H. Akbar-Zadeh

Une généralisation de la géométrie finslérienne

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann, tome 6 (1964), exp. nº 6, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1964__6__A6_0>

TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE Vol. VI

Séminaire dirigé par C. EHRESMANN

MAI 1963

UNE GENERALISATION DE LA GEOMETRIE FINSLERIENNE

par H. AKBAR-ZADEH

1. Variétés Finslériennes.

Soit V_n une variété différentiable de dimension n et de classe C^∞. Nous désignerons par V l'espace fibré des vecteurs non nuls tangents à V_n par W l'espace fibré des directions orientées tangentes à V_n, par π, p et η respectivement les applications canoniques de $V \to V_n$, de $W \to V_n$ et de $V \to W$ ($\pi = p \circ \eta$). Les points de V, W et V_n seront notés respectivement par z, y et x. Soit $T_{\pi z}$ l'espace vectoriel tangent à V_n en $x = \pi z$. Par champ de tenseurs au sens large nous entendons une application qui à tout $z \in V$ fait correspondre un élément de l'algèbre tensorielle affine construite sur $T_{\pi z}$. Soit t un tel tenseur, λ étant un nombre positif donné, considérons la transformation de V définie par $\mu_\lambda : z \to \lambda z$, nous dirons que t est un tenseur restreint de degré d'homogénéité r (par abus de langage $h \cdot r$) si

$$t(\mu_\lambda z) = \lambda^r t(z). \tag{1.1}$$

Par définition une p-forme «semi-basique» $h \cdot r$ sur V est un champ de tenseurs covariants d'ordre p antisymétriques et de degré d'homogénéité r. Soit K l'anneau des fonctions à valeurs réelles sur V, nous désignerons par $H_p^r(V)$ le K-module des p-formes semi-basiques $h \cdot r$ sur V. Soit U un voisinage de V_n, aux coordonnées locales (x^α) $(\alpha = 1 \dots n)$ d'un point $x \in U$ nous faisons correspondre les coordonnées (x^α, v^α) du point $z \in \overline{U} \subset \pi^{-1}(U)$ $(\pi z = x)$ où les v^α sont des composantes par rapport au repère naturel d'origine x du vecteur de $T_{\pi z}$ défini par z. Tout élément $a \in H_p^r(\overline{U})$ peut donc s'écrire :

$$a = \frac{1}{p!}\, a_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(z)\, dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}.$$

Nous définissons l'opérateur $d^{\cdot}$ par :

$$d^{\cdot} a = dx^\lambda \wedge \dot\partial_\lambda a. \tag{1.2}$$

où $\partial^{\cdot}$ désigne la dérivée de a par rapport à v. Cet opérateur applique le K-module $H_p^r(\overline{U})$ dans le K-module $H_{p-1}^r(\overline{U})$, il est de bidegré égal à $(1,-1)$ et possède les propriétés de différentiation. Soit $\mathfrak{L}(x,v)$ une fonction positive $h^{\cdot}1$ sur V et posons[(1)]

$$F_{\alpha\beta} = \partial^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta}(\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}^2) \qquad (\partial^{\cdot}_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}) \tag{1.3}$$

$F_{\alpha\beta}$ est un tenseur symétrique $h^{\cdot}0$. Nous dirons que la donnée de $\mathfrak{L}$ munit V_n d'une structure de variété finslérienne si $F_{\alpha\beta}$ définit sur T_{py} une forme quadratique définie positive.

2. Variétés finslériennes généralisées.

DEFINITION. *Une structure de variété finslérienne généralisée* (V_n, W, g) *sur* V_n *est définie par la donnée d'un champ de tenseurs* g *symétrique* $h^{\cdot}0$, *définissant pour chaque* $y \in W$, *une forme quadratique définie positive sur* T_{py}. *Nous appelons finslérienne si en outre :*

$$(X,Y)_y = \tfrac{1}{2}[i(X)d^{\cdot}(v,Y)_y + i(Y)d^{\cdot}(v,X)_y] \qquad \forall X,Y \in T_x \tag{2.1}$$

où nous avons désigné par i *l'opérateur du produit intérieur et par* $(X,Y)_y$ *le produit scalaire de* X *et* Y *en* $x = py$. *Soit* $g_{\alpha\beta}$ *le tenseur métrique d'une variété finslérienne généralisée et posons :*

$$\mathfrak{L}^2 = g_{\alpha\beta}(x,v)v^{\alpha}v^{\beta} \tag{2.2}$$

$$F_{\alpha\beta} = \partial^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta}(\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}^2). \tag{2.3}$$

Entre $F_{\alpha\beta}$ *et* $g_{\alpha\beta}$ *il vient :*

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{4}(\partial^{\cdot}_{\alpha}a_{\lambda\beta} + \partial^{\cdot}_{\beta}a_{\alpha\lambda})v^{\lambda}. \tag{2.4}$$

avec :

$$a_{\alpha\beta} = (\partial^{\cdot}_{\alpha}g_{\lambda\beta} + \partial^{\cdot}_{\beta}g_{\alpha\lambda})v^{\lambda}. \tag{2.5}$$

Dans la suite nous supposons que $\text{dét}(F_{\alpha\beta}) \neq 0$.

3. Connexions finslériennes généralisées.

a) Soit $E(V_n)$ l'espace fibré principal des repères linéaires sur V_n. Nous désignerons par $\pi^{-1}E(V_n)$ (resp. $p^{-1}E(V_n)$) l'espace fibré induit de $E(V_n)$ par $\pi : V \to V_n$ (resp. par $p : W \to V_n$). Nous appelons connexion linéaire de vecteurs (resp. de directions) une connexion infinitésimale sur $\pi^{-1}E(V_n)$ (resp. sur $p^{-1}E(V_n)$). Si $\overline{\omega}$ est une connexion linéaire de directions nous désignerons encore par $\overline{\omega}$ son image inverse sur $\pi^{-1}E(V_n)$ par η. Rapportée au corepère local (dx, dv) la matrice de cette connexion s'écrit :

$$\overline{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}(z)dx^{\gamma} + \overline{\mathfrak{C}}^{\alpha}_{\beta\gamma}(z)dv^{\gamma} \qquad (\overline{\mathfrak{C}}^{\alpha}_{\beta o} = 0) \tag{3.1}$$

où l'indice 0 désigne la multiplication contractée par v. Les coefficients $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont

(1) Les indices α, β.. varient de $1, 2 \ldots n$.

$h^{\bullet}0$ et les quantités $\bar{\mathcal{C}}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont $h^{\bullet}(-1)$ et définissent un tenseur de type $(1,2)$. Une telle connexion sera dite *régulière* si l'ensemble (dx, Dv) définit un corepère de l'espace vectoriel T_z tangent à V en $z \in V$ où Dv désigne la dérivée covariante dans $\bar{\omega}$. Rapportée au corepère (dx, Dv) la matrice $\bar{\omega}^{\alpha}_{\beta}$ s'écrit :

$$\bar{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \bar{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}(z)\, dx^{\gamma} + \bar{T}^{\alpha}_{\beta\gamma}(z)\, Dv^{\gamma} \qquad (\bar{T}^{\alpha}_{\beta o} = 0) \tag{3.2}$$

on a alors :

$$\bar{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} - \bar{\mathcal{C}}^{\alpha}_{\beta\lambda}\bar{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{o\gamma} \tag{3.3}$$

$$\bar{T}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \bar{\mathcal{C}}^{\alpha}_{\beta\gamma} - \bar{\mathcal{C}}^{\alpha}_{\beta\lambda}\bar{T}^{\lambda}_{o\gamma} \ . \tag{3.4}$$

Les coefficients $\bar{\overset{*}{\Gamma}}$ et $\bar{T}$ sont respectivement $h^{\bullet}0$ et $h^{\bullet}(-1)$ et ces derniers définissent un tenseur de type $(1,2)$. La forme de torsion associée à $\bar{\omega}$ s'écrit :

$$\bar{\Sigma}^{\alpha} = \bar{\omega}^{\alpha}_{\beta} \wedge dx^{\beta} = \tfrac{1}{2}\bar{S}^{\alpha}_{\beta\gamma}\, dx^{\beta} \wedge dx^{\gamma} + \bar{T}^{\alpha}_{\beta\gamma}\, Dv^{\gamma} \wedge dx^{\beta} \tag{3.5}$$

$$\bar{S}^{\alpha}_{\beta\gamma} = -(\bar{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} - \bar{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\alpha}_{\gamma\beta}) \tag{3.6}$$

où $\bar{S}$ et $\bar{T}$ seront appelés les tenseurs de torsion de $\bar{\omega}$.

b) Etant donnée une variété finslérienne généralisée, soit $\bar{\omega}$ une connexion linéaire de directions telle que :

$$(I) \qquad Dg_{\alpha\beta} = 0$$

$$(II) \qquad \bar{S}^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$$

$$(III) \qquad \bar{T}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \bar{T}^{\alpha}_{\gamma\beta} .$$

La condition III entraîne $\bar{T}^{\alpha}_{o\gamma} = 0$, c'est-à-dire $\bar{\omega}$ est régulière [1] . Ainsi (3.4) s'écrit:

$$\bar{T}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \bar{\mathcal{C}}^{\alpha}_{\beta\gamma} \tag{3.7}$$

de la condition I nous obtenons :

$$\bar{T}_{\gamma\,\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(\dot{\partial}_{\alpha} g_{\beta\gamma} + \dot{\partial}_{\beta} g_{\gamma\alpha} - \dot{\partial}_{\gamma} g_{\alpha\beta}) \qquad (\bar{T}_{\gamma\,\alpha\beta} = g_{\gamma\lambda}\bar{T}^{\lambda}_{\alpha\beta}) \tag{3.8}$$

REMARQUE. De (3.8) il résulte :

$$\bar{T}_{o\,\alpha\beta} = \tfrac{1}{2} a_{\alpha\beta} .$$

Multiplions les deux membres par v^{β} :

$$a_{\alpha\beta}\, v^{\beta} = 0$$

d'où :

$$a_{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{2}(\dot{\partial}_{\alpha} a_{\lambda\beta} + \dot{\partial}_{\beta} a_{\alpha\lambda})\, v^{\lambda} .$$

D'autre part on a $v^{\lambda}\dot{\partial}_{\alpha} g_{\lambda\beta} = \bar{T}_{o\alpha\beta}$, ainsi (2.4) s'écrit :

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + v^{\lambda}\dot{\partial}_{\alpha} g_{\lambda\beta} . \tag{3.9}$$

c) *Calculs des coefficients* $\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Des conditions I et II nous obtenons

$$\overline{\overset{*}{\Gamma}}_{\gamma\beta\alpha} = \tfrac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) - \tfrac{1}{2}(\dot{\partial}_\lambda g_{\beta\gamma}\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{o\alpha} + \dot{\partial}_\lambda g_{\gamma\alpha}\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{o\beta} - \dot{\partial}_\lambda g_{\alpha\beta}\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{o\gamma}) \qquad (\overline{\overset{*}{\Gamma}}_{\gamma\beta\alpha} = g_{\gamma\lambda}\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{\beta\alpha}) \tag{3.10}$$

où ∂ désigne la dérivée partielle ordinaire. Multiplions les deux membres de (3.10) par v^β :

$$v^\beta\overline{\overset{*}{\Gamma}}_{\gamma\beta\alpha} = \tfrac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta})v^\beta - \tfrac{1}{2}[(F_{\gamma\lambda} - g_{\gamma\lambda})\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{o\alpha} + \dot{\partial}_\lambda g_{\gamma\alpha}\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{oo} - (F_{\alpha\lambda} - g_{\alpha\lambda})\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{o\gamma}]. \tag{3.11}$$

Multiplions les deux membres de cette relation par v^α:

$$F_{\gamma\lambda}\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{oo} = v^\beta\partial_\beta(F_{\gamma\alpha}v^\alpha) - \partial_\gamma F \qquad (2F = F_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta = \mathfrak{L}^2) \tag{3.12}$$

par hypothèse la matrice $F_{\gamma\lambda}$ étant régulière, de la relation précédente on déduit $\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{oo}$. Ces quantités sont les mêmes que dans le cas de la connexion finslérienne associée à $F_{\alpha\beta}$ [1]. Ainsi la relation (3.12) prouve que *les géodésiques de la connexion finslérienne associée à $F_{\alpha\beta}$ coïncident avec celles de la connexion* $\overline{\omega}$. Il nous reste à calculer les quantités $\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{o\alpha}$, à cet effet posons :

$$\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{\alpha\beta}(z)\,v^\alpha v^\beta = 2\,G^\lambda(z). \tag{3.13}$$

Ecrivons la condition $D_o g_{\gamma\alpha} = 0$:

$$g_{\gamma\lambda}\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{o\alpha} + g_{\alpha\lambda}\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{o\gamma} = v^\beta\partial_\beta g_{\gamma\alpha} - 2\,\dot{\partial}_\lambda g_{\gamma\alpha}\cdot\overline{G}^\lambda \tag{3.14}$$

de (3.11) nous obtenons alors :

$$F_{\gamma\lambda}\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{o\alpha} - F_{\alpha\lambda}\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{o\gamma} = (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta})v^\beta. \tag{3.15}$$

Des relations (3.14) et (3.15) il résulte

$$(F^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\mu}_{\beta} + F^{\mu}_{\beta}\delta^{\alpha}_{\lambda})\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{o\mu} = g^{\alpha\gamma}F^{\mu}_{\beta}(v^\lambda\partial_\lambda g_{\gamma\mu} - 2\,\dot{\partial}_\lambda g_{\gamma\mu}G^\lambda) + g^{\alpha\gamma}(\partial_\beta g_{\lambda\gamma} - \partial_\gamma g_{\beta\lambda})v^\lambda \tag{3.16}$$

où nous avons posé $F^{\mu}_{\alpha} = F_{\alpha\lambda}g^{\lambda\mu}$ et $\delta^{\alpha}_{\lambda}$ est le symbole de Kronecker. Le second membre contient des quantités connues, nous avons ainsi un système de n^2 équations à n^2 inconnues, pour que ce système admette une solution il faut et il suffit que la matrice $(n^2 \times n^2)$ des coefficients de $\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{o\mu}$ soit réguliere. Par exemple dans le cas de dimension $n = 2$ nous avons la matrice (4×4) :

$$\begin{pmatrix} 2F_1^1 & F_2^1 & F_1^2 & 0 \\ F_1^2 & F_1^1+F_2^2 & 0 & F_1^2 \\ F_2^1 & 0 & F_1^1+F_2^2 & F_2^1 \\ 0 & F_2^1 & F_1^2 & 2F_2^2 \end{pmatrix} = 4(F_1^1+F_2^2)^2 \,\text{dét}\,(F^\alpha_\beta)\,.$$

Ainsi la matrice des coefficients de $\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^\lambda_{o\mu}$ est régulière si et seulement si *trace* $(F^\alpha_\beta) \neq 0$. De l'analyse des équations précédentes il résulte que les quantités $\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^\lambda_{o\mu}$ ne peuvent être calculées en général, c'est pourquoi nous imposerons certaines conditions supplémentaires au tenseur de torsion de l'espace. Dérivons par rapport à v^μ la relation (3.12)

$$2\dot\partial_\mu F_{\lambda\gamma}.G^\lambda + 2F_{\lambda\gamma}\,\dot\partial_\mu G^\lambda = v^\alpha\partial_\alpha(F_{\gamma\mu} - g_{\gamma\mu}) + (\partial_\mu g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\mu} - \partial_\gamma g_{\mu\beta})v^\beta.$$

En vertu de (3.11) cette relation s'écrit :

$$2F_{\gamma\lambda}(\dot\partial_\mu G^\lambda - \overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^\lambda_{o\mu}) = D_o\overline{T}_{o\gamma\mu}\,. \tag{3.17}$$

Nous supposerons dans la suite

$$D_o\overline{T}_{o\gamma\mu} = 0 \tag{IV}$$

$F_{\gamma\lambda}$ étant régulière de (3.17) on obtient :

$$\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^\lambda_{o\mu} = \dot\partial_\mu G^\lambda\,. \tag{3.18}$$

Si l'on désigne par ∇ la dérivée covariante dans la connexion finslérienne associée à $F_{\alpha\beta}$ *la condition IV est équivalente à* $Dv = \nabla v$. Ainsi les $\overline{\overset{*}{\Gamma}}_{\gamma\beta\alpha}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}\overline{\overset{*}{\Gamma}}_{\gamma\beta\alpha} &= \tfrac12(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) \\ &\quad - \tfrac12(\dot\partial_\lambda g_{\beta\gamma}\,\dot\partial_\alpha G^\lambda + \dot\partial_\lambda g_{\gamma\alpha}\dot\partial_\beta G^\lambda - \dot\partial_\lambda g_{\alpha\beta}.\dot\partial_\gamma G^\lambda)\,.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Les coefficients $\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^\lambda_{\beta\alpha}$ se trouvent ainsi complètement déterminés à partir du tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ et ses dérivées des deux premiers ordres. Quant aux coefficients $\overline{\Gamma}{}^\lambda_{\beta\alpha}$ on les obtient d'après (3.3). Les $\overline{\mathcal{C}}$ et $\overline{T}$ déterminent donc une connexion linéaire régulière de directions et une seule.

THEOREME. *Etant donnée une variété finslérienne généralisée* ($\text{dét}(F_{\alpha\beta}) \neq 0$) *il existe une connexion euclidienne de directions et une seule telle que le tenseur de torsion* $\overline{S}$ *est nul et le tenseur* $\overline{T}$ *satisfait aux conditions III et IV et cette connexion sera dite la connexion finslérienne généralisée.*

REMARQUE. Soit $\overline{\omega}$ la connexion finslérienne généralisée, nous désignerons par ω la connexion finslérienne associée à $F_{\alpha\beta}$. Les coefficients de ces deux connexions sont liés par :

$$\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^\lambda_{\beta\alpha} = \overset{*}{\Gamma}{}^\lambda_{\beta\alpha} - \tfrac12 M^{\lambda\gamma}(D_\alpha F_{\beta\gamma} + D_\beta F_{\gamma\alpha} - D_\gamma F_{\alpha\beta}) \tag{3.20}$$

$$\overline{T}{}^{\lambda}_{\beta\alpha} = \underset{*}{T}{}^{\lambda}_{\beta\alpha} - \tfrac{1}{2} M^{\lambda\gamma}(D^{\bullet}_{\alpha} F_{\beta\gamma} + D^{\bullet}_{\beta} F_{\gamma\alpha} - D^{\bullet}_{\gamma} F_{\alpha\beta}) \tag{3.21}$$

où nous avons désigné par Γ et T les coefficients de la connexion finslérienne associée à $F_{\alpha\beta}$, par M la matrice inverse de F et par $D_{\alpha}, D^{\bullet}_{\alpha}$ les composantes de la dérivée covariante par rapport aux dx^{α} et Dv^{α}. Pour que ces deux connexions coïncident il faut et il suffit que $D^{\bullet}_{\beta} F_{\gamma\alpha} = 0$ et dans ce cas les deux structures métriques coïncident.

4. Formule de divergence.

a) A l'aide du tenseur métrique g on peut normer l'espace vectoriel T_{py} tangent à V_n en $x = py$. Soit (e_{α}) un repère orthonormé de T_{py} par rapport à ce repère la métrique de l'espace s'écrit :

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} (\omega_{\alpha})^2 . \tag{4.1}$$

Nous désignerons par :

$$\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n . \tag{4.2}$$

Choisissons une base orthonormée (e_{α}) de T_{py} telle que le vecteur e_n coïncide avec le vecteur unitaire $l = \dfrac{v}{\| v \|}$ dans ce cas nous avons :

$$l_n = 1 , \quad l_a = 0 , \quad \beta_n = 0 , \quad \beta_a = w_{an} \qquad a = 1, 2 \dots n-1$$

où nous avons posé $\beta_{\lambda} = D l_{\lambda}$. Munissons W de la métrique riemannienne :

$$d\sigma^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} (\omega_{\alpha})^2 + \sum_{a=1}^{n-1} (\beta_a)^2 . \tag{4.3}$$

Posons :

$$\beta = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_{n-1} \tag{4.4}$$

$$\eta = \omega \wedge \beta \tag{4.5}$$

où η sera l'élément de volume de W. Soit Φ une p-forme «semi-basique» sur W nous désignerons par $*\Phi$ son adjointe relativement à ω, par $\tilde{*}\Phi$ son adjointe relativement à η. Entre ces deux opérateurs linéaires il vient :

$$\tilde{*}\Phi = *\Phi \wedge \beta . \tag{4.6}$$

Notons par δ l'opérateur de la codifférentiation, cet opérateur sera défini, pour une p-forme, par :

$$\delta = (-1)^p \, \tilde{*}^{-1} d \, \tilde{*} \tag{4.7}$$

où $\tilde{*}^{-1}$ est tel que $\tilde{*}^{-1} . \tilde{*} = \tilde{*} . \tilde{*}^{-1} = E$ avec :

$$\tilde{*}^{-1} = (-1)^{p(2n-1-p)} \tilde{*} = \tilde{*} . \tag{4.8}$$

b) Soit π une 1-forme «semi-basique» sur W, elle peut être définie par :

$$\pi = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha} \omega_{\alpha} . \tag{4.9}$$

Nous nous proposons d'évaluer $\delta\pi$, à cet effet on a d'abord $\tilde{*}\pi = (*\pi)\wedge\beta$ d'où:

$$d(\tilde{*}\pi) = d(*\pi)\wedge\beta + (-1)^{n-1}(*\pi)\wedge d\beta.$$

En vertu de (4.7) et (4.8) on obtient :

$$\delta\pi = -\tilde{*}[\,d(*\pi)\wedge\beta] + (-1)^{n}\,\tilde{*}[\,(*\pi)\wedge d\beta]\,. \tag{4.10}$$

Evaluons le second membre; tout d'abord

$$(*\pi) = \sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}a_\alpha\omega_1\wedge\dots\wedge\hat{\omega}_\alpha\wedge\dots\wedge\omega_n$$

où le signe $\wedge$ signifie que le terme correspondant doit être omis dans le produit extérieur considéré, d'où :

$$d(*\pi) \equiv (D_\alpha a_\alpha).\omega \qquad (mod\ \beta_\lambda) \tag{4.11}$$

où D est le symbole de la dérivée covariante dans la connexion finslérienne généralisée; de (4.4) on obtient par différentiation :

$$d\beta = \sum_{\lambda=1}^{n-1}(-1)^{\lambda-1}\,d\beta_\lambda\wedge\beta_1\wedge\dots\wedge\hat{\beta}_\lambda\wedge\dots\wedge\beta_{n-1}\,. \tag{4.12}$$

D'autre part $\beta_\lambda = D\,l_\lambda$ d'où :

$$d\beta_\lambda = \beta_\alpha\wedge\omega_{\lambda\alpha} + l_\alpha\overline{\Omega}_{\lambda\alpha}$$

où $\overline{\Omega}_{\lambda\alpha}$ est la 2-forme de courbure de la connexion finslérienne généralisée. Ainsi (4.12) s'écrit :

$$d\beta \equiv \Sigma(\overline{P}_{\lambda o\alpha\lambda}\,\omega_\alpha)\wedge\beta \qquad (mod\ \text{des 2-formes semi-basiques}). \tag{4.13}$$

Compte tenu de (4.13) et (4.11) l'expression $\delta\pi$ définie par (4.10) s'écrit :

$$\delta\pi = -(D_\alpha a_\alpha + a_\alpha\overline{P}_{\lambda o\alpha\lambda}). \tag{4.14}$$

D'autre part, en coordonnées locales le tenseur de courbure $\overline{P}$ est défini par (voir [1] chapitre I, § 7) :

$$\overline{P}^{\lambda}_{\beta\alpha\gamma} = \overline{\overset{*}{P}}{}^{\lambda}_{\beta\alpha\gamma} + \overline{T}^{\lambda}_{\beta\mu}\,\overline{\overset{*}{P}}{}^{\mu}_{o\alpha\gamma} \tag{4.15}$$

$$\overline{\overset{*}{P}}{}^{\lambda}_{\beta\alpha\gamma} = D_\alpha\overline{T}^{\lambda}_{\beta\gamma} - \dot{\partial}_\gamma\,\overset{*}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\beta\alpha} \tag{4.16}$$

d'où :

$$\overline{\overset{*}{P}}{}^{\lambda}_{o\alpha\gamma} = -v^\beta\,\dot{\partial}_\gamma\,\overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{\beta\alpha} = \overline{\overset{*}{\Gamma}}{}^{\lambda}_{\gamma\alpha} - \overset{*}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\gamma\alpha} - \nabla_o\,T^{\lambda}_{\gamma\alpha}. \tag{4.17}$$

On en déduit :

$$\overline{P}_\alpha = \overline{P}^{\lambda}_{o\alpha\lambda} = -\tfrac{1}{2}\,M^{\gamma\mu}(D_\alpha F_{\gamma\mu} + D_o\,\dot{\partial}_\alpha F_{\gamma\mu})\,. \tag{4.18}$$

Supposons maintenant V_n compacte, en appliquant la formule de Stokes généralisée:

$$\int_W \delta\pi\,\eta = -\int_W (D_\alpha a^\alpha + a^\alpha\overline{P}_\alpha)\,\eta = 0\,. \tag{4.19}$$

A cette formule on donne le nom de formule de divergence.

5. Les g - isométries.

a) Soit X un champ de vecteurs sur V_n nous désignerons par $exp(uX)$ le groupe local à 1-paramètre de transformations locales de V_n, engendré par X, par $exp(u\tilde{X})$ le groupe prolongé opérant sur V. Nous dirons que X est une *g-isométrie* si $exp(u\tilde{X})$ laisse invariant le tenseur g. Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que la dérivée de Lie de g par $\tilde{X}$ soit nulle et cette dérivée de Lie s'écrit :

$$L(X)g_{\alpha\beta} = D_\alpha X_\beta + D_\beta X_\alpha + \dot{\partial}_\gamma g_{\alpha\beta} D_o X^\gamma . \tag{5.1}$$

Désignons par $t(X)_{\alpha\beta}$ le tenseur défini par le second membre et considérons la 1-forme π ayant pour composantes

$$\pi_\alpha = X^\beta t(X)_{\alpha\beta} .$$

Sa codifférentielle s'écrit :

$$\delta\pi = -(t(X), t(X)) - X^\beta D^\alpha t(X)_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2} \dot{\partial}_\gamma g_{\alpha\beta} D_o X^\gamma . t^{\alpha\beta} \tag{5.2}$$

où la parenthèse désigne le produit scalaire local, d'autre part soit K la fonction $h^{\cdot}(-1)$ sur V définie par :

$$K = \tfrac{1}{2} \dot{\partial}_\gamma g_{\alpha\beta} X^\gamma t^{\alpha\beta} \tag{5.3}$$

de (5.2) et de (5.3) on obtient :

$$\delta(\pi + Kv) = -(t(X), t(X)) - (X, \xi(X)) \tag{5.4}$$

avec :

$$\xi_\gamma = D^\alpha t(X)_{\alpha\gamma} + \overline{T}_{\alpha\beta\gamma} D_o t^{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2} D_o(\dot{\partial}_\gamma g_{\alpha\beta}) t^{\alpha\beta} + \overline{P}^\alpha t(X)_{\alpha\gamma} . \tag{5.5}$$

Supposons V_n compacte, en vertu de (4.19), en intégrant la relation (5.4) sur W on obtient :

$$\langle t(X), t(X) \rangle + \langle X, \xi(X) \rangle = 0 \tag{5.6}$$

où le signe $\langle \quad \rangle$ désigne le produit scalaire global d'où :

THEOREME. *Etant donnée une variété finslérienne généralisée (V_n, W, g) dont la base V_n est compacte, pour qu'une transformation infinitésimale X soit une g-isométrie il faut et il suffit que $\xi(X) = 0$.*

b) Supposons que X soit une F-isométrie, alors X est une transformation affine pour la connexion finslérienne associée à F. Supposons d'autre part $\overline{\overset{*}{P}}{}^\lambda_{o\alpha\gamma} = 0$, d'après (4.17) X est une $(t-i)$ affine partielle pour la connexion finslérienne généralisée et on en déduit, par un calcul facile, que $\xi(X) = 0$. Ainsi X est une g-isométrie.

COROLLAIRE. *Pour une variété finslérienne généralisée compacte satisfaisant la condition $\overline{\overset{*}{P}}{}^\lambda_{o\alpha\gamma} = 0$ les g-isométries coincident avec les F-isométries.*

REFERENCES.

[1] H. AKBAR-ZADEH. Les espaces de Finsler et certaines de leurs généralisations. Ann. Sci. Ec. Norm. 3e Série t 80 1963 .

[2] E. CARTAN. Les espaces de Finsler. Paris Hermann 1934 .

[3] C. EHRESMANN. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Coll. de Topologie, Bruxelles 1950 p 29 - 55 .