur* $\bar{\mathfrak{X}}'$ *une structure de* (K, F')*-espace d'Elie Cartan régulier.*

DEMONSTRATION. Soient $HX \in \mathfrak{X}'^r$, $HY \in \mathfrak{X}'$, $\pi \in F'$ et $\omega \in F'^q$. Alors

a. $$\rho_D(\pi HY)\omega = \pi\rho_D(HY)\omega \in F'$$

b. $$H[H, \omega Y] = H((\rho_D(X)\ \omega Y) + (-1)^{rq}\omega[X, Y])$$
$$= \rho_D(X)\,\omega HY + (-1)^{rq}\omega H[X, Y]$$
$$= \rho_D(HX)\omega H^2 Y + (-1)^{rq}\omega H[HX, HY]$$
$$= H(\rho_D(HX)\omega HY + (-{}^1)^{rq}\omega[HX, HY])$$
$$= H[HX, \omega HY] = H[HX, H\omega Y].$$

A cause de a, b et de la linéarité, $\overline{\mathfrak{X}}'$ vérifie (i), (ii) et (iii).

15. La représentation infinitésimale graduée $\boxtimes$.

Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan. On pose

$$(15.1) \qquad \boxtimes(R) = [\, i(R), \dot{d}\,] \text{ pour } R \in A_F(\mathfrak{X}).$$

THEOREME 15.1. *Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan régulier. Si (V, ρ_I) est un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal, alors $(\boxtimes, \boxtimes)$ est une représentation infinitésimale graduée de $\tilde{A}_F(\mathfrak{X})$ vers l'espace $(K, \mathcal{E}_F(\mathfrak{X}))$-linéaire gradué $\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V)$ telle que*

$$(15.1') \qquad \boxtimes(X) = \theta(X) \text{ pour } X \in \mathfrak{X} \text{ et } \boxtimes(1_{\mathfrak{X}}) = d,$$

$$(15.2) \qquad \boxtimes(\omega \wedge R) = \omega \wedge \boxtimes(R) + (-1)^{\deg \omega + \deg R}\, i(d\omega) \wedge R,$$

$$(15.3) \qquad [\boxtimes(R), \omega \wedge \boxtimes(S)] = (\boxtimes(R)\omega) \wedge \boxtimes(S) + (-1)^{\deg \omega \deg R}\, \omega \wedge [\boxtimes(R), \boxtimes(S)].$$

Pour $R \in A^r_F(\mathfrak{X})$ et $\omega \in A^q_F(\mathfrak{X}, V)$, on a :

$$(15.4) \qquad \langle \mathfrak{X}_{(r+q)}, \boxtimes(R)\omega \rangle = \langle \mathfrak{X}_{(r+q)}, R \underset{\rho_I}{\wedge} \omega \rangle - \langle \square_R(\mathfrak{X}_{r+q}), \omega \rangle + \langle [\mathfrak{X}_{(r+q)}]_R, \omega \rangle,$$

où $\underset{\rho_I}{\wedge}$ est le produit de Grassmann associé à

$$(X, v) \in \mathfrak{X} \times V \to \rho_I(X)v \in V,$$

c'est-à-dire

$$\langle \mathfrak{X}_{(r+q)}, R_{\rho_I} \omega \rangle = \Sigma\, \varepsilon_{IJ}\, \rho_I(\langle \mathfrak{X}_I, R \rangle)\, \langle \mathfrak{X}_J, \omega \rangle, \; I = (I_r),\; J = (J_{q-1}),$$

et les symboles $\square_R$ et $[\;\,]_R$ étant définis par les formules :

$$\square_R(\mathfrak{X}_{(r+q)}) = \Sigma\, \varepsilon_{IJ}\, \langle \mathfrak{X}_I, R \rangle\, \square \mathfrak{X}_J, \text{ où } I = (I_r),\; J = (J_q),$$

$$[\mathfrak{X}_{(r+q)}]_R = (-1)^{r-1} \Sigma\, \varepsilon_{HIJ}\, \langle [\mathfrak{X}_H] \wedge \mathfrak{X}_I, R \rangle \wedge \mathfrak{X}_J,$$

où $[\mathfrak{X}_H] = [X_{h_1}, X_{h_2}] = X_{h_1} \square X_{h_2}$, $H = (H_2)$, $I = (I_{r-1})$, $J = (J_{q-1})$.

DEMONSTRATION. Les formules $(15.1')$ sont évidentes, (15.2) est une conséquence immédiate de (15.1); la formule (15.3) est vraie à cause du théorème 1.1, puisque $(i(R), i(R))$ et (d, d) sont des translations infinitésimales graduées. La formule (15.4) se démontre en calculant le deuxième membre de (15.1) avec l'aide de la 2^e^ formule de (6.2).

COROLLAIRE 15.1. *Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan régulier. Si (V, ρ_I) est un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal et si $R \in End_F(\mathfrak{X})$, avec les notations* *introduites dans le* §14 *et les formules* (14.7), (15.4), *on a*

$$(15.5)\qquad [X, Y]_R = \square_R(X \wedge Y) - [X \wedge Y]_R = [JX, Y] + [X, JY] - J[X, Y]$$

$$(15.6)\qquad \langle \mathfrak{X}_{(1+q)}, \boxtimes(R)\omega\rangle = \Sigma(-1)^{j+1}\rho_I(RX_j)\rangle\, \mathfrak{X}^{\hat{j}}_{(1+q)}, \omega\rangle - - \langle [\mathfrak{X}_{(1+q)}]_R, \omega\rangle\,,$$

où

$$[\mathfrak{X}_{(1+q)}]_R = \sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}[X_i, X_j]_R \wedge \mathfrak{X}^{\hat{i}\hat{j}}_{(1+q)}.$$

Par conséquent $(\boxtimes(R), \boxtimes(R))$ *est, à cause de la formule* (10.7), *la translation infinitésimale extérieure sous-jacente au pré-espace d'Elie Cartan* $(\mathfrak{X},(ad_R, \rho_D \circ R))$, *où* ad_R *est définie par* (14.7). *Dans ce cas particulier, on écrira* $d_R = \boxtimes(R)$.

De la formule *(15.1)* et du corollaire 11.1 il résulte :

COROLLAIRE 15.2. *Un espace* $\mathfrak{X}$*- infinitésimal est sans courbure si, et seulement si,* $[\mathring{d}, \boxtimes(R)] = 0$ *pour tout* $R \in A_F(\mathfrak{X})$.

THEOREME 15.2. *Soit* $(\mathfrak{X},(ad, \rho_D))$ *un* (K, F)*-espace d'Elie Cartan régulier. Si pour* $R \in A^r_F(\mathfrak{X})$ *et* $S \in A^s_F(\mathfrak{X})$ *on pose*

$$(15.7)\qquad \langle \mathfrak{X}_{(r+s)}, [R, S]\rangle = \langle \mathfrak{X}_{(r+s)}, R \underset{ad}{\wedge} S\rangle - \langle \square_R(\mathfrak{X}_{(r+s)}), S\rangle + \langle \square_S(\mathfrak{X}_{(r+s)}), R\rangle + + \langle [\mathfrak{X}_{(r+s)}]_R, S\rangle - \langle [\mathfrak{X}_{(r+s)}]_S, R\rangle\,,$$

où $\underset{ad}{\wedge}$ *est le produit de Grassmann associé à* $[\ ,\ ]$,

$$\langle \mathfrak{X}_{(r+s)}, R \underset{ad}{\wedge} S\rangle = \Sigma\, \varepsilon_{IJ}[\langle \mathfrak{X}_I, R\rangle, \langle \mathfrak{X}_J, S\rangle], I = (I_r), J = (J_s)$$

alors $A_F(\mathfrak{X})$ *muni du crochet défini par la formule* (15.7) *est une K-algèbre de Lie graduée, qui sera appellée la K-*algèbre de Nijenhuis associée *au* (K, F)*-espace d'Elie Cartan régulier* $\mathfrak{X}$. *En particulier pour R et S de degré 1 on a*

$$[R, S](X, Y) = [R(X), S(Y)] - [R(Y), S(X)] - R([S(X), Y]) - - R([X, S(Y)]) - S([R(X), Y]) - S([X, R(Y)]) + R(S([X, Y])) + S(R([X, Y])).$$

Le produit de Grassmann $\underset{ad}{\wedge}$ est une structure de K- algèbre de Lie graduée sur $A_F(\mathfrak{X})$. Ce fait, la K-linéarité des autres opérateurs qui figurent dans la formule *(15.7')* et le corollaire 0.2 entraînent l'identité de Jacobi pour [,] sur $A_F(\mathfrak{X})$ défini par la formule *(15.7)*.

REMARQUE 15.1. On peut résumer la formule *(15.7)* de la façon suivante :

$$(15.7') \qquad [R, S] = R \overset{\wedge}{_{ad}} S + R \circ \Box_S - S \circ \Box_R + S \circ [\ ]_R - R \circ [\ ]_S .$$

THEOREME 15.3. *Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K, F)-espace d'Elie Cartan régulier. On a les identités suivantes :*

$$[R, \omega \wedge S] = (\boxtimes(R)\omega) \wedge S + (-1)^{pr} \omega \wedge [R, S] + (-1)^{(q+s)(r-s)+1} d\omega \wedge (i(S)R),$$

$$[i(R), adS]\, T = [i(R)S, T] + (-1)^s i([R, S])T + (-1)^{t(s+1)} i([R, S])S ,$$

$$[i(R), \boxtimes(S)]\, \omega = \boxtimes(i(R)S)\omega + (-1)^s\, i([R, S])\omega .$$

De la formule *(15.2)* et de la 2^e formule du théorème 15.3 il résulte :

COROLLAIRE 15.3. *Soit $(\mathfrak{X},(ad, \rho_D))$ un (K, F)-espace d'Elie Cartan régulier. La structure de K- algèbre de Nijenhuis et la représentation infinitésimale graduée $(\boxtimes, \boxtimes)$ définissent sur $A_F(\mathfrak{X})$ une structure de $(K, Z(\mathfrak{E}_F(\mathfrak{X})))$-espace d'Elie Cartan gradué régulier, où*

$$Z(\mathfrak{E}_F(\mathfrak{X})) = \{\omega \mid \omega \in \mathfrak{E}_F(\mathfrak{X}) \text{ et } d\omega = 0\} .$$

Le théorème 15.2 a été établi par Nijenhuis [32] dans le cas de l'espace d'Elie Cartan des C^∞- champs de vecteurs d'une C^∞-variété. La démonstration de l'identité de Jacobi est un calcul assez long, mais analogue, avec adaptations évidentes, au calcul fait par Nijenhuis [32] pour l'établir dans le cas des formes multilinéaires alternées définies dans les espaces d'Elie Cartan des C^∞- champs de vecteurs à valeurs dans l'anneau des C^∞- fonctions.

Du corollaire 11.2 il résulte :

THEOREME 15.4. *Une structure $\mathfrak{X}$- infinitésimale est sans courbure si, et seulement si,*

$$\boxtimes([R, S]) = [\boxtimes(R), \boxtimes(S)] .$$

16. Structures (K, F)- différentiables.

Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un (K, F)-espace d'Elie Cartan. Soit Ω_K un sous-espace (K, F)-linéaire gradué de $A_F(\mathfrak{X}, F)$, $\Omega_K^q = \Omega_K \cap A_F^q(\mathfrak{X}, F)$. On dit qu'un sous-ensemble Φ de $\mathfrak{D}gr_K(\Omega_K)$ est *$\mathfrak{D}$-complet* si $D \in \Phi$ et $Df = 0 = D\,df$ pour tout $f \in F$, entrainent $D = 0$. On dira qu'un sous-espace (K, F)-linéaire gradué Ω_K de $A_F(\mathfrak{X}, F)$ est une *algèbre différentielle extérieure* sur $\mathfrak{X}$ si Ω_K vérifie les trois axiomes ci-dessous :

AD 1). $\Omega_K^o = F$ et Ω_K est un sous-anneau gradué de $\mathfrak{E}_F(\mathfrak{X})$;

AD 2). Pour tout $R \in A_F^r(\mathfrak{X})$, $i(R)\, \langle \Omega_K^r \rangle \subset \Omega_K^{r-1}$;

AD 3). La dérivation extérieure d sous-jacente à l'espace d'E.Cartan $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ laisse Ω_K stable, $d\langle \Omega_K^r \rangle \subset \Omega_K^{r-1}$.

Des définitions données ci-dessus il résulte :

PROPOSITION 16.1. *Soit Ω_K une algèbre différentielle extérieure sur $\mathfrak{X}$ qui soit $\mathfrak{D}$-complète. Alors pour tout $R \in A_F^r(\mathfrak{X})$ la K-dérivation graduée $\boxtimes(R)$ laisse Ω_K stable et $\boxtimes(R)$ est le seul élément $D_R \in \mathfrak{D}gr_K^r(\Omega_K)$ tel que*

$$D_R f = i(R)df \tag{16.1}$$

$$D_R d\omega = (-1)^r d D_R \omega \text{ pour tout } \omega \in \Omega_K. \tag{16.2}$$

Soit $\mathfrak{X}$ un espace (K, F)-linéaire. On dit qu'une application K-linéaire

$$D : F \to A_F(\mathfrak{X}, F)$$

est un *morphisme croisé de poids* r de F vers $\mathfrak{X}$ si

C 1 $$D\langle F\rangle \subseteq A_F^r(\mathfrak{X}, F);$$

C 2 $$D(f.g) = (Df)\wedge g + f\wedge(Dg).$$

On note ${}^r\tilde{\mathcal{C}}_K(F, \mathfrak{X})$ le sous-espace (K, F)-linéaire de $Hom_K(F, A_F^r(\mathfrak{X}, F))$ constitué par les morphismes croisés de poids r de F vers $\mathfrak{X}$. On a

$$\tilde{\mathcal{C}}_K(F, \mathfrak{X}) = \bigoplus_{r\in Z} {}^r\tilde{\mathcal{C}}_K(F, \mathfrak{X}).$$

En particulier ${}^1\tilde{\mathcal{C}}_K(F, \mathfrak{X}) = \mathcal{C}_K(F, A_F(\mathfrak{X}, F))$.

REMARQUE. Si $\mathfrak{X}$ est un espace (K, F)-linéaire gradué, on peut aussi définir la notion de morphisme croisé gradué de poids r de l'anneau de F vers $\mathfrak{X}$; si ${}^r\tilde{\mathcal{C}}gr_K(F, \mathfrak{X})$ est le groupe additif de ces morphismes gradués de poids r, alors l'espace (K, F)-linéaire $\tilde{\mathcal{C}}gr_K(F, \mathfrak{X})$ gradué par $({}^r\tilde{\mathcal{C}}gr_K(F, \mathfrak{X}) \mid r \in Z)$ possède des propriétés analogues à celles qui ont été établies pour ${}^1\tilde{\mathcal{C}}gr_K(F, \mathfrak{X}) = \mathcal{C}gr_K(F, A_F(\mathfrak{X}, F))$ dans le §4.

Soit $\tilde{\mathfrak{X}}$ un autre espace (K, F)-linéaire. Si $\tilde{\rho} \in Hom_F(\tilde{\mathfrak{X}}, \mathfrak{D}_K(F))$, alors pour $R \in A_F^r(\mathfrak{X}, \tilde{\mathfrak{X}})$ l'équation suivante en déterminant $D : F \to A_F^r(\mathfrak{X}, F)$

$$\langle \mathfrak{X}_{(r)}, Df\rangle = \tilde{\rho}(\langle \mathfrak{X}_{(r)}, R\rangle) f \text{ pour tout } f \in F, \tag{16.3}$$

établit une application F-linéaire canonique

$$A_F^r(\mathfrak{X}, \tilde{\mathfrak{X}}) \to {}^r\tilde{\mathcal{C}}_K(F, \mathfrak{X}). \tag{16.4}$$

Si de plus $\tilde{\rho}$ est injective, c'est-à-dire si l'application canonique $\varphi : \tilde{\mathfrak{X}} \to \tilde{\mathfrak{X}}^{**}$, où $(\varphi(\tilde{X}))\omega = \omega(X)$, est injective, alors l'application *(16.4)* est injective.

LEMME 16.1. *L'application F-linéaire*

$$\tilde{\nu}_{\mathfrak{X}} : A_F^r(\mathfrak{X}, \mathfrak{D}_K(F)) \to {}^r\tilde{\mathcal{C}}_K(F, \mathfrak{X})$$

définie par l'équation

(16.3') $$\langle \mathfrak{X}_{(r)}, \tilde{\nu}_{\mathfrak{X}}(R)f \rangle = \langle \mathfrak{X}_{(r)}, R \rangle f$$

est un isomorphisme.

On note $\tilde{\psi}_{\mathfrak{X}}$ l'isomorphisme inverse de $\tilde{\nu}_{\mathfrak{X}}$:

(16.5) $$\langle \mathfrak{X}_{(r)}, \tilde{\psi}_{\mathfrak{X}}(D) \rangle f = \langle \mathfrak{X}_{(r)}, Df \rangle , \; D \in {}^r\tilde{\mathcal{C}}_K(F, \mathfrak{X}).$$

On note $\psi_{\mathfrak{X}}$ l'application F- linéaire graduée de $\mathfrak{D}gr_K(A_F(\mathfrak{X}, F))$ dans $A_F(\mathfrak{X}, \mathfrak{D}_K(F))$ définie par l'identité

(16.6) $$\langle \mathfrak{X}_{(r)}, \psi_{\mathfrak{X}}(D) \rangle f = \langle \mathfrak{X}_{(r)}, Df \rangle , \; r = deg D,$$

c'est-à- dire $\psi_{\mathfrak{X}}(D) = \tilde{\psi}_{\mathfrak{X}}(D \mid F)$.

Soit $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ un sous-espace d'Elie Cartan de $\mathfrak{D}_K(F)$, c'est-à-dire $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{D}_K(F)$ est un sous- espace (K, F)- linéaire de $\mathfrak{D}_K(F)$ stable par le crochet de deux K- dérivations de F et ρ_D est l'application inclusion de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{D}_K(F)$. Soit Ω_K un sous-espace (K, F)- linéaire gradué de $A_F(\mathfrak{X}, F)$. On pose

$$^r\tilde{\mathcal{C}}_K(F, \Omega_K) = \{ D \mid D \in {}^r\tilde{\mathcal{C}}_K(F, \mathfrak{X}) \text{ et } D \langle F \rangle \subset \Omega_K^r \}.$$

On dit qu'un sous-ensemble Φ de ${}^r\tilde{\mathcal{C}}_K(F, \Omega_K)$ est $\tilde{\psi}_{\mathfrak{X}}$-*complet* si $\langle \mathfrak{X}_{(r)}, \tilde{\psi}_{\mathfrak{X}}(D) \rangle \in \mathfrak{X}$ pour tout $D \in \Phi$; donc $\tilde{\psi}_{\mathfrak{X}} \langle \Phi \rangle \subset A_F^r(\mathfrak{X})$.

On dit qu'un sous-ensemble Φ de $\mathfrak{D}gr_K^r(\Omega_K)$ est $\psi_{\mathfrak{X}}$- *complet* si $\langle \mathfrak{X}_{(r)}, \psi_{\mathfrak{X}}(D) \rangle \in \mathfrak{X}$ pour tout $D \in \Phi$; donc $\psi_{\mathfrak{X}} \langle \Phi \rangle \subset A_F^r(\mathfrak{X})$.

Si ${}^r\tilde{\mathcal{C}}_K(F, \Omega_K)$ est $\tilde{\psi}_{\mathfrak{X}}$- complet, alors $\mathfrak{D}gr_K^r(\Omega_K)$ est $\psi_{\mathfrak{X}}$- complet.

LEMME 16.2. *Soit $\mathfrak{X}$ un sous-espace d'Elie Cartan de $\mathfrak{D}_K(F)$. Si Ω_K est un sous-espace (K, F)- linéaire gradué de $A_F(\mathfrak{X}, F)$ qui soit $\psi_{\mathfrak{X}}$- complet, alors les deux équations ci-dessous(déterminant R)*

(16.7) $$\langle \mathfrak{X}_{(r)}, R \rangle f = \langle \mathfrak{X}_{(r)}, Df \rangle , \; \forall f \in F \text{ et } \forall D \in \mathfrak{D}gr_K^r(\Omega_K),$$

(16.8) $$\langle \mathfrak{X}_{(r)}, R \rangle f = \langle \mathfrak{X}_{(r)}, [D, d] f \rangle , \; \forall f \in F \text{ et } \forall D \in \mathfrak{D}gr_K^{r-1}(\Omega_K)$$

définissent des applications F- linéaires graduées de degrés 0 et -1, notées $\psi_{\mathfrak{X}, \Omega_K}$ et $\mu_{\mathfrak{X}, \Omega_K}$ respectivement, de $\mathfrak{D}gr_K(\Omega)$ dans $A_F(\mathfrak{X})$.

THEOREME 16.1. *Soit $\mathfrak{X}$ un sous- espace d'Elie Cartan de $\mathfrak{D}_K(F)$ et Ω_K une algèbre différentielle extérieure sur $\mathfrak{X}$.*

I. Si Ω_K est $\psi_{\mathfrak{X}}$- complète, alors :

(i) Si $\boxtimes(R)f = \imath(R)df = 0$ pour tout $f \in F$, alors $R = 0$; par conséquent les applications $\boxtimes$, $\imath$: $A_F^r(\mathfrak{X}) \to \mathfrak{D}gr_K(\Omega_K)$ sont injectives;

(ii) Les sous-K-modules $\boxtimes \langle A_F(\mathfrak{X}) \rangle$ *et* $i \langle A_F(\mathfrak{X}) \rangle$ *de* Ω_K *sont* $\mathfrak{D}$-*complets ;*

(iii) Les applications K-linéaires

$$\boxtimes, \quad i : A_F(\mathfrak{X}) \to \mathfrak{D}gr_K(\Omega_K)$$

sont des sections respectivement des applications F-linéaires

$$\psi_{\mathfrak{X},\,\Omega_K},\ \mu_{\mathfrak{X},\,\Omega_K} : \mathfrak{D}gr_K(\Omega_K) \to A_F(\mathfrak{X});$$

(iv) Pour tout $f \in F$ *et chaque* $D \in \mathfrak{D}gr_K(\Omega_K)$,

$$\boxtimes(\psi_{\mathfrak{X},\,\Omega_K}(D))f = Df \text{ et } i(\mu_{\mathfrak{X},\,\Omega_K}(D))df = [D, d]f;$$

II. Si $\tilde{\mathcal{C}}_K(F, \Omega_K)$ *est* $\tilde{\psi}_{\mathfrak{X}}$-*complet, alors*

(v) L'application K-linéaire

$$R \in A_F(\mathfrak{X}) \to (\boxtimes(R)) \mid F \in \mathcal{C}_K(F, \Omega_K)$$

est une section de l'application F-linéaire

$$\tilde{\psi}_{\mathfrak{X},\,\Omega_K} : \tilde{\mathcal{C}}_K(F, \Omega_K) \to A_F(\mathfrak{X})$$

définie par l'identité

$$(16.\tilde{7}) \qquad \langle \mathfrak{X}_{(r)}, \tilde{\psi}_{\mathfrak{X},\,\Omega_K}(D) \rangle f = \langle \mathfrak{X}_{(r)}, Df \rangle$$

pour tout $f \in F$ *et tout* $D \in {}^r\mathcal{C}_K(F, \Omega_K)$;

(vi) Pour tout $f \in F$ *et chaque* $D \in \tilde{\mathcal{C}}(F, \Omega_K)$

$$\boxtimes(\tilde{\psi}_{\mathfrak{X},\,\Omega_K}(D))f = Df.$$

DEMONSTRATION.

I. Soit $R \in A^r_F(\mathfrak{X})$. On a toujours $i(R)f = 0$ pour tout $f \in F$. Or

$$\langle \mathfrak{X}_{(r)}, i(R)df \rangle = \langle \langle \mathfrak{X}_{(r)}, R \rangle, df \rangle = \langle \mathfrak{X}_{(r)}, R \rangle f,$$

par conséquent, si $\boxtimes(R)f = i(R)df = 0$ pour tout $f \in F$, alors $\langle \mathfrak{X}_{(r)}, R \rangle = 0$, donc $R = 0$.

De $AD2$ et $AD3$ on déduit que $\boxtimes(A_F(\mathfrak{X}))$ et $i(A_F(\mathfrak{X}))$ sont des sous-ensembles de $\mathfrak{D}gr_K(\Omega_K)$. De la formule $\boxtimes(R)f = i(R)df$ et de *(ii)* on déduit que $\boxtimes(R) = 0$ si $\boxtimes(R)f = 0$. Or $\boxtimes(R)df = i(R)d^2f + (-1)^r d\, i(R)f = 0$; par conséquent $\boxtimes \langle A_F(\mathfrak{X}) \rangle$ est $\mathfrak{D}$-complet.

(iii) est aussi vrai; en effet

$$\langle \mathfrak{X}_{(r)}, \psi_{\mathfrak{X},\,\Omega_K}(\boxtimes(R)) \rangle f = \langle \mathfrak{X}_{(r)}, \boxtimes(R)f \rangle = \langle \mathfrak{X}_{(r)}, i(R)df \rangle = \\ = \langle \mathfrak{X}_{(r)}, R \rangle f,$$

c'est-à-dire $\psi_{\mathfrak{X},\,\Omega_K}(\boxtimes(R)) = R$;

$$\langle \mathfrak{X}_{(r)}, \mu_{\mathfrak{X}, \Omega_K}(i(R)) \rangle f = \langle \mathfrak{X}_{(r)}, [i(R), d] f \rangle = \langle \mathfrak{X}_{(r)}, i(R) df \rangle$$
$$= \langle \mathfrak{X}_{(r)}, R \rangle f,$$

c'est-à-dire $\mu_{\mathfrak{X}, \Omega_K}(i(R)) = R$.

Montrons (iv).

$$\langle \mathfrak{X}_{(r)}, \boxtimes(\psi_{\mathfrak{X}, \Omega_K}(D)) f \rangle = \langle \mathfrak{X}_{(r)}, i(\psi_{\mathfrak{X}, \Omega_K}(D)) df \rangle$$
$$= \langle \mathfrak{X}_{(r)}, \psi_{\mathfrak{X}, \Omega_K}(D) \rangle f = \langle \mathfrak{X}_{(r)}, Df \rangle \ ;$$

$$\langle \mathfrak{X}_{(r)}, i(\mu_{\mathfrak{X}, \Omega_K}(D)) df \rangle = \langle \mathfrak{X}_{(r)}, \mu_{\mathfrak{X}, \Omega_K}(D) \rangle f = \langle \mathfrak{X}_{(r)}, [D, d] f \rangle .$$

II. Les démonstrations de (v) et (vi) sont analogues aux démonstrations de (iii) et (iv).

On dira qu'un couple $(\Omega_K, \mathfrak{X})$ est une *structure ("presque") (K, F)-différentiable* si $(\Omega_K, \mathfrak{X})$ vérifie les ("trois premiers") axiomes suivants :

$SD\,1)$. $\mathfrak{X}$ est un sous-espace d'Elie Cartan de $\mathfrak{D}_K(F)$;

$SD\,2)$. Ω_K est une algèbre différentielle extérieure sur $\mathfrak{X}$;

$SD\,3)$. $\mathfrak{D}gr_K(\Omega_K)$ est $\mathfrak{D}$- complet et $\psi_{\mathfrak{X}}$- complet;

$SD\,4)$. $\tilde{\mathcal{C}}_K(F, \Omega_K)$ est $\tilde{\psi}_{\mathfrak{X}}$- complet;

On dira que $D \in \overset{r}{\mathfrak{D}}gr_K(\Omega_K)$ est une dérivation *extérieure* (resp. intérieure) si $[D, d] = 0$ (resp. $D \langle F \rangle = 0$). On note $\overset{r}{\Phi} ext(\Omega_K)$ (resp. $\overset{r}{\Phi} int(\Omega_K)$) le sous-module de $\overset{r}{\mathfrak{D}}gr_K(\Omega_K)$ constitué par les dérivations $D \in \overset{r}{\mathfrak{D}}gr_K(\Omega_K)$ extérieures (resp. intérieures) de Ω_K. Munis du crochet de deux dérivations, les K- modules

$$\Phi\, ext(\Omega_K) = \bigoplus_{r \in Z} \overset{r}{\Phi} ext(\Omega_K)$$

et

$$\Phi\, int(\Omega_K) = \bigoplus_{r \in Z} \overset{r}{\Phi} int(\Omega_K)$$

sont des K- algèbres de Lie graduées.

De (vi) du théorème 16. 1 il résulte :

PROPOSITION 16.2. *Soit $\mathfrak{X}$ un sous-espace d'Elie Cartan de $\mathfrak{D}_K(F)$ et Ω_K une algèbre différentielle extérieure sur $\mathfrak{X}$. Si $\tilde{\mathcal{C}}_K(F, \Omega_K)$ est $\tilde{\psi}_{\mathfrak{X}}$- complet, alors la suite*

$$(16.9) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & \overset{r}{\Phi} int_K(\Omega_K) & \longrightarrow & \overset{r}{\mathfrak{D}}gr_K(\Omega_K) & \longrightarrow & {}^r\tilde{\mathcal{C}}_K(F, \Omega_K) & \longrightarrow 0 \\ & D & \longmapsto & D & \longmapsto & D \mid F & \end{array}$$

est exacte.

LEMME 16.3. *Soit $(\Omega_K, \mathfrak{X})$ une structure presque (K, F)- différentiable. Alors*

(j) Si $D \in \overset{r}{\Phi} ext(\Omega_K)$, $R \in A_F^r(\mathfrak{X})$ et $i(R) df = Df$, alors $D = \boxtimes(R)$;

(jj) Si $D \in \overset{r-1}{\Phi} int(\Omega_K)$, $R \in A_F^r(\mathfrak{X})$ et $i(R) df = Ddf$, alors $D = i(R)$.

DEMONSTRATION. En effet, $D - \boxtimes(R)$ et $D - i(R)$ s'annulent sur F et sur $d\langle F\rangle$, donc $D = \boxtimes(R)$ et $D = i(R)$ puisque $\mathfrak{D}gr_K(\Omega_K)$ est $\psi\mathfrak{X}$- complet.

THEOREME 16. 2. *Soit $(\Omega_K, \mathfrak{X})$ une structure presque (K, F)- différentiable.*

(jjj). Si $D \in \overset{r}{\Phi} ext(\Omega_K)$, alors il existe un seul élément $R \in A^r_F(\mathfrak{X})$ tel que $\boxtimes(R) = D$, c'est-à-dire

$$\overset{r}{\Phi} ext(\Omega_K) = \boxtimes\langle A^r_F(\mathfrak{X})\rangle ;$$

par conséquent la contraction de $\boxtimes$ à $(A_F(\mathfrak{X}), \Phi\, ext(\Omega_K))$ est un isomorphisme gradué de K - algèbres de Lie;

(jv). Si $D \in \overset{r-1}{\Phi} int(\Omega_K)$, alors il existe un seul élément $R \in A^r_F(\mathfrak{X})$ tel que $i(R) = D$, c'est-à-dire

$$\overset{r-1}{\Phi} int(\Omega_K) = i\langle A^r_F(\mathfrak{X})\rangle ;$$

par conséquent la contraction de i à $(A_F(\mathfrak{X}), \Phi\, int(\Omega_K))$ est un F - isomorphisme gradué de degré -1.

DEMONSTRATION. Soit $D \in \overset{r}{\Phi} ext(\Omega_K)$; en vertu de *(iv)* du théorème 16.1 il existe $R \in A^r_F(\mathfrak{X})$ tel que

$$\boxtimes(R)f = i(R)df = Df,\ R = \psi_{\mathfrak{X},\,\Omega_K}(D);$$

mais $[D, d] = 0$, donc $D = \boxtimes(R)$ à cause de *(j)*. Or $\mathfrak{X}$ étant sans courbure de la théorème 15.4 il résulte que $\boxtimes$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Soit $D \in \overset{r-1}{\Phi} int(\Omega_K)$; en vertu de *(iv)* du théorème 16.1 il existe $R \in A^r_F(\mathfrak{X})$ tel que

$$i(R)df = [D, d]f,\ R = \mu_{\mathfrak{X},\,\Omega_K}(D),$$

mais $D \mid F = 0$, donc $D = i(R)$ en tenant compte de *(jj)*.

THEOREME 16.3. *Soit $(\Omega_K, \mathfrak{X})$ une structure presque (K, F)- différentiable. Pour tout $D \in \overset{r}{\mathfrak{D}}gr_K(\Omega_K)$ on a*

$$D = \boxtimes(\psi_{\mathfrak{X},\,\Omega_K}(D)) + i(\psi_{\mathfrak{X},\,\Omega_K}([D, d])); \tag{16.10}$$

d'une façon plus précise $\boxtimes \circ \psi_{\mathfrak{X},\,\Omega_K}$ et $i \circ \psi_{\mathfrak{X},\,\Omega_K}$ sont des projecteurs supplémentaires sur $\mathfrak{D}gr_K(\Omega_K)$, c'est-à-dire

$$\mathfrak{D}gr_K(\Omega_K) = \Phi\, ext(\Omega_K) \oplus \Phi\, int(\Omega_K). \tag{16.11}$$

DEMONSTRATION. En vertu de *(iv)* du théorème 16.1 pour tout $f \in F$, on a

$$Df = \boxtimes(\psi_{\mathfrak{X},\,\Omega_K}(D))f.$$

Or

$$\boxtimes(\psi_{\mathfrak{X}},\Omega_K(D))df = i(\psi_{\mathfrak{X}},\Omega_K(D))d^2 f + (-1)^r d\, i(\psi_{\mathfrak{X}},\Omega_K(D))df$$
$$= (-1)^r d\, \boxtimes(\psi_{\mathfrak{X}},\Omega_K(D))f$$
$$= (-1)^r d\, D f$$

et

$$\langle \mathfrak{X}_{(r)}, i(\psi_{\mathfrak{X}},\Omega_K([D,d]))df\rangle = \langle \langle \mathfrak{X}_{(r)}, \psi_{\mathfrak{X}},\Omega_K([D,d])\rangle, df\rangle$$
$$= \langle \mathfrak{X}_{(r)}, \psi_{\mathfrak{X}},\Omega_K([D,d])\rangle f$$
$$= \langle \mathfrak{X}_{(r)}, [D,d]\rangle f,$$

donc

$$i(\psi_{\mathfrak{X}},\Omega_K([D,d]))df = D\,df - (-1)^r dDf.$$

Par conséquent les deux membres de *(16.10)* coïncident aussi sur $d\langle F\rangle$. Donc, puisque $\mathfrak{D}gr_K(\Omega_K)$ est $\mathfrak{D}$- complet, l'identité *(16.10)* est vraie.

Montrons l'unicité de la décomposition *(16.10)*. Supposons que $D = D_1 + D_2$ où $D_1 \in \Phi\, ext\,(\Omega_K)$ et $D_2 \in \Phi\, int\,(\Omega_K)$. Alors

$$(D_1 - \boxtimes(\psi_{\mathfrak{X}},\Omega_K(D)))f = 0 = D_1 - i(\psi_{\mathfrak{X}},\Omega_K(D))df,$$

donc $D_1 = \boxtimes(\psi_{\mathfrak{X}},\Omega_K(D))$ en vertu de *(j)* du lemme 16.3. Par conséquent

$$(D_2 - i(\psi_{\mathfrak{X}},\Omega_K([D,d]))df = 0,$$

donc $D_2 = i(\psi_{\mathfrak{X}},\Omega_K([D,d])$ à cause de *(jj)* du lemme 16.3.

LEMME 16.4. *Soit* $(\Omega_K,\mathfrak{X})$ *une structure* (K,F)*-différentiable. Alors l'application*

$$D \in \overset{r}{\Phi} ext\,(\Omega_K) \to D \mid F \in {}^r\tilde{\mathcal{C}}(F,\Omega_K)$$

est un isomorphisme dont l'isomorphisme inverse est $\boxtimes \circ \tilde{\psi}_{\mathfrak{X}}$.

De la proposition 16.2, du théorème 16.3 et du lemme 16.4 il résulte :

THEOREME 16.4. *Soit* $(\Omega_K,\mathfrak{X})$ *une structure* (K,F)*- différentiable. Alors la suite exacte (16.9) est scindée.*

On dira qu'un sous-espace d'Elie Cartan $\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{D}_K(F)$ est $\psi_{\mathfrak{X}}$*-complet* resp. $\tilde{\psi}_{\mathfrak{X}}$*-complet* si $\mathfrak{D}gr_K(A_F(\mathfrak{X},F))$ est $\psi_{\mathfrak{X}}$-complet, resp. $\tilde{\mathcal{C}}_K(F, A_F(\mathfrak{X},F))$ est $\psi_{\mathfrak{X}}$- complet.

LEMME 16.5. *Soit* Ω_K *une algèbre différentielle extérieure sur un sous-espace d'Elie Cartan* $\mathfrak{X}$ *de* $\mathfrak{D}_K(F)$ *qui soit* $\psi_{\mathfrak{X}}$*-complet (resp.* $\tilde{\psi}_{\mathfrak{X}}$*-complet); alors la sous-algèbre graduée* Ω_K *de* $\tilde{\Omega}_K$ *engendrée par* F *et* $d\langle F\rangle$ *est une algèbre différentielle extérieure* $\mathfrak{D}$*-complète et* $\psi_{\mathfrak{X}}$*- complète (resp.* $\tilde{\psi}_{\mathfrak{X}}$*-complète).*

On note $\dot{\Omega}_K(F)$ la sous-algèbre graduée de $\Lambda_F(\mathfrak{X}^*)$ engendrée par F et $d\langle F\rangle$. On dit que $\dot{\Omega}_K(F)$ est *l'algèbre des formes différentielles extérieures* sous-jacente à la K-algèbre F.

LEMME 16.6. *$(\dot{\Omega}_K(F), \mathfrak{D}_K(F))$ est une structure (K, F)-différentiable.*

Des théorèmes 16.3, 16.4 et du lemme 16.6 il résulte le théorème de Frölicher-Nijenhuis [18], Nijenhuis [33] :

COROLLAIRE 16.2. *Soit F une algèbre commutative unitaire sur l'anneau commutatif unitaire K. Alors*

$$\mathfrak{D}gr_K(\Omega_K) = \Phi\ ext\,(\dot{\Omega}_K(F)) \oplus \Phi\ int_K(\dot{\Omega}_K(F)),$$

l'application K-linéaire graduée

$$\boxtimes : A_F(\mathfrak{X}) \to \Phi\ ext\,(\dot{\Omega}_K(F))$$

est un isomorphisme qui permet de définir une structure de K-algèbre de Lie graduée sur $A_F(\mathfrak{X})$, isomorphe à la structure de K-algèbre de Lie graduée sur $\Phi\ ext\,(\dot{\Omega}_K(F))$ définie au moyen du crochet de deux K-dérivations graduées. L'application F-linéaire graduée de degré -1

$$i\ : A_F(\mathfrak{X}) \to \Phi\ int_K(\dot{\Omega}_K(F))$$

est un isomorphisme.

REMARQUE 16.1. Soit $(\Omega_K; \mathfrak{X})$ une structure (K, F)-différentiable. Si l'on pose $\mathfrak{T}(\mathfrak{X}, V) = \mathfrak{U}(\Omega_K, \Lambda_F(V))$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}, V) = \mathfrak{U}(\Omega_K, \otimes_F(V))$ et si $(D^*, d) \in \Gamma_K(V, \mathfrak{X})$, $d \in {}^1\mathcal{C}_K(F, \Omega_K)$, alors du théorème 16.4 il résulte que les conclusions I, II du théorème 5.1 sont valables pour ces nouvelles K-algèbres bigraduées.

17. Espaces d'Elie Cartan coordonnées.

Dans ce paragraphe $\mathfrak{X}$ et V désignent des espaces (K, F)-linéaires F-libres de dimensions finies. En vertu de ces hypothèses on a les isomorphismes canoniques

$$A_F^q(\mathfrak{X}, V) \approx A_F^q(\mathfrak{X}^*) \otimes_F V \approx (\Lambda_F^q(\mathfrak{X}^*)) \wedge V$$

et $\Lambda_F(\mathfrak{X}^*) = A_F(\mathfrak{X}, F)$, où $\mathfrak{X}^* = Hom_F(\mathfrak{X}, F)$.

PROPOSITION 17.1. *i établit un F-isomorphisme de $A_F^r(\mathfrak{X})$ sur l'ensemble des $D \in \mathfrak{D}gr_K^r(\Lambda_F(\mathfrak{X}^*))$ intérieures, $D\langle F\rangle = 0$, c'est-à-dire, il existe un seul $R \in A_F^r(\mathfrak{X})$ tel que*

$$i(R) = D.$$

DEMONSTRATION. En effet, soit $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \subset \mathfrak{X}$ une F-base et $\{\sigma^1, \ldots, \sigma^n\}$ sa F-base duale. Si l'on pose

$$R = \Sigma\,(D\sigma^i) \wedge \sigma_i,$$

alors $i(R)\sigma^j = D\sigma^j$; en effet

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{X}_{(r)}, i(R)\sigma^j \rangle &= \langle \langle \mathfrak{X}_{(r)}, R \rangle, \sigma^j \rangle \\ &= \langle \sum_i \langle \mathfrak{X}_{(r)}, D\sigma^i \langle \sigma_i, \sigma^j \rangle \\ &= \langle \mathfrak{X}_{(r)}, D\sigma^i \rangle ;\end{aligned}$$

or $\Lambda_F(\mathfrak{X}^*)$ est F- polynomiale, donc $i(R) = D$, à cause du corollaire 0.5.

THEOREME 17.1. *Soit $(\mathfrak{X},(ad,\rho_D))$ un (K,F)- pré- espace d'Elie Cartan régulier coordonné, c'est-à-dire il existe $\{x^1,\dots,x^n\} \subset F$ tel que $\{dx^1,\dots,dx^n\}$ soit une F- base de $\mathfrak{X}^*$. Alors $(\mathfrak{X},(ad,\rho_D))$ est un espace d'Elie Cartan sans courbure et ρ_D est un isomorphisme d'espaces d'Elie Cartan de $\mathfrak{X}$ sur un sous-espace d'Elie Cartan $\hat{\mathfrak{X}}$ de $\mathfrak{D}_K(F)$.*

DEMONSTRATION. ρ_D est injective; en effet, supposons que $\rho_D(X) = 0$, alors

$$\rho_D(X)x^i = \langle X, dx^i \rangle = 0 \quad \text{pour } i = 1,\dots,n,$$

donc $X = 0$. Or $\mathfrak{X}$ étant F- libre, il est F- fidèle, donc $\mathfrak{X}$ est un espace d'Elie Cartan sans courbure en vertu de la proposition 11. 2.

Dans la suite on identifiera $\mathfrak{X}$ à son image par ρ_D.

LEMME 17.1. *Soit $(\mathfrak{X},(ad,\rho_D))$ un espace d'Elie Cartan régulier et coordonné. Alors $(\Lambda_F(\mathfrak{X}^*), \mathfrak{X})$ est une structure (K,F)- différentiable.*

REMARQUE 17. 1. Si $\mathfrak{D}_K(F)$ est coordonnée, alors

$$\dot{\Omega}_K(F) = \Lambda_F(\mathfrak{D}_K(F)) = A_F(\mathfrak{D}_K(F), F).$$

Pour ces structures on peut alors appliquer tous les résultats du § 16.

Dans la suite on supposera que $\mathfrak{X} = \mathfrak{D}_K(F)$ et que $\mathfrak{X}$ soit d- coordonné.

Soit V un autre espace (K, F)- linéaire et F- libre de dimension finie. On identifiera $A^q_F(\mathfrak{X}, V)$ à $A^q_F(\mathfrak{X}^*) \otimes_F V = (\Lambda^q_F(\mathfrak{X}^*)) \wedge V$.

Si $\omega \in A^q_F(\mathfrak{X},V)$ et si $\{e_1,\dots,e_N\}$ est une base de V, alors

$$\omega = \sum_{I_q,\alpha} A^\alpha_I dx^I \wedge e_\alpha,\ dx^I = dx^{i_1} \wedge\dots\wedge dx^{i_j},\ 1 \le \alpha \le N.$$

En vertu de la proposition 7.1, du lemme 7.1 et du corollaire 7. 1, on identifiera $\mathfrak{T}_K(V)$ à $\hat{\mathfrak{T}}_K(V)$ et on notera D_T l'unique élément de $\mathfrak{D}_K(F)$ sous-jacent à $T \in \mathfrak{T}_K(V)$. Comme $\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V)$ est aussi libre et de dimension finie, on identifiera $\mathfrak{T}gr_K(\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V))$ à $\hat{\mathfrak{T}}gr_K(\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V))$. Les t.i.g. T de $\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V)$ de degré t sont caractérisées par leurs comportements sur F et V; en effet, dans ce cas

$$T\omega = \sum_{I,\alpha} \{ (D_T A_I^\alpha) dx^I + (-1)^t A_I^\alpha d D_T x^I \} \wedge e_\alpha +$$
$$+ \sum_{I,\alpha} A_I dx^I \wedge (T e_\alpha), \text{ où } I = (I_q).$$

Une t.i.g. T de l'espace $(K, \Lambda_F(\mathfrak{X}^*))$-linéaire gradué $\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V)$ est appelée *extérieure* si $[D_T, d] = 0$.

Soit (V, ρ_I) un espace $\mathfrak{X}$-infinitésimal. On a :

a. θ est la seule application K-linéaire de $\mathfrak{X}$ dans $\overset{o}{\mathfrak{T}}gr_K(\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V))$ telle que pour tout $X \in \mathfrak{X}$, $\theta(X)$ soit extérieure, $\theta(X)f = (\rho_D(X))f$ et $\theta(X)v = \rho_I(X)v$ pour tout $f \in F$ et tout $v \in V$.

b. $d\omega = \sum_{I,\alpha} \{ (dA_I^\alpha) \wedge dx^I \wedge e_\alpha + (-1)^q A_I^\alpha dx^I \wedge de_\alpha \}$, où $I = (I_q)$.

c. d est l'unique élément de $\overset{1}{\mathfrak{T}}gr_K(\tilde{A}_F(\mathfrak{X}, V))$ tel que $d_T = d$ et $(dv)(X) = (\rho_I(X))v$.

Dans les espaces infinitésimaux sur les espaces d'Elie Cartan réguliers et coordonnés on peut expliciter $d\omega$, $\boxtimes(R)\omega$, $D_\diamondsuit\omega$, $\nabla(X)\omega$, $[R, S]$ au moyen de bases $(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge e_\alpha \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n,\ 1 \leq \alpha \leq N)$. En particulier, quand on explicite ces t.i.g. sur les espaces d'Elie Cartan réguliers et coordonnés on obtient les identités bien connues qui permettent de définir la dérivation extérieure, la dérivée de Lie, la dérivée absolue, la dérivée covariante. Pour cela voir par exemple [16], [25], [32], [40] et [43]. On peut présenter dans le contexte de la théorie ici exposée le « Calcul différentiel intérieur » de Kähler [25].

Soit $\{e^1, \ldots, e^N\}$ la base duale de $\{e_1, \ldots, e_N\}$. Si l'on pose

$$\omega_\beta^\alpha : X \in \mathfrak{X} \to -e^\alpha(\nabla(X) e_\beta) \in F \quad \text{pour } \alpha, \beta = 1, \ldots, N,$$

alors

$$e^\alpha(\nabla(X)v) = X(e^\alpha(v)) - \sum_\beta e^\beta(v)\omega_\beta^\alpha(X).$$

Or $\nabla(X)v = \sum_\alpha e^\alpha(\nabla(X)v)e_\alpha$, donc

$$\Omega_\nabla(X, Y)(v) = \sum \{ (-d\omega_\beta^\alpha + \omega_\nu^\alpha \wedge \omega_\beta^\nu)(X, Y)e^\beta(v) \} e_\alpha$$

et la forme de courbure Ω_∇ est essentiellement caractérisée par

$$\Omega_\beta^\alpha = -d\omega_\beta^\alpha + \sum \omega_\nu^\alpha \wedge \omega_\beta^\nu = \sum_{\lambda<\mu} R_{\beta,\lambda\mu}^\alpha e^\lambda \wedge e^\mu, \qquad 1 \leq \alpha, \beta \leq N.$$

Si $\mathfrak{X} = V$, alors

$$T_\nabla(X, Y) = \sum \{ (de^\alpha)(X, Y) - \omega_\beta^\alpha \wedge e^\beta(X, Y) \} e_\alpha$$

et la forme de torsion T_∇ est essentiellement caractérisée par

$$\tau^\alpha = de^\alpha - \sum \omega_\beta^\alpha \wedge e^\beta = \sum_{\beta<\gamma} S_{\beta\gamma}^\alpha e^\beta \wedge e^\gamma, \qquad 1 \leq \alpha \leq N.$$

CHAPITRE III

APPLICATIONS

Dans tout ce chapitre par F on désignera toujours une algèbre commutative possèdant une unité sur un anneau commutatif K unitaire. Dans les §18 et 19 par $\mathfrak{X}$ on notera un ensemble muni d'une structure de (K, F)-espace d'Elie Cartan régulier et sans courbure $(\mathfrak{X}, (ad, \rho_D))$ fixé d'avance. Si $X \in \mathfrak{X}$ et $f \in F$ on écrira brièvement $Xf = \rho_D(X)f$. On note $\mathfrak{X}^* = Hom_F(\mathfrak{X}, F)$.

18. J - Structures.

Soit $J \in End_F(\mathfrak{X})$. On peut appliquer à J toutes les définitions et tous les résultats des paragraphes 14 et 15. On a les formules

$$\rho_J(X)f = (JX)f,$$
$$[X, Y]_J = (ad_J X)Y = [JX, Y] + [X, JY] - J[X, Y],$$
$$\mathfrak{N}_J(X,Y) = [JX, JY] - J[X, Y]_J,$$
$$\mathfrak{J}_J(X, Y, Z) = \sum_{Cyc} [[X, Y]_J, Z]_J,$$
$$\mathfrak{J}_J(X, Y, Z) + \sum_{Cyc} \{[\mathfrak{N}_J(X, Y), Z] + \mathfrak{N}_J([X, Y], Z)\} = 0,$$

où $X, Y, Z \in \mathfrak{X}$. On dit que $\mathfrak{N}_J \in A^2_F(\mathfrak{X})$ est la *forme de torsion* et $\mathfrak{J}_J \in A^3_F(\mathfrak{X})$ la *forme de Jacobi*. On appellera $(\mathfrak{X}, (ad_J, \rho_J))$ le pré-espace d'Elie Cartan *associée* à J. La dérivée extérieure resp. la représentation infinitésimale de Lie sous-jacente à ce pré-espace d'Elie Cartan sera notée d_J, resp. θ_J. Du §10 il résulte les formules fondamentales :

$$\theta_J(X) = [d_J, i(X)], \quad i([X, Y]_J) = [\theta_J(X), i(Y)] \quad .$$
$$\langle \mathfrak{X}_{(q)}, \theta_J(X)\omega \rangle = X \langle \mathfrak{X}_{(q)}, \omega \rangle + \sum (-1)^{j+1} \langle [X, X_j]_J \wedge \mathfrak{X}^{\hat{j}}_{(q)}, \omega \rangle$$
$$\langle \mathfrak{X}_{(q+1)}, d_J\,\omega \rangle = \sum (-1)^{j+1} X_j \langle \mathfrak{X}^{\hat{j}}_{(q)}, \omega \rangle - \sum (-1)^{i+j+1} \langle [X_i, X_j]_J \wedge \mathfrak{X}^{\hat{i}\hat{j}}_{(q)}, \omega \rangle$$

Avec les notations du paragraphe 15 on a

$$\mathfrak{N}_J(X, Y) = [J, J](X, Y) = (\theta_J(X)J)Y - (\theta(X)J)JY.$$
$$= \{\theta(JX)J\}Y - J\{\theta(X)J\}Y.$$

$$d_J = \boxtimes(J), \qquad 2\,d_J^2 = \boxtimes(\mathfrak{N}_J).$$

LEMME 18.1. *La formule ci-dessous donne une liaison entre la forme de courbure du pré-espace d'Elie Cartan* $(\mathfrak{X}, (ad_J, \rho_J))$ *et la forme de torsion de* J *la relation :*

$$\Omega_{\rho_J}(X, Y)f = \mathfrak{N}_J(X, Y)f.$$

Par conséquent si $\mathfrak{X}$ *est un sous-espace d'Elie Cartan de* $\mathfrak{D}_K(F)$, *alors* $(\mathfrak{X}, (ad_J, \rho_J))$ *est sans courbure si, et seulement si,* $\mathfrak{N}_J = 0$.

DEMONSTRATION.

$$\begin{aligned}\Omega_{\rho_J}(X, Y)f &= [\rho_J(X), \rho_J(Y)]f - \rho_J([X, Y]_J)f \\ &= [JX, JY]f - J[X, Y]_J f = \mathfrak{N}_J(X, Y)f.\end{aligned}$$

THEOREME 18.1. *Soit* $J \in End_F(\mathfrak{X})$. *Si*

Io. $\mathfrak{N}_J = 0$,

alors

Ia. $\Omega_{\rho_J} = 0$;

Ib. $[\theta_J(X), \theta_J(Y)] = \theta_J([X, Y]_J)$;

Ic. $[\theta_J(X), d_J] = 0$;

Id. $d_J^2 = 0$.

Si de plus $\mathfrak{X} = \mathfrak{D}_K(F)$, *alors les conditions Io, Ia, ..., Id sont équivalentes.*

DEMONSTRATION. *Io* $\Longrightarrow$ *Ia, Ib, Ic, Id* est conséquence du corollaire 11.2, du théorème 14.1 et du lemme 18.1. Si $\mathfrak{X} = \mathfrak{D}_K(F)$, alors *Ia* $\Longrightarrow$ *Io*, en vertu du lemme 18.1 et *Ia*, . . ., *Id* sont équivalentes à cause du corollaire 11.2.

La dérivation d_J^2 de degré 2 est appellée la *dérivée torsionelle* associée à J (voir [42], [43]).

LEMME 18.2. *Soit* $J \in GL_F(\mathfrak{X})$. *Si* $\omega \in A_F^q(\mathfrak{X}, F)$, $q \geq 1$, *on pose*

$$\langle X_1 \wedge \dots \wedge X_q, J * \omega\rangle = \langle JX_1 \wedge \dots \wedge JX_q, \omega\rangle,$$

$$d_J^{\#}\omega = J*(d\overset{-1}{J}*\omega)$$

$$(d_J^{\#}f)X = (JX)f,$$

alors

$$d_J^{\#}\omega = d_J - i(\overset{-1}{J} \circ \mathfrak{N}_J).$$

Par conséquent $d_J^{\#} \in \mathfrak{D}\overset{1}{g}r_K(A_F(\mathfrak{X}, F))$. *De plus* $(d_J^{\#})^2 = 0$.

DEMONSTRATION. En effet,

$$\begin{aligned}\langle X_1 \wedge \dots \wedge X_{q+1}, d_J^{\#}\omega\rangle &= \langle JX_1 \wedge \dots \wedge JX_{q+1}, d(\overset{-1}{J}*\omega)\rangle \\ &= \Sigma(-1)^{j+1}(JX_j)\langle JX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{JX_j} \wedge \dots \wedge JX_{q+1}, \overset{-1}{J}*\omega\rangle +\end{aligned}$$

$$- \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} \langle [JX_i, JX_j] \wedge JX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{JX}_i \wedge \cdots \wedge \widehat{JX}_j \wedge \cdots \wedge JX_{q+1}, \overset{-1}{J} \# \omega \rangle$$

$$= \Sigma (-1)^{j+1} (JX_j) \langle X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_j \wedge \cdots \wedge X_{q+1}, \omega \rangle +$$

$$- \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} \langle \overset{-1}{J} [JX_i, J_J X] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_i \wedge \cdots \wedge \hat{X}_j \wedge \cdots \wedge X_{q+1}, \omega \rangle ;$$

or $[JX, JY] = J([X, Y]_J) + \mathfrak{N}_J(X, Y)$, donc

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{X}_{(q+1)}, d_J^{\#}\omega \rangle &= \Sigma (-1)^{j+1} (JX_j) \langle \mathfrak{X}^{\hat{j}}_{(q+1)}, \omega \rangle \\ &- \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} \langle [X_i, X_j]_J \wedge \mathfrak{X}^{\hat{i}\hat{j}}_{(q+1)}, \omega \rangle \\ &- \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} \langle \overset{-1}{J} \mathfrak{N}_J (X_i, X_j) \wedge \mathfrak{X}^{\hat{i}\hat{j}}_{(q+1)}, \omega \rangle \\ &= \langle \mathfrak{X}_{(q+1)}, d_J \omega \rangle - \langle \mathfrak{X}_{(q+1)}, i(\overset{-1}{J} \circ \mathfrak{N}_J) \omega \rangle . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d_J^{\#}\omega)^2 &= J\#(d(\overset{-1}{J}\#(J\#(d(\overset{-1}{J}\#\omega)) \\ &= J\#(d^2(\overset{-1}{J}\#\omega)) = 0 . \end{aligned}$$

THEOREME 18.2. *Soit $J \in GL_F(\mathfrak{X})$. Si $\mathfrak{N}_J = 0$, alors*

Ie. $$d_J^{\#} d + d d_J^{\#} = 0 .$$

Si de plus $\mathfrak{X} = \mathfrak{D}_K(F)$, alors Ie est équivalent à chacune des conditions Io, Ia,..., Id.

DEMONSTRATION. Si $\mathfrak{N}_J = 0$, alors $d_J^{\#} = d_J$, en vertu de la formule du lemme 18.2, donc *Ie* est vraie puisque $[d_J, d] = 0$. Supposons $\mathfrak{X} = \mathfrak{D}_K(F)$ et supposons que $(\Omega_K, \mathfrak{X})$ soit une structure (K, F)-différentiable. Si *Ie* est vraie, alors $d_J^{\#} = d_J$. Mais $2d_J^2 = \boxtimes(\mathfrak{N}_J) = 0$ et $\boxtimes$ est injective, donc $\mathfrak{N}_J = 0$.

Sur l'espace d'Elie Cartan $\mathfrak{D}_R(\mathfrak{F}^\infty)$ des C^∞-champs de vecteurs d'une C^∞-variété, pour J tel que $J^2 = -1_{\mathfrak{D}_R(\mathfrak{F}^\infty)}$, l'équivalence de *Io* et *Ie* a été établie par Guggenheimer [20], pour $J \in GL_F(\mathfrak{D}_R(\mathfrak{F}^\infty))$ arbitraire l'équivalence de *Io* et *Ie* a été établie par Willmore [44]. Pour $J \in End_F(\mathfrak{D}_R(\mathfrak{F}^\infty))$ l'équivalence de *Io* et *Id* a été établie par Frölicher-Nijenhuis [19].

LEMME 18.3. *Soit $J \in End_F(\mathfrak{X})$. Si ∇ est une connexion linéaire $\mathfrak{J}$-régulière sur $\mathfrak{X}$, alors*

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_J(X, Y) = \{\nabla(JX)J\} Y - J\{\nabla(X)J\} Y \\ - \{\nabla(JY)J\} X + J\{(\nabla Y)J\} X \\ - T_\nabla(JX, JY) + J(T_\nabla(JX, Y)) \\ + J(T_\nabla(X, JY)) - J^2 T_\nabla(X, Y). \end{aligned}$$

DEMONSTRATION. En tenant compte des formules

$$[X, Y] = \nabla(X)Y - \nabla(Y)X - T_\nabla(X, Y)$$

$$\{\nabla(X)J\}\, Y = \nabla(X)(JY) - J(\nabla(X)Y)$$

dans la formule

$$\mathfrak{N}_J(X,\ Y) = [JX, JY] - J[JX,\ Y] - J[X, JY] + J^2[X, Y],$$

on obtient la formule du lemme.

REMARQUE 18.1. Soit $\mathfrak{X} = \mathfrak{D}_K(F)$. D'après le corollaire 16.2, la donnée d'un élément $J \in End_F(\mathfrak{X})$ équivaut à la donnée d'une dérivation extérieure $d_J \in \mathfrak{D}gr^1_K(A_F(\mathfrak{X}, F))$ (i.e. $d_J \in \mathfrak{D}gr^1_K(\Omega_K(F)),\ [d, d_J] = 0$).

19. Structures presque hor-symplectiques.

Soit $\mathfrak{X}'$ un sous-espace $(K,\ F)$-linéaire de $\mathfrak{X}$. On note

$$(\mathfrak{X}')^\star = \{\ \omega \mid \omega \in \mathfrak{X}^* \text{ et } \mathfrak{X}' \subset Ker\ \omega\ \},$$

$$F(\mathfrak{X}') = \{\ f \mid f \in F \text{ et } df \in (\mathfrak{X}')^\star\} = d^{-1}\langle(\mathfrak{X}')^\star\rangle$$

$$= \{f \mid f \in F \text{ et } Xf = 0\ \ \forall\ X \in \mathfrak{X}'\}.$$

On dira qu'un élément $X \in \mathfrak{X}$ est $\mathfrak{X}'$-*caractéristique* ou encore qu'il laisse $\mathfrak{X}$ *invariant* si $[X, \mathfrak{X}'] \subset \mathfrak{X}'$, c'est-à-dire si $\theta(X)$ laisse stable le sous-espace (K, F)-linéaire $(\mathfrak{X}')^\star$ de $\mathfrak{X}^*$. On note $C(\mathfrak{X}')$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{X}$ qui sont $\mathfrak{X}'$-caractéristiques. $C(\mathfrak{X}')$ est une sous-K-algèbre de Lie de $\mathfrak{X}$. On dira que $\mathfrak{X}'$ est *d-complet* si

$$\mathfrak{X}' = \bigcap_{f \in F(\mathfrak{X}')} Ker\ df.$$

PROPOSITION 19.1. *Soit $\mathfrak{X}'$ un sous-espace $(K,\ F)$-linéaire de $\mathfrak{X}'$. Alors*

(i) Si $\mathfrak{X}'$ est d-complet, alors $\mathfrak{X}'$ est une sous-K-algèbre de Lie;

(ii) Si $d\ \langle F(\mathfrak{X}')\rangle$ F-engendre $(\mathfrak{X}')^\star$, alors $\mathfrak{X}'$ est d-complet si, et seulement si, $\mathfrak{X}' = (\mathfrak{X}')^{\star\star}$.

DEMONSTRATION. *(i)* Soient $X, Y \in \mathfrak{X}'$. Alors

$$[X, Y]\, f = XYf - YXf = 0 \text{ pour tout } f \in F(\mathfrak{X}').$$

(ii) Si $X \in \mathfrak{X}$, alors $X \in \bigcap_{f \in F(\mathfrak{X}')} Ker df$ si, et seulement si, $X \in (\mathfrak{X}')^{\star\star}$.

Soit $\omega \in \mathfrak{X}^\star_V$. Or $d\ \langle F(\mathfrak{X}')\rangle$ F-engendre $(\mathfrak{X}')^\star$, donc $\omega = \sum_{i \in I} a_i df^i$. Par conséquent si $X \in \bigcap_{f \in F(\mathfrak{X}')} Ker df$, alors $X \in (\mathfrak{X}')^{\star\star} \subset \mathfrak{X}'$. Si $X \in (\mathfrak{X}')^{\star\star}$, alors

$$X \in \bigcap_{f \in F(\mathfrak{X}')} Ker\ df \subset \mathfrak{X}'.$$

PROPOSITION 19.2. *Soit $\mathfrak{X}'$ un sous-espace (K, F)-linéaire de $\mathfrak{X}$.*

(j) Si $X \in C(\mathfrak{X}')$, alors X laisse $F(\mathfrak{X}')$ stable, $X\ \langle F(\mathfrak{X}')\rangle \subset F(\mathfrak{X}')$.

(jj) Si $\mathfrak{X}'$ *est d-complet et* $X \in \mathfrak{X}$, *alors* $X \in C(\mathfrak{X}')$ *si, et seulement si,* $X \langle F(\mathfrak{X}') \rangle \subset F(\mathfrak{X}')$.

DEMONSTRATION. Soient $X \in \mathfrak{X}$, $X' \in \mathfrak{X}'$ et $f \in F(\mathfrak{X}')$. Alors

$$(*) \qquad [X', X] f = X'Xf - XX'f = X'Xf.$$

(j) Si X est $\mathfrak{X}'$- caractéristique, alors $X'Xf = (dXf)X' = 0$ pour tout $X' \in \mathfrak{X}'$, en vertu de $(*)$, donc $Xf \in F(\mathfrak{X}')$.

(jj) Si X laisse $F(\mathfrak{X}')$ stable, alors $[X', X] f = 0$ pour tout $f \in F(\mathfrak{X}')$, à cause de $(*)$, donc $[X', X] \in \mathfrak{X}'$ puisque $\mathfrak{X}'$ est d- complet.

Dans ce chapitre si H est un F- projecteur de $\mathfrak{X}$, c'est-à-dire $H \in End_F(\mathfrak{X})$, $H^2 = H$, on notera V le F- projecteur supplémentaire de H, par définition $V = 1_{\mathfrak{X}} - H$. On écrira

$$\mathfrak{X}_V = Im\, V, \quad \mathfrak{X}_H = Im\, H, \quad F_V = F(\mathfrak{X}_V), \quad C_V = C(\mathfrak{X}_V),$$

et on dira que $\mathfrak{X}_V$ resp. $\mathfrak{X}_H$ est le sous-espace (K, F)- linéaire *vertical* resp. *horizontal* (de H). On a

$$\mathfrak{X}_V = Ker\, H, \quad \mathfrak{X}_H = Ker\, V, \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_V \oplus \mathfrak{X}_H.$$

On notera $V^\star$ et $H^\star$ les F - projecteurs correspondants à la décomposition duale $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}^\star_V \oplus \mathfrak{X}^\star_H$.

THEOREME 19.1. *Soit H un F-projecteur de $\mathfrak{X}$ tel que l'espace vertical $\mathfrak{X}_V$ de H soit une sous-K-algèbre de Lie. Alors*

(j) $H \langle C_V \rangle \subset C_V$ *et* C_V *est le plus grand sous-ensemble B de $\mathfrak{X}$ tel que* $\mathfrak{X}_V \subset B$ *et* $H[X, Y] = H[HX, HY]$ *pour tout* $X, Y \in B$;

(jj) $HC_V = \mathfrak{X}_H \cap C_V = H \langle C_V \rangle$, *muni de l'accolade* $\{X, Y\} = H[HX, HY]$ *et de la contraction de* ρ_D *à* $(C_V, \mathfrak{D}_K(F_V))$, *est un* (K, F_V)*- espace d'Elie Cartan;*

(jjj) Si de plus $\mathfrak{X}_V$ *est* d*- complet, alors* C_V *coïncide avec l'ensemble des* $X \in \mathfrak{X}$ *tels que* $X(F_V) \subset F_V$.

DEMONSTRATION. *(j)*. En effet, soit $X \in C_V$. Or $X = VX + HX$; si $Y \in \mathfrak{X}_V$, alors $[HX, Y] = [X, Y] - [VX, Y]$. Mais $[X, Y] \in \mathfrak{X}_V$ puisque X est $\mathfrak{X}_V$- caractéristique et $[VX, Y] \in \mathfrak{X}_V$ puisque $\mathfrak{X}_V$ est une sous- K- algèbre de Lie, donc H laisse C_V stable. $\mathfrak{X}_V$ étant une sous- K- algèbre de Lie, on a $\mathfrak{X}_V \subset C_V$. Soit $Z \in C_V$. Or

$$[X, Z] = [VX, VZ] + [VX, HZ] + [HX, VZ] + [HX, HZ],$$

mais $[VX, VZ]$, $[VX, HY]$, $[HX, VY] \in \mathfrak{X}_V$ puisque $\mathfrak{X}_V$ est une sous- K- algèbre de Lie et $HX, HY \in C_V$. Donc

$$H[X, Z] = H[HX, HZ] \in C_V.$$

Soit $B \subset \mathfrak{X}$ tel que $\mathfrak{X}_V \subset B$ et

$$H[X, Z] = H[HX, HZ] \in B \text{ pour tout } Y, Z \in B.$$

Soient $X \in B$ et $Y \in \mathfrak{X}_V$. Or $Y \in B$, donc

$$H[X, Y] = H[HX, HY] = 0.$$

Par conséquent $[X, Y] = V[X, Y] \in \mathfrak{X}_V$.

(jj) est une conséquence du lemme 14.5 et de la proposition 19.2, puisque $F_V = F(\mathfrak{X}_V)$.

(jjj) est une conséquence de la proposition 19.2.

Soit $\Omega \in A^2_F(\mathfrak{X}, F)$. On note s_Ω l'application F- linéaire de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{X}^*$ définie par l'identité

$$s_\Omega(X)Y = \Omega(X, Y) \text{ pour } X, Y \in \mathfrak{X}.$$

On dit qu'un couple (Ω, H) est une *structure presque hor-symplectique* (S.P.H-S) sur $\mathfrak{X}$ si (Ω, H) vérifie les deux axiomes suivants

$(HS\,1)$ $\Omega \in A^2_F(\mathfrak{X}, F)$ et H est un F-projecteur de $\mathfrak{X}$;

$(HS\,2)$ $\mathfrak{X}_V = Ker\, s_\Omega$ et $s_\Omega \langle \mathfrak{X}_H \rangle = \mathfrak{X}^\star_V$.

La restriction de s_Ω sur $\mathfrak{X}_H$ est injective. On note $s_{\Omega, H}$ l'isomorphisme de $\mathfrak{X}_H$ sur $\mathfrak{X}^\star_V$ induit par s_Ω.

Soit (Ω, H) une S.P.H-S. sur $\mathfrak{X}$. Si $f \in F$, on désigne par $\underset{\Omega}{grad}\, f$ l'élément de $\mathfrak{X}$, appellé *gradient symplectique* de f, tel que :

$GS\,1)$. $\underset{\Omega}{grad}\, f \in \mathfrak{X}_H$;

$GS\,2)$. $i(\underset{\Omega}{grad}\, f)\Omega = -V^\star(df)$.

Si $f, g \in F$, on pose

$$(f, g) = \Omega(\underset{\Omega}{grad}\, f, \underset{\Omega}{grad}\, g) \;, \quad (ad_\pi f)g = (f, g)$$

$$\mathfrak{I}_\pi(f, g, h) = \sum_{Cyc} ((f, g), h).$$

Comme conséquence immédiate des définitions données ci-dessus on a

$$(\underset{\Omega}{grad}\, f)g = (f, g) \text{ et si } f \in F_V, \text{ alors } i(\underset{\Omega}{grad}\, f)\Omega = -df.$$

On dit que $X \in \mathfrak{X}$ est un *Ω-potentiel* si $di(X)\Omega = 0$. On note $P(\Omega)$ le K-module des Ω- potentiels.

PROPOSITION 19.2. *Soit (Ω, H) une S.P.H-S. sur $\mathfrak{X}$. Alors pour tout $X \in \mathfrak{X}$ et $f \in F$*

$$Xf = \Omega(X, \underset{\Omega}{grad}\, f) + i(X)(H^\star df).$$

De plus $\underset{\Omega}{grad} \langle F_V \rangle \subset P(\Omega)$ *et* $\mathfrak{X}_V \subset P(\Omega)$.

DEMONSTRATION. Soient $X \in \mathfrak{X}$ et $f \in F$. Alors

$$Xf = i(X)df = i(X)\{V^\star df + H^\star df\} = -\langle X,\ i(\underset{\Omega}{grad}\, f)\Omega\rangle + i(X)H^\star df$$
$$= \Omega(X,\ \underset{\Omega}{grad}\, f) + i(X)H^\star df.$$

Si $f \in F_V$, alors $i(\underset{\Omega}{grad}\, f)\Omega = -df$, donc $di(\underset{\Omega}{grad}\, f)\Omega = -d^2 f = 0$.

LEMME 19.1. *Soit $X \in P(\Omega)$. Pour $Y, Z \in \mathfrak{X}$, les formules suivantes sont équivalentes*

$$\sum_{Cyc} X\Omega(Y,Z) = 0 \tag{19.1}$$

$$X\Omega(Y,\ Z) = \Omega(X,[\,Y,Z\,]). \tag{19.2}$$

DEMONSTRATION. Si $X \in P(\Omega)$, alors

$$(di(X)\Omega)(Y,\ Z) = Y\Omega(X,\ Z) - Z\Omega(X,\ Y) - \Omega(X,\ [\,Y,\ Z\,]) = 0. \tag{$*$}$$

(19.1) $\Longrightarrow$ *(19.2)*, en effet, si l'on ajoute *(19.1)* et $(*)$ membre à membre on trouve *(19.2)*.
(19.2) $\Longrightarrow$ *(19.1)*, en effet, il suffit de faire usage de *(19.2)* dans $(*)$.

LEMME 19.2. *Soient $X, Y, Z \in P(\Omega)$. Alors*

$$(d\Omega)(X,Y,Z) = -\sum_{Cyc} X\Omega(Y,\ Z). \tag{19.3}$$

En particulier, si $f, g, h \in F_V$, alors

$$(d\Omega)(\underset{\Omega}{grad}\, f,\ \underset{\Omega}{grad}\, g,\ \underset{\Omega}{grad}\, h) = \mathfrak{I}_\pi(f,g,h). \tag{19.4}$$
$$= (\underset{\Omega}{grad}(f,g))h - [\,\underset{\Omega}{grad} f,\ \underset{\Omega}{grad} g\,]\,h.$$

DEMONSTRATION. Si $X,\ Y,\ Z \in P(\Omega)$, alors

$$2\sum_{Cyc} X\Omega(Y,Z) = \sum_{Cyc} \Omega([\,X,\ Y\,],Z). \tag{$**$}$$

En effet, en faisant usage de $(*)$ on a

$$(di(X)\Omega)(Y,Z) = -Y\Omega(Z,X) - Z\Omega(X,Y) + \Omega([\,Y,Z\,],\ X) = 0$$
$$(di(Y)\Omega)(Z,X) = -Z\Omega(X,Y) - X\Omega(Y,Z) + \Omega([\,Z,X\,],\ Y) = 0$$
$$(di(Z)\Omega)(X,Y) = -X\Omega(Y,Z) - Y\Omega(Z,X) + \Omega([\,X,Y\,],\ Z) = 0.$$

Par addition de ces trois dernières identités il résulte $(**)$. En vertu de la formule *(10.7)* on peut écrire

$$(d\Omega)(X,Y,Z) = \sum_{Cyc} X\Omega(Y,Z) - \sum_{Cyc} \Omega([\,X,Y\,],\ Z) \tag{$***$}$$

Des formules $(**)$ et $(***)$ il résulte *(19.3)*.

On note

$$\tilde{L}(\Omega) = \{\,X \mid X \in \mathfrak{X} \text{ et } \theta(X)\Omega = 0\,\}.$$

LEMME 19. 3. *Soit* $Y \in P(\Omega)$. *Si* $X, Z \in \tilde{L}(\Omega)$, *alors*

$$\sum_{Cyc} \Omega(X, [Y, Z]) = 0; \tag{19.5}$$

$$i([X, Y])\Omega = -d\Omega(X, Y). \tag{19.6}$$

DEMONSTRATION. Il suffit de faire usage des formules *(2.3)* et *(10.9)*, c'est-à-dire des formules :

$$[\theta(X), i(Y \wedge Z)] = i([X, Y] \wedge Z) + i(Y \wedge [X, Z]),$$

$$[i(X \wedge Y), d] = \theta(X)i(Y) - \theta(Y)i(X) - i([X, Y]).$$

THEOREME 19.2. *Soit* (Ω, H) *une S.P.H-S. sur* $\mathfrak{X}$. *Si* $X \in \mathfrak{X}_V$ *et* $X \in \tilde{L}(\Omega)$, *alors* $[P(\Omega), X] \subset \mathfrak{X}_V$. *De plus*

$$\begin{tikzcd}
 & & (Hb) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(H) \arrow[r, Rightarrow] & (Ha) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & (H'b) \\
 & & (H'a) \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

où

(H) $i(\mathfrak{X}_V)d\Omega = 0;$

(Ha) $[P(\Omega), \mathfrak{X}_V] \subset \mathfrak{X}_V$ *et* $\mathfrak{X}_V$ *est une sous- K- algèbre de Lie;*

$(H'a)$ $\operatorname{grad}_\Omega \langle F_V \rangle \subset C_V$ *et* $[\mathfrak{X}_V, \mathfrak{X}_V] \subset \mathfrak{X}_V;$

(Hb) *Si* $Y, Z \in P(\Omega)$, *alors* $\Omega(Y, Z) \in F_V$ *et* $[\mathfrak{X}_V, \mathfrak{X}_V] \subset \mathfrak{X}_V;$

$(H'b)$ $(\ ,\ )$ *laisse* F_V *stable et* $\mathfrak{X}_V$ *est une sous- K-algèbre de Lie.*

Si de plus $\mathfrak{X}_V^\star$ *est F-engendré par* $d\ \langle F_V \rangle$ *alors* $(H'b) \Longrightarrow (H)$.

DEMONSTRATION. Soit $X \in \mathfrak{X}_V$ tel que $\theta(X)\Omega = 0$. Si $Y \in P(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned} i([X, Y])\Omega &= [\theta(X), i(Y)]\,\Omega = \theta(X)i(Y)\Omega - i(Y)\,\theta(X)\Omega \\ &= \theta(X)i(Y)\Omega = \{di(X) + i(X)d\}\, i(Y)\Omega \\ &= di(X)i(Y)\Omega = -di(Y)i(X)\Omega = 0\,. \end{aligned}$$

Donc $[P(\Omega), X] \subset \mathfrak{X}_V$. Si $Y \in \mathfrak{X}_V$, alors

$$i([X, Y])\Omega = [\theta(X), i(Y)]\,\Omega = \theta(X)i(Y)\Omega - i(Y)\theta(X)\Omega = 0$$

puisque $\theta(X)\Omega = 0$. Par conséquent $(H) \Longrightarrow (Ha)$.

$(Ha) \Longrightarrow (H'a)$ puisque $\operatorname{grad}_\Omega \langle F_V \rangle \subset P(\Omega)$.

$(Ha) \Longrightarrow (Hb)$, en effet, soient $X \in \mathfrak{X}_V$ et $Y, Z \in P(\Omega)$. Or $[Y, X] \in \mathfrak{X}_V$, donc

$$\begin{aligned} 0 = (di(Z)\Omega)(Y, X) &= Y\Omega(Z, X) - X\Omega(Z, Y) - \Omega(Z, [Y, X]) \\ &= X\Omega(Y, Z) = \langle X, d\Omega(Y, Z) \rangle\,. \end{aligned}$$

Par conséquent $\Omega(Y,Z) \in F_V$.
$(Hb) \Longrightarrow (H'b)$ puisque $(f,g) = \Omega(\underset{\Omega}{grad}\, f, \underset{\Omega}{grad}\, g)$ et $\underset{\Omega}{grad}\, f,\ \underset{\Omega}{grad}\, g \in P(\Omega)$ si $f,\ g \in F_V$.
$(H'a) \Longrightarrow (H'b)$ puisque $\underset{\Omega}{grad}\ \langle F_V \rangle \subset P(\Omega)$.

Supposons que $d\ \langle F \rangle$ engendre $\mathfrak{X}_V^\star$. Pour $X, Y, Z \in \mathfrak{X}$, on a

$$(i(VX)d\Omega)(Y,Z) = (d\Omega)(X,Y,Z)$$
$$= VX\,\Omega(Y,Z) + \Omega([VX,Y],Z) + \Omega([Z,VX],Y).$$

Si Y ou Z appartient à $\mathfrak{X}_V$, alors $(i(VX)d\Omega)(Y,Z) = 0$, puisque $\mathfrak{X}_V$ est une sous-K-algèbre de Lie. Si $Y = \underset{\Omega}{grad}\, f$ et $Z = \underset{\Omega}{grad}\, g$, où $f,g \in F_V$, alors $(i(VX)d\Omega)(Y,Z) = 0$.
En effet,

$$VX\,\Omega(Y,Z) = VX\,\Omega(\underset{\Omega}{grad}\, f, \underset{\Omega}{grad}\, g) = (VX)(f,g) = 0$$
$$\Omega([VX,Y],Z) = \Omega([VX, \underset{\Omega}{grad}\, f], \underset{\Omega}{grad}\, g)$$

donc

$$= [\ VX, \underset{\Omega}{grad}\, f]\, g = VX(\underset{\Omega}{grad}\, f)g$$
$$\Omega([Z,VX],Y) = (VX)(g,f) = 0.$$

Mais $\{\underset{\Omega}{grad}\, f \mid f \in F_V\}$ engendre $\mathfrak{X}_H$ puisque la contraction de s_Ω à $(\mathfrak{X}_H, \mathfrak{X}_C^\star)$ est un F-isomorphisme, donc $(i(VX)\ d\Omega)(Y,Z)$ pour tout $Y, Z \in \mathfrak{X}_V$. Donc $i(\mathfrak{X}_V)d\Omega = 0$.

Une S.P.H-S (Ω, H) sur $\mathfrak{X}$ vérifiant (H) sera appellée *holonome.*

THEOREME 19.3. *Soit (Ω, H) un S.P.H-S. holonome sur $\mathfrak{X}$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(J) $\quad \sum_{Cyc} X\Omega(Y,Z) = 0$ *pour tout* $X, Y, Z \in P(\Omega)$;

(Ja) $\quad X\Omega(Y,Z) = \Omega(X,[Y,Z])$ *pour tout* $X, Y, Z \in P(\Omega)$;

(Jb) $\quad H[Y,Z] = \underset{\Omega}{grad}\, \Omega(Y,Z)$ *pour tout* $Y, Z \in P(\Omega)$.

Si de plus $2X = 0$ *entraîne* $X = 0$, *pour* $X \in \mathfrak{X}$, *alors* (J) *est équivalente à*

(J') $\quad \sum_{Cyc} \Omega(X,[Y,Z]) = 0$ *pour tout* $X, Y, Z \in P(\Omega)$.

DEMONSTRATION. Du lemme 19.1 et de la formule $(**)$ il résulte que $(J) \Longleftrightarrow (Ja)$ et $(J) \Longleftrightarrow (Jb)$. (Ω, H) étant holonome, l'équivalence de $(J') \Longleftrightarrow (Jb)$ résulte de (Hb).

On dit qu'un S.P.H-S. (Ω, H) sur $\mathfrak{X}$ est une *structure hor-symplectique* (S.H-S) si $d\Omega = 0$.

De la formule (19.3) du lemme 19.2 et des lemmes 19.2 et 19.3 il résulte :

THEOREME 19.4. *Si (Ω, H) est une S.H-S. sur $\mathfrak{X}$, alors les conditions (J), (Ja), (Jb) et (J') sont vérifiées et (Ω, H) est holonome. Si $d\ \langle F_V \rangle$ F-engendre $\mathfrak{X}_V^\star$ et si*

(Ω, H) est une S. P. H - S. vérifiant (H'b) et une des conditions (J), (Ja), (Jb), alors (Ω, H) est une S.P. H - S.

LEMME 19.3. *Soit (Ω, H) une S.P.H - S. (holonome). Si pour $f \in F$, on pose*

$$(\underset{(\,,\,)}{grad} f) g = (f, g),$$

alors $(F, ad_\pi, \underset{(\,,\,)}{grad})$ est un (K, F)-pré-espace d'Élie Cartan sur F en tant que (K, F)- espace linéaire F - libre de dimension 1 (tel que $[\underset{(\,,\,)}{grad} \langle F_V \rangle, \mathfrak{X}_V] \subset \mathfrak{X}_V$).

De la formule *(19.4)* et du lemme 19.2 et du théorème 19.4 il résulte :

THEOREME 19.5. *Soit (Ω, H) une S.H - S. Alors la parenthèse de Poisson $(\,,\,)$ et H vérifient les conditions suivantes :*

(PC I) $(\,,\,)$ est une structure de K - algèbre de Lie sur F_V;

(PC II) $(f, g.h) = (f, g).h + g.(f, g)$.

(PC III) $[\underset{(\,,\,)}{grad} \langle F_V \rangle, \mathfrak{X}_V] \subset \mathfrak{X}_V$;

(PC IV) Si $\underset{(\,,\,)}{grad} f = 0$, alors $df = 0$.

Si de plus $\mathfrak{X}_V^\star$ est F - engendré par $d \langle F_V \rangle$, alors tout couple $((\,,\,), H)$ vérifiant les axiomes PC I ,..., PC IV donne naissance à une forme bien déterminée $\Omega \in A_F^2(\mathfrak{X}, F)$ telle que (Ω, H) soit une S.H - S. et que $(\,,\,)$ soit la parenthèse de Poisson associée à (Ω, H).

LEMME 19.4. *Soient $X, Y, Z \in \mathfrak{X}$. Alors*

$$(\theta(X)\Omega)(Y, VZ) = \Omega([X, VZ], Y]. \tag{19.7}$$

Si $Y, Z \in P(\Omega)$, alors

$$(\theta(X)\Omega)(Y, Z) = \sum_{Cyc} X\Omega(Y, Z). \tag{19.8}$$

En particulier, pour $f, g \in F_V$,

$$(\theta(X)\Omega)(\underset{\Omega}{grad} f, \underset{\Omega}{grad} g) = X(f, g) - (Xf, g) - (f, Xg). \tag{19.7'}$$

DEMONSTRATION. En effet, d'après *(10.4)* on a

$$(\theta(X)\Omega)(Y, Z) = X\Omega(Y, Z) - \Omega([X, Y], Z) - \Omega(Y, [X, Z]).$$

Si Y, Z sont des Ω- potentiels, alors

$$\begin{aligned} -\Omega([X, Y], Z) &= -\{i([X, Y])\Omega\} Z \\ &= -\{\theta(X)i(Y)\Omega - i(Y)\theta(X)\Omega\} Z \\ &= -\{di(X)i(Y)\Omega\} Z + i(Z)i(y)\theta(X)\Omega \\ &= Z\Omega(X, Y) + (\theta(X)\Omega)(Y, Z) \\ -\Omega(Y, [X, Z]) &= Y\Omega(Z, X) + (\theta(X)\Omega)(Y, Z) \end{aligned}$$

Donc

$$(\theta(X)\,\Omega)(Y,Z) = \sum_{Cyc} X\Omega(Y,Z) + 2(\theta(X)\Omega)(Y,Z)$$

d'où on déduit la formule *(19.7)*.

La formule *(19.7')* résulte de *(19.7)*.

LEMME 19.5. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes*

1) $\mathfrak{X}_V^\star$ *est F-engendré par* $d\,\langle F_V\rangle$ *;*

1') $\{\underset{\Omega}{grad}\, f \mid f \in F_V\}$ *F-engendre* $\mathfrak{X}_H$.

De plus 1) entraîne que $\mathfrak{X}_V$ *est d-complet.*

DEMONSTRATION. L'équivalence $1) \Longleftrightarrow 1')$ est vraie puisque $s_{\Omega,H}$ est un F-isomorphisme de $\mathfrak{X}_H$ sur $\mathfrak{X}_V^\star$.

$1') \Longrightarrow$($\mathfrak{X}_V$ est d-complet). En effet soit $Y \in \mathfrak{X}$, alors il existe une famille de support fini $(x^i \mid i \in I)$ d'éléments de F_V et une famille $(f_i \mid i \in I)$ d'éléments de F_V telles que $HY = \sum_{i\in I} x^i \underset{\Omega}{grad}\, f_i$, c'est-à-dire $i(HY)\Omega = -\sum_{i\in I} x^i df_i$. Si $X \in \bigcap_{f\in F_V} Ker\, df$, alors

$$\Omega(X,\ Y) = \Omega(X,\ HY) = \sum_{i\in I} x^i \langle X,\ df_i\rangle = 0$$

pour tout $Y \in \mathfrak{X}$. Donc $X \in Ker\, s_\Omega$.

Des propositions 19.1, 19.2 et des lemmes 19.4 et 19.5 il résulte :

THEOREME 19.6. *Si* $X \in \tilde{L}(\Omega)$, *alors*

(i) $X \in C_V,\ [X, \mathfrak{X}_V] \subset \mathfrak{X}_V$;

(ii) $X(f,\ g) = (Xf,\ g) + (f, Xg)$ *pour* $f, g \in F_V$.

Si $\mathfrak{X}_V^\star$ *est F-engendré par* $d\langle F_V\rangle$ *et si* $X \in \mathfrak{X}$ *vérifie (i) et (ii), alors* $X \in \tilde{L}(\Omega)$.

De la proposition 19.2 et des théorèmes 19.5 et 19.6 il résulte :

COROLLAIRE 19.1. *Soit* (Ω, H) *une S.H-S. Si* $X \in \tilde{L}(\Omega)$, *alors*

(î) X *laisse* F_V *stable,*

(îî) X *est une K-dérivation intérieure de la K-algèbre de Lie* $(F_V, (\ ,\ ))$.

Si $\mathfrak{X}_V^\star$ *est F-engendré par* $d\,\langle F_V\rangle$ *et si* $X \in \mathfrak{X}$ *vérifie (î) et (îî), alors* $X \in \tilde{L}(\Omega)$.

LEMME 19.6. *Soient* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}$. *Si* $Y \in P(\Omega)$ *et* $Z \in \tilde{L}(\Omega)$, *alors*

$$\Omega(X,\ [Y, Z]) = X\Omega(Y, Z) \tag{19.9}$$

$$(\theta(X)\Omega)(Y,Z) = \sum_{Cyc} \Omega(X,\ [Y, Z]) \tag{19.20}$$

DEMONSTRATION.

$$\Omega(X, [Y,\ Z]) = \{i([Z, Y])\Omega\}\, X = \{\theta(Z)i(Y)\Omega - i(Y)\theta(Z)\Omega\}\, X$$
$$= \{di(Z)i(Y)\Omega\}\, X = X\,\Omega(Y, Z).$$

20. Structures hor-Ehresmanniennes.

Dans ce paragraphe nous noterons par $\mathfrak{X}$ un ensemble muni d'une structure de (K, F)-pré-espace d'Elie Cartan régulier. Soit ∇ une connexion linéaire ($\mathfrak{T}$-régulière) sur $\mathfrak{X}$. Si $B \in L_F^2(\mathfrak{X}, F)$ on notera s_B l'application F-linéaire de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{X}^*$ définie par

$$s_B(X)Y = B(X, Y)$$

et on dira que ∇ laisse *invariant* B ou ∇ est *compatible* avec B si $\nabla(X)B = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{X}$.

Si $B = \Omega$ est alternée et si ∇ est compatible avec Ω, alors, en vertu de (12.7), on a

$$(d\Omega)(X, Y, Z) = \sum_{Cyc} \Omega(X, T_\nabla(Y, Z)),$$

donc $d\Omega = 0$ si ∇ est sans torsion.

Si $B = G$ est symétrique, alors ∇ est compatible avec G si, et seulement si, $\nabla(X)s_G = s_G\nabla(X)$.

THEOREME 20.1. *Soit $G \in L_F^2(\mathfrak{X}, F)$ symétrique. Si ∇ est une connexion linéaire sans torsion sur $\mathfrak{X}$ compatible avec G, alors*

$$(20.1) \qquad 2G(\nabla(X)Y, Z) = XG(Y, Z) + YG(Z, X) - (\theta(Z)G)(X, Y) + G([X, Y], Z).$$

où $(\theta(Z)G)(X, Y) = ZG(X, Y) - G([Z, X], Y) + G([Y, Z], X)$.

DEMONSTRATION. Par hypothèse

$$\nabla(X)Y - \nabla(Y)X = [X, Y] \text{ et } \nabla(X)G = 0.$$

Donc

$$XG(Y, Z) = G(\nabla(X)Y, Z) + G(Y, \nabla(Z)X) + G([X, Z], Y).$$

Si dans cette dernière identité on permute cycliquement les variables X, Y, Z et si l'on élimine $\nabla(X)$ et $\nabla(Y)$, on obtient la formule (20.1).

On dit que G est une *métrique* sur $\mathfrak{X}$ si G est une forme F-bilinéaire symétrique de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ dans F telle que s_G soit bijective et $G(X, Y) = 0$ si $2G(X, Y) = 0$.

THEOREME 20.2. *Soit G une métrique sur $\mathfrak{X}$. Alors il existe une seule connexion linéaire sans torsion sur $\mathfrak{X}$ compatible avec G. Si de plus $\Omega_{\rho_D} = 0$, alors ∇ est $\mathfrak{T}$-régulière.*

DEMONSTRATION. L'unicité de ∇ est conséquence de (20.1). Si l'on définit $\nabla(X)Z$ au moyen de la formule (20.1) un simple calcul technique montre que ∇ est une connexion linéaire ($\mathfrak{T}$-régulière). Si l'on procède de façon inverse dans la démonstration du théorème 20.1, on vérifie que la connexion linéaire ∇ déterminée par *(20.1)* est sans torsion et compatible avec G.

La connexion linéaire ($\mathfrak{J}$ - régulière) caractérisée par le théorème 20.2 est appellée *la connexion linéaire ($\mathfrak{J}$ - régulière) de Levi-Civita associée* à la métrique G.

La donnée d'un couple (H, J) tel que

$(H\text{-}C)$ $J \in End_F(\mathfrak{X})$, H est un F-projecteur de $\mathfrak{X}$ et

$$\mathfrak{X}_V = Ker\, J, \qquad H = -J^2$$

est équivalente à la donnée d'un J tel que

$(H\text{-}C')$ $J \in End_F(\mathfrak{X})$ et $J^3 + J = 0$.

Un couple (H, J) ou resp. un J vérifiant $(H\text{-}C)$ ou resp. vérifiant $(H\text{-}C')$ sera appellé *structure presque hor-complexe* (S.P.H-C.). Nous dirons qu'une S. P. H-C. (H, J) laisse B *invariant* si

$$B(X, JX) = 0 \text{ pour tout } X \in \mathfrak{X}. \tag{20.2}$$

LEMME 20.1. *Soit* $B \in L^2_F(\mathfrak{X}, F)$. *Si* (H, J) *est une S. P. H-C. qui laisse* B *invariant, alors :*

$$B(JX, JY) = B(Y, HX), \tag{20.3}$$

$$B(HX, JY) + B(HY, JX) = 0. \tag{20.4}$$

DEMONSTRATION. En effet,

$$0 = B(X+Y, JX+JY) = B(X, JY) + B(Y, JX)$$

donc

$$0 = B(HX + HY), JHX + JHY) = B(HX, JY) + B(HY, JX).$$

LEMME 20.2. *Soit* $B \in L^2_F(\mathfrak{X}, F)$. *Si une S. P. H-C.* (H, J) *laisse* B *invariant, alors :*

(i) $\mathfrak{X}_V$ *et* $\mathfrak{X}_H$ *sont* B*-orthogonaux, donc*

$$B(X, JY) = B(HX, JY) = B(JY, JX); \tag{20.5}$$

(ii) $s_B \mid \mathfrak{X}_H$ *est injective si, et seulement si,*

$$(\mathfrak{X}_H)^o = \{X \mid X \in \mathfrak{X} \text{ et } G(X, Y) = 0 \ \forall\, Y \in \mathfrak{X}_H\} \subset Ker\, J.$$

DEMONSTRATION. *(i)* $(20.3) \Longrightarrow (\mathfrak{X}_V$ et $\mathfrak{X}_H$ sont B-orthogonaux$)$. En effet

$$B(VX, HY) = B(JX, JVX) = 0.$$

(ii) Supposons que $s_B \mid \mathfrak{X}_H$ est injective. Si $X \in (\mathfrak{X}_H)^o$, alors $B(X, HY) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{X}$, donc

$$s_B(HX)(Y) = B(HX, Y) = B(X, HY) = 0 \ \forall\, Y \in \mathfrak{X}.$$

Par conséquent $s_B(HX) = 0$, donc $HX = 0$, d'où $X = VX \in \mathfrak{X}_V$.

Supposons que $(\mathfrak{X}_H)^o \subset Ker\, J$. Si $s_B(HX)=0$, alors $s_B(HX)HY = G(HX, Y)=0$ pour tout $Y \in \mathfrak{X}$, donc $HX \in (\mathfrak{X}_H)^o \subset Ker\, J = \mathfrak{X}_V$. Par conséquent $HX = 0$.

PROPOSITION 20.1. *Soit $B \in L^2_F(\mathfrak{X}, F)$. Si une S.P.H-C. (H, J) laisse B invariant et si l'on pose $\Omega(X, Y) = B(HX, JY)$, alors*

$$(20.6)\qquad (\theta(X)\Omega)(Y, Z) = (\theta(X)G)(Y, JZ) + G(Y, (\theta(X)J)Z),$$

$$(20.7)\qquad (\nabla(X)\Omega)(Y, Z) = (\nabla(X)G)(Y, JZ) + G(Y, (\nabla(X)J)Z)),$$

où ∇ est une connexion linéaire arbitraire sur $\mathfrak{X}$.

DEMONSTRATION. Il suffit de vérifier *(20.7)* puisque *(20.6)* est un cas particulier de *(20.7)* quand $\nabla = ad$. En effet,

$$\begin{aligned}(\nabla(X)\Omega)(Y, Z) &= X\Omega(Y, Z) - \Omega(\nabla(X)Y, Z) - \Omega(Y, \nabla(X)Z)\\ &= XG(Y, JZ) - G(\nabla(X)Y, JZ) - G(Y, \nabla(X)Z)\\ &\quad - G(Y, \nabla(X)JZ) + G(Y, \nabla(X)JZ)\\ &= (\nabla(X)G)(Y, JZ) + G(Y, (\nabla(X)J)Z).\end{aligned}$$

Si $B \in L^2_F(\mathfrak{X}, F)$, un F-projecteur H de $\mathfrak{X}$ est dit B-*adapté* si $s_B\langle\mathfrak{X}_H\rangle = \mathfrak{X}^\star_V$ et la restriction $s_B \mid \mathfrak{X}_H$ est injective. Pour qu'un F-projecteur H de $\mathfrak{X}$ soit B-adapté, il faut et il suffit que $\mathfrak{X}_V$ et $\mathfrak{X}_H$ soient B-orthogonaux et que l'application F-linéaire, notée $s_{B,H}$, de $\mathfrak{X}_H$ dans $\mathfrak{X}^\star_V$ induite par s_B soit bijective; par définition on a

$$s_{B,H}(HX)Y = s_B(X)Y.$$

THEOREME 20.3. *Soit $B \in L^2_F(\mathfrak{X}, F)$ symétrique. Il existe une application bijective α_B de l'ensemble des couples (Ω, H) dans l'ensemble des J qui vérifient la condition $(H\text{-}E)$ resp. $(C\text{-}E)$ ci-dessous :*

$(H\text{-}E)$. (Ω, H) est une S.P.H-S. sur $\mathfrak{X}$, H est B-adapté et

$$(20.8)\qquad \overset{-1}{s}_{B,H} \circ s_{\Omega,H} = -\overset{-1}{s}_{\Omega,H} \circ s_{B,H},$$

c'est-à-dire

$$(20.8')\qquad s_B(X) + s_\Omega(\overset{-1}{s}_{B,H}(s_\Omega(X))) = 0;$$

$(C\text{-}E)$. J est une S.P.H-C. sur $\mathfrak{X}$ qui laisse B invariant et telle que

$$(20.9)\qquad (\mathfrak{X}_H)^o \subset Ker\, J \text{ et } (Ker\, J)^\star \subset s_B\langle Im\, J\rangle.$$

α_B et $\overset{-1}{\alpha}_B$ sont définies au moyen des équations :

$$(20.10)\qquad J = -\overset{-1}{s}_{B,H} \circ s_{\Omega,H} \circ H,$$

$$(20.11)\qquad H = -J^2,\ \Omega(X, Y) = B(HX, JY).$$

DEMONSTRATION.

$(H\text{-}E) \Longrightarrow (C\text{-}E)$. Supposons J défini par la formule (20.10). De la formule (20.8) résulte que J est une $S.P.H\text{-}C.$ qui laisse B invariant. La condition (ii) du lemme 20.2 entraîne (20.9).

$(C\text{-}E) \Longrightarrow (H\text{-}E)$. A cause de (i) et (ii) du lemme 20.2 le couple (Ω, H) défini par les formules (20.11) est une S.P.H-S. et H est B-adapté. Il reste à démontrer la formule $(20.8')$. La symétrie de B et les formules (20.1) entraînent la formule (20.10). J étant une S.P.H-C. qui laisse B invariant, les formules (20.3), (20.10) et la symétrie de B entraînent la formule $(20.8')$. En effet

$$
\begin{aligned}
0 &= B(HX, Y) - B(Y, HX) = B(HX, Y) - B(JX, JY) \\
&= B(HX, Y) - \Omega(JHX, Y) \\
&= B(HX, Y) + \Omega(s_{B,H}^{-1} \circ s_{\Omega,H}\, HX, Y).
\end{aligned}
$$

On dira qu'un couple $((\Omega, H), G)$ ou resp. un couple $((J, H), B)$ est une *structure hor-ehresmannienne* (S. H-E) {*métrique*} sur $\mathfrak{X}$ si B est un élément de $L_F^2(\mathfrak{X}, F)$ symétrique {métrique} et si $((\Omega, H), B)$ ou resp. $((J, H), B)$ vérifie la condition (H-E) ou resp. la condition :

$(C\text{-}E')$ (J, H) est une S.P.H-C. qui laisse B invariant et H est B-adapté.

De la formule (20.6) il résulte :

PROPOSITION 20.2. *Soit* $((\Omega, H), B)$ *une S.H-E. métrique sur* $\mathfrak{X}$. *Si* $X \in \mathfrak{X}$ *est une* isométrie infinitésimale, $\theta(X)B = 0$, *alors* X *est* presque analytique, $\theta(X)J = 0$, *si, et seulement si,* X conserve Ω, $\theta(X)\Omega = 0$.

PROPOSITION 20.3. *Soit* (H, J) *une S. P. H-C. sur* $\mathfrak{X}$. *Alors*

(i) $\mathfrak{X}_V$ *est une sous-K-algèbre de Lie si, et seulement si,* $\mathfrak{N}_J(X, Y) = 0$ *pour tout* X, $Y \in \mathfrak{X}$;

(ii) $\mathfrak{X}_H$ *est une sous-K-algèbre de Lie si, et seulement si,* $V\mathfrak{N}_J(JX, JY) = 0$ *pour tout* X, $Y \in \mathfrak{X}$;

(iii) $\mathfrak{N}_J = 0$ *si, et seulement si,* $\mathfrak{X}_V$, $\mathfrak{X}_H$ *sont des sous-K-algèbres de Lie de* $\mathfrak{X}$ *et* $H\mathfrak{N}_J(HX, HY) = 0$ *et* $\mathfrak{N}_J(HX, VY) = 0$ *pour tout* $X, Y \in \mathfrak{X}$.

DEMONSTRATION. (i) et (ii) sont des conséquences des deux formules ci-dessous :

$$\mathfrak{N}_J(VX, VY) = -H[VX, VY]$$

$$V\mathfrak{N}_J(JX, JY) = V[HX, HY].$$

(iii) est conséquence de (i), (ii) et de la propriété suivante : si $[\mathfrak{X}_H, \mathfrak{X}_H] \subset \mathfrak{X}_H$, alors

$$H\mathfrak{N}_J(HX, HY) = \mathfrak{N}_J(HX, HY).$$

LEMME 20.3. *Soit* $B \in L^2_F(\mathfrak{X}, F)$ *symétrique. Si* J *est une S.P.H-C. qui laisse* B *invariant, si* ∇ *est une connexion linéaire sans torsion sur* $\mathfrak{X}$ *si elle laisse* G *invariant et si* $X \in \mathfrak{X}_H$, *alors*

$$(20.12) \qquad B((\nabla(X)J)Y,Z) = (i(X)d\Omega)(JY,JZ) - (i(X)d\Omega)(Y,Z) \\ - (i(X)\Omega)(\mathfrak{N}_J(Y,Z)) + \\ + G([X,JY],VZ) + G([JZ,X],VY),$$

où $\Omega(Y,Z) = B(HY,JZ)$.

DEMONSTRATION. En faisant usage des formules (10.7), (20.3), (20.4) et (20.5) on a

$$(\alpha) = -(d\Omega)(X,Y,Z) = -X\Omega(Y,Z) - Z\Omega(X,Y) - Y\Omega(Z,X) \\ + \Omega([X,Y],Z) + \Omega([Z,X],Y) + \Omega([Y,Z],X) \\ = XB(Z,JY) - ZB(X,JY) + YB(X,JZ) \\ + B([X,Y],JZ) + B([Z,X],JY) + B([Y,Z],JX).$$

Par hypothèse $X \in \mathfrak{X}_H$, donc

$$(\beta) = (d\Omega)(X,JY,JZ) = -XB(JZ,J^2Y) - JZB(JY,JX) + JYB(JZ,JX) \\ - B([X,JY],J^2Z) - B([JZ,X],J^2Y) - B([JY,JZ],JX) \\ = XB(JZ,Y) - JZB(Y,X) + JYB(JZ,JX) \\ + B([X,JY],HZ) + B([JZ,X],HZ) - B([JY,JZ],JX),$$

$$(\gamma) = -\Omega(X,\mathfrak{N}_J(Y,Z)) = \\ = \Omega([JY,JZ],X) - \Omega(J[JY,Z],X) - \Omega(J[Y,JZ],X) + \Omega(J^2[Y,Z],X) \\ = B([JY,JZ],JX) + B(X,J^2[JY,Z]) + B(X,J^2[Y,JZ]) + B(J^2[Y,Z],JX) \\ = B([JY,JZ],JX) - B(X,[JY,Z]) - B(X,[Y,JZ]) - B([Y,Z],JX),$$

$$(\delta) = B([X,JY],VZ) + B([JZ,X],VZ);$$

en faisant usage de la formule (20.1) on en déduit

$$(\alpha)+(\beta)+(\gamma)+(\delta) = 2\{B(\nabla(X)JY,Z) + B(\nabla(X)Y,JZ)\} \\ = 2\{B(\nabla(X)JY,Z) - B(J(\nabla(X)Y),Z)\} \\ = 2B((\nabla(X)J)Y,Z).$$

THEOREME 20.4. *Soit* $((\Omega,H),B)$ *une S.H-E. métrique sur* $\mathfrak{X}$ *et soit* ∇ *la connexion linéaire de Levi-Civita associée à* B. *Alors : (i) Pour tout* $X \in \mathfrak{X}$, $\nabla(X)J = 0$ *si, et seulement si,* $\nabla(X)\Omega = 0$; *(ii)* $\nabla(X)J = 0$ *pour tout* $X \in \mathfrak{X}$ *si, et seulement si,* (a) $d\Omega = 0$, (b) $\mathfrak{N}_J = 0$, (c) $\nabla(\mathfrak{X}_V)\Omega = 0$.

DEMONSTRATION. *(i)* est conséquence de la formule *(20.7)* puisque $\nabla(X)G = 0$. Supposons que $\nabla(X)J = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{X}$. Or ∇ étant sans torsion, $T_\Delta = 0$, donc

$$(d\Omega)(X, Y, Z) = \sum_{Cyc} (\nabla(X)\Omega)(Y, Z);$$

donc $d\Omega = 0$, à cause de *(i)*. Du fait de $T_\Delta = 0$ et de la 5^e-formule du §18 il résulte que $\mathfrak{N}_J = 0$. Réciproquement supposons *(a)*, *(b)* et *(c)* et que $X \in \mathfrak{X}_H$. En vertu de *(ii)* de la proposition 20.3, $[\mathfrak{X}_H, \mathfrak{X}_H] \subset \mathfrak{X}_H$; mais $Im\, J \subset \mathfrak{X}_H$, donc

$$B([X, JY], VZ) = 0 = B([JZ, X], VZ);$$

par conséquent de la formule *(20.12)* résulte que $2B((\nabla(X)J)Y, Z) = 0$ pour tout $Y, Z \in \mathfrak{X}$. Comme B est une métrique, on a $\nabla(X)J = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{X}_H$.

LEMME 20.5. *Soit* (Ω, H) *une S.P.H-S. sur* $\mathfrak{X}$. *Si* ∇ *est une connexion linéaire sur* $\mathfrak{X}$, *si* $E \in \mathfrak{X}_V$ *et si* $\nabla(E)\Omega = 0$, *alors*

$$\nabla(E)VX \in \mathfrak{X}_V \text{ et } \nabla(E)\underset{\Omega}{grad}\, f \in \mathfrak{X}_V \text{ pour tout } f \in F_V.$$

DEMONSTRATION. Comme cas particulier de la formule *(2.2)* on a

$$\begin{aligned} i(\nabla(E)Y)\Omega &= \nabla(E)i(Y)\Omega - i(Y)\nabla(E)\Omega \\ &= \nabla(E)i(Y)\Omega. \end{aligned}$$

Si $Y = VX$, alors $i(\nabla(E)VX)\Omega = 0$, donc $\nabla(E)VX \in \mathfrak{X}_V$. Si $Y = \underset{\Omega}{grad}\, f$, $f \in F_V$, alors

$$\begin{aligned} i(\nabla(E)\underset{\Omega}{grad}\, f) &= \nabla(E)i(\underset{\Omega}{grad}\, f)\Omega = -\nabla(E)\, df \\ &= -Ef = 0 \end{aligned}$$

puisque $E \in \mathfrak{X}_V$ et $f \in F_V$. Donc $\nabla(E)\underset{\Omega}{grad}\, f \in \mathfrak{X}_V$.

PROPOSITION 20.4. *Soit* $((H, J), B)$ *une S.H-E sur* $\mathfrak{X}$. *Si* $\mathfrak{N}_J = 0$ *et si la S.P.H-S.* (Ω, H) *sous-jacente à* $((H, J), B)$ *est holonome, alors pour tout* $f \in F_V$, $J\,\underset{\Omega}{grad}\, f$ *est est* $\mathfrak{X}_V$*-caractéristique.*

DEMONSTRATION. En effet,

$$\mathfrak{N}_J(VX, \underset{\Omega}{grad}\, f) = -J[VX, J\,\underset{\Omega}{grad}\, f] + J^2[VX, \underset{\Omega}{grad}\, f];$$

or $[VX, \underset{\Omega}{grad}\, f] \in \mathfrak{X}_V$ puisque (Ω, H) est holonome, donc

$$0 = \mathfrak{N}_J(VX, \underset{\Omega}{grad}\, f) = -J[VX, J\,\underset{\Omega}{grad}\, f],$$

mais $\mathfrak{X}_V = Ker\, J$, donc $[VX, J\,\underset{\Omega}{grad}\, f] \in \mathfrak{X}_V$.

Bibliographie.

[1] de BARROS, C.M., Variétés hor-symplectiques, C.R. Acad., Sc. Paris, t. 259 (1964), 1291-1294.

[2] de BARROS, C.M., Variétés presque hor-complexes, C.R. Acad. Sc. Paris t. 260 (1965), 1543-1546.

[3] BOCHNER, S., A new viewpoint in differential geometry, Canad. J. Math., Vol. 3 (1951), 460-470.

[4] BOMPIANI, E., Le connessioni tensoriali, atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., Serie 8, vol. 1 (1946), 478-482.

[5] CARTAN, E., Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.., t. 16 (1899), 239-332; Oeuvres complètes, Partie II, vol. 1 (Gauthier-Villars), Paris, 1953, 303-396.

[6] CARTAN, E., Le calcul tensoriel projectif, Recueil Soc. Math. Moscou, t. 42 (1935), 131-148; Oeuvres complètes, Partie III, vol. 2 (Gauthier-Villars), Paris 1955, 1323-1347.

[7] CARTAN, E., L'extension du calcul tensoriel aux géométries non affines, Annals of Math., t. 38 (1937), 1-13; Oeuvres complètes, Partie III, Vol. 2 (Gauthier-Villars), Paris, 1955, 1411-1423.

[8] CARTAN, E., Le calcul différentiel absolu devant les problèmes récents de géométrie riemannienne, Atti Fond. Volta, t. 9 (1939), 443-461; Oeuvres complètes, Partie III, vol. 2 (Gauthier-Villars), Paris, 1955, 1493-1511.

[9] CARTAN, E., Leçons sur la géométrie de Riemann, Paris (Gauthier-Villars) 1946, 2e éd.

[10] CARTAN, H., Notions d'algèbre différentielle; applications aux groupes de Lie, Colloque de Topologie (espaces fibrés) Bruxelles, 1950, pp. 15-27. Georges Thone, Liège; Masson et Cie, Paris, 1951.

[11] CARTAN, H. and EILENBERG, S., Homological Algebra, Princeton (Princeton University) (1956).

[12] CHEVALLEY, C. and EILENBERG, S., Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 63 (1948), 85-124.

[13] COSSU, A., Nozioni generali sulle connessioni tensoriali di specie qualunque, Rend. Mat. e appl. serie V, vol. 21 (1962), 167-218.

[14] EHRESMANN, C., Sur la théorie des espaces fibrés, Coll. Int. du C.N.R.S. vol. 12. Topologie algébrique, Paris, 1947, pp. 3-15 (1949).

[15] EHRESMANN, C., Sur les variétés presque complexes, Proc. Int. Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. 2, 412-419.

[16] FLANDERS, H., Development of an extended exterior differential calculus, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 75 (1953), 311-326.

[17] FLANDERS, H., Methods in affine connection theory, Pacific J. Math., vol. 5 (1955), 391-431.

[18] FRÖLICHER, A. and NIJENHUIS, A., Theory of vector-valued differential forms, I, II, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., Ser. A, t. 59 (1956), 338 - 359, vol. 61 (1958), 414 - 429.

[19] FRÖLICHER, A. and NIJENHUIS, A., Some new cohomology invariants for complexe manifolds, I, II, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., Ser. A, t. 259 (1956), 540-552, 553 - 564.

[20] GUGGENHEIMER, H., Ueber kählersche und symplektische Differentialgebren, Tôhoku Math. J., vol. 4 (1952), 157 - 171.

[21] HATTORI, A., Spectral sequence in the de Rham cohomology of fibre bundles, J. Fac. Sci. Univ. Tohyo, Sec. I, vol. 8 (1960), 289 - 331.

[22] HERZ, J., Pseudo-algèbres de Lie I, II, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 236 (1953), 1935 - 1937, 2289 - 2291.

[23] HOCHSCHILD, G. and SERRE, J.P., Cohomology of Lie algebras, Ann. of Math. vol. 57 (1953), 591 - 603.

[24] HOCHSCHILD, G., KOSTANT, B. and ROSENBERG, A., Differential forms on regular affine algebras, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 102 (1962), 383 - 408.

[25] KÄHLER, E., Der innere Differentialkalkül, Rend. Math. e appl., vol. 21 (1962), 425 - 523.

[26] KOBAYASHI, S. and NOMIZU, K., Foundations of differential geometry, vol.1, (Interscience) New-York, 1963.

[27] KOSZUL. J.L., Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, Bull. Soc. Math. France, vol. 78 (1950), 65 - 127.

[28] KOSZUL. J.L., Lectures on fibre bundles and Differential Geometry, Tata Institùte of Fundamental Research, Bombay (1960), mimeographed notes.

[29] MICHAL, A.D., Abstract covariant vector fields in a general absolute calculus, Amer. J. Math., t. 59 (1957), 306 - 314.

[30] MICHAL, A. D., General differential Geometries and related topics, Bull. Amer. Math. Soc., t. 45 (1939), 529 - 563.

[31] NICKERSON, H. K., On differential operators and connections. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 99 (1961), 509 - 539.

[32] NIJENHUIS, A., Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, vol. 58 (1955), 390-403.

[33] NIJENHUIS, A., Differential-geometric operations on rings, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 63, abstr. 575 (1957), 288 - 289.

[34] NIJENHUIS, A., Geometric aspects of formal differential operations on tensor fields, Proc. of Inst. Congress of Math. 1958 Edinburg (Cambridge Univ. Press) 1960, 463 - 469.

[35] OSEKI, J., Chern classes of projective modules, Nagoya Math. Journal, vol. 23 (1963), 121 - 152.

[36] PALAIS, R., The cohomology of Lie rings, Proc. Sympos. Pure Math., vol. III, Amer. Math. Soc. Providence (1961), 130-137.

[37] RICCI, G., a) Résumé de quelques travaux sur les systèmes variables de fonctions associés à une forme différentielle quadratique, Bull. Sci. Math. Serie II, t. 16 (1892), 167-189, Opere, vol. I, (Edizioni Cremonese), Roma 1956, 288-314; b) Opere, ibidem, 138-171; c) Opere, ibidem, 245-267.

[38] RINEHART, G,S., Differential forms of general commutative algebras, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 108 (1963), 195-222.

[39] SCHOUTEN, J.A., Der Ricci-kalkül,..., (Springer) Berlin 1924.

[40] SCHOUTEN, J. A., Ricci-Calculus,..., (Springer-Verlag) Berlin 1954, Sec. ed.

[41] STRUIK, D.J., Theory of linear connections, (Springer) Berlin 1934.

[42] WALKER, A.C., Dérivation torsionelle et seconde torsion pour une structure presque complexe, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 245 (1957), 1213-1215.

[43] WILLMORE, T.J., Derivations and 1-forms, J. London Math. Soc., vol. 35 (1960), 425-432.

[44] WILLMORE, T.J., The Poincaré Lemma associated with certain derivations, J. London Math. Soc. t. 37 (1962), 345-350.

Index des notations.

Abréviations.

t. i. (*g.*) translation infinitésimale (graduée).

d. i. (*g.*) déplacement infinitésimal (graduée).

r. i. (*g.*) représentation infinitésimale (graduée).

S. (*P.*) *H-S* structure (presque) hor-symplectique,

S.P.H-C structure presque hor- complexe,

S.H-E. structure hor-ehresmannienne.

Index terminologique.

Table des Matières