TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. CAHIERS DU SÉMINAIRE DIRIGÉ PAR CHARLES EHRESMANN

PH. TONDEUR

Sur certaines connexions naturelles d'un groupe de Lie. Applications

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann, tome 6 (1964), exp. nº 5, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1964__6__A5_0>

TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE Vol. VI
Séminaire dirigé par C. EHRESMANN
FEVRIER 1963

SUR CERTAINES CONNEXIONS NATURELLES D'UN GROUPE DE LIE. APPLICATIONS.

par Ph. TONDEUR

Introduction.

E. Cartan a étudié en détail dans son mémoire [1] certaines connexions linéaires que l'on peut introduire sur la variété d'un groupe de Lie. Dans cet exposé je me propose de rappeler d'abord les définitions et quelques propriétés des connexions en question, en me basant sur le travail [6] de Nomizu, et de donner ensuite quelques applications.

1. Connexions linéaires sur une variété différentiable.

Dans tout ce qui suit, différentiable sera pris au sens C^∞ et sera le plus souvent sous-entendu. Soit V une variété différentiable (séparée, à base dénombrable), $C^\infty(V)$ l'anneau des fonctions différentiables $V \to \mathbf{R}$, $D^1(V)$ le $C^\infty(V)$-module des champs de vecteurs de V et ∇ une connexion linéaire sur V. On utilise la définition de Koszul, caractérisant ∇ par l'application encore notée ∇

$$\nabla : D^1(V) \times D^1(V) \to D^1(V)$$
$$(X, Y) \rightsquigarrow \nabla_X Y$$

satisfaisant certaines propriétés (voir p. ex. [4], p. 26 ou [6], p. 35). Toute autre connexion linéaire sur V peut être obtenue à partir de ∇ en ajoutant une application bilinéaire

$$Q : D^1(V) \times D^1(V) \to D^1(V)$$

$$(1.1) \qquad {}_Q\nabla_X Y = \nabla_X Y + Q(X, Y),$$

et toute application bilinéaire Q définit par la formule (1.1) une connexion linéaire ${}_Q\nabla$. Nous nous intéressons au cas $Q = -S$, S étant la torsion de ∇ définie par

$$(1.2) \qquad S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

La connexion $\overline{\nabla}$ définie par

$$(1.3) \qquad \overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - S(X,Y)$$

sera dite la connexion associée à ∇. Pour la torsion $\overline{S}$ de $\overline{\nabla}$ on obtient immédiatement

$$(1.4) \qquad \overline{S} = -S.$$

On considérera encore la connexion $\mathring{\nabla}$ définie par

$$(1.5) \qquad \mathring{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \tfrac{1}{2} S(X,Y)$$

ou de manière équivalente par

$$(1.5') \qquad \mathring{\nabla}_X Y = \tfrac{1}{2}(\nabla_X Y + \overline{\nabla}_X Y),$$

qui est manifestement symétrique. Cette dernière égalité montre la propriété suivante : si pour un champ de tenseurs t sur V la dérivée covariante est nulle par rapport à deux des connexions $\nabla, \overline{\nabla}$ et $\mathring{\nabla}$, alors elle est aussi nulle par rapport à la troisième con--nexion.

LEMME 1.1. *Les connexions $\nabla, \overline{\nabla}, \mathring{\nabla}$ ont mêmes géodésiques.*

Ceci découle de (1.1) qui montre que ∇ et ${}_Q\nabla$ ont mêmes géodésiques lorsque Q est antisymétrique.

2. Métrique pseudo-riemannienne à dérivée covariante nulle.

Soit g un tenseur de type (0,2) sur V. Si ∇ et ${}_Q\nabla$ sont deux connexions sur V satisfaisant à la relation (1.1), alors on établit la relation suivante pour $X, Y, Z \in D^1(V)$

$$(2.1) \qquad {}_Q\nabla_X\, g(Y,Z) = \nabla_X\, g(Y,Z) - g(Q(X,Y),Z) - g(Y,Q(X,Z)).$$

Supposons $\nabla g = 0$, c'est-à-dire $\nabla_X g = 0$ $\forall X \in D^1(V)$ et considérons la connexion $\mathring{\nabla}$ définie par (1.5). Appliquant (2.1) on obtient

$$(2.2) \qquad \mathring{\nabla}_X\, g(Y,Z) = \tfrac{1}{2}\{g(S(X,Y),Z) + g(Y,S(X,Z))\}.$$

Supposons plus particulièrement g symétrique et non-dégénéré. En vertu de la remarque suivant (1.5') $\overline{\nabla}_X g = 0 \Longleftrightarrow \mathring{\nabla}_X g = 0$. Mais la deuxième condition caractérise la connexion symétrique canoniquement associée à g. En résumant on a le

LEMME 2.1. *Soit g un tenseur de type (0,2), symétrique, non dégénéré et satisfaisant à $\nabla g = 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\overline{\nabla} g = 0$,

(ii) $\mathring{\nabla}$ *est la connexion symétrique canoniquement associée à* g,

(iii) $g(S(X,Y),Z) + g(Y,S(X,Z)) = 0$ *pour* $X, Y, Z \in D^1(V)$.

3. Tenseur de type (1, 1) à dérivée covariante nulle.

Soit J un tenseur de type $(1,1)$ sur V et supposons $\nabla J = 0$. On établit de manière analogue à la formule (2.2) du dernier paragraphe la relation

$$\overset{\circ}{\nabla}_X J(Y) = \tfrac{1}{2}\{ JS(X,Y) - S(X,JY) \}. \tag{3.1}$$

Soit J plus particulièrement une structure presque complexe, c'est-à-dire $J^2 = -$ *identité de* $D^1(V)$. Son tenseur de torsion T est défini par ([3], (15.9))

$$4T(X,Y) = J[JX,Y] + J[X,JY] + [X,Y] - [JX,JY], \tag{3.2}$$

l'application $\mathbf{R}$-bilinéaire $[\ ,\ ] : D^1(V) \times D^1(V) \to D^1(V)$ désignant le crochet défini sur les champs de vecteurs.

LEMME 3.1. *Soit J une structure presque complexe satisfaisant à $\nabla J = 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\overline{\nabla} J = 0$

(ii) $\overset{\circ}{\nabla} J = 0$

(iii) $JS(X,Y) = S(X,JY)$ *pour* $X, Y \in D^1(V)$.

Si l'une de ces conditions est satisfaite, J est une structure complexe.

DEMONSTRATION. L'équivalence des conditions indiquées suit de (3.1) et des remarques antérieures. (ii) implique d'après [3], p. 70 que la torsion T de J est nulle, donc que J est complexe.

4. Certaines connexions linéaires sur un groupe de Lie.

Soit G un groupe de Lie et $\underline{G}$ l'algèbre des champs de vecteurs invariants à gauche. Les éléments de $\underline{G}$ engendrent le $C^\infty(G)$-module $D^1(G)$ et une connexion linéaire ∇ est définie par les valeurs de $\nabla_X Y$ pour $X, Y \in \underline{G}$. Si $\nabla_X Y \in \underline{G}$ $\forall X, Y \in \underline{G}$, alors ∇ est invariant par les translations à gauche. Ce résultat est dû à Nomizu [6], p. 37 qui démontre aussi qu'inversement une application bilinéaire $\underline{G} \times \underline{G} \to \underline{G}$ détermine une connexion invariante à gauche.

Considérons la connexion définie par

$$\nabla_X Y = 0 \qquad X, Y \in \underline{G} \tag{4.1}$$

Cette connexion, ainsi que celles que nous allons introduire tout de suite, ont été étudiées par Cartan [1] (voir aussi Nomizu [6], p. 49). Les champs de vecteurs invariants à gauche sont d'après (4.1) invariants par transport parallèle. Le transport parallèle n'est donc autre chose que l'effet des translations à gauche sur les vecteurs tangents de G. Il en suit que la connexion ∇ est à courbure (et même à holonomie) nulle. Quant à la torsion S de ∇, il vient d'après (1.2)

$$S(X,Y) = -[X,Y] \qquad X, Y \in \underline{G}. \tag{4.2}$$

On voit que S est invariant à gauche, c'est-à-dire $\nabla S = 0$. Les translations à droite respectent le transport parallèle (c'est l'associativité de la loi de groupe), donc ∇ est biinvariant sur G.

Pour la connexion $\overline{\nabla}$ associée à ∇ d'après (1.3) on a donc

$$\overline{\nabla}_X Y = [X, Y] \qquad X, Y \in \underline{G} \tag{4.3}$$

et sa torsion $\overline{S}$ est donnée par

$$\overline{S}(X, Y) = [X, Y] \qquad X, Y \in \underline{G}.$$

Il est facile à voir que le transport parallèle par rapport à $\overline{\nabla}$ coïncide avec les translations à droite de G et que donc la courbure de $\overline{\nabla}$ est nulle. L'invariance à droite de $\overline{S}$ se traduit par $\overline{\nabla}\,\overline{S} = 0$. $\overline{\nabla}$ est biinvariante.

La connexion symétrique $\overset{\circ}{\nabla}$ du paragraphe 1 est donnée ici par

$$\overset{\circ}{\nabla}_X Y = \tfrac{1}{2}[X, Y] \qquad X, Y \in \underline{G}$$

et est biinvariante. Pour sa courbure R on a par définition

$$R(X,Y)Z = [\overset{\circ}{\nabla}_X, \overset{\circ}{\nabla}_Y]Z - \overset{\circ}{\nabla}_{[X,Y]} Z = \tfrac{1}{4}[X,[Y,Z]] - \tfrac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \tfrac{1}{2}[[X,Y],Z]$$

et d'après l'identité de Jacobi on obtient ([1], p. 64 et [6], p. 49)

$$R(X, Y)Z = -\tfrac{1}{4}[[X, Y], Z] \qquad X, Y, Z \in \underline{G}.$$

D'après le lemme 1.1, les connexions $\nabla, \overline{\nabla}, \overset{\circ}{\nabla}$ ont mêmes géodésiques. Les géodésiques de ∇ passant par l'élément neutre $e \in G$ coïncident avec les sous-groupes à un paramètre de G, puisque le transport parallèle est défini par les translations à gauche de G. Toute géodésique de ∇ étant la translatée à gauche d'un sous-groupe à un paramètre, on voit que G est complet pour la connexion ∇, donc aussi pour $\overline{\nabla}$ et $\overset{\circ}{\nabla}$.

5. Métrique pseudo-riemanienne biinvariante sur G.

Considérons une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée g_e sur $\underline{G}$ qui donne lieu à une métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche g sur G. Du lemme 2.1 et de (4.2) résulte immédiatement la

PROPOSITION 5.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) g est biinvariant,

(ii) $\overset{\circ}{\nabla}$ est la connexion symétrique canoniquement associée à g.

(iii) $g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]) = 0$ pour $X, Y, Z \in \underline{G}$.

Soit g biinvariant sur G. D'après (ii) le tenseur de courbure R de $\overset{\circ}{\nabla}$ s'identifie au tenseur de courbure de g. Soit Σ un 2-plan de $T_x(G)$ ne contenant pas de vecteurs isotropes de g_x. Si X_x, Y_x engendrent Σ, la courbure sectionnelle de g dans la direction Σ au point x est définie par

$$(5.1) \qquad c(x;\Sigma) = -g_x(R_x(X_x, Y_x)X_x, Y_x)/\|X_x \wedge Y_x\|^2$$

où $\|X_x \wedge Y_x\|^2 = g_x(X_x, X_x) \cdot g_x(Y_x, Y_x) - g_x(X_x, Y_x)^2$.

Soient X, Y les champs de vecteurs invariants à gauche auxquels appartiennent X_x, Y_x. D'après (4.4) on peut exprimer R à l'aide du crochet. En tenant compte de la propriété (iii) de la proposition 5.1, on obtient alors

$$(5.2) \qquad c(x;\Sigma) = \tfrac{1}{4} g_x([X,Y]_x, [X,Y]_x)/\|X_x \wedge Y_x\|^2 \qquad X, Y \in \underline{G}$$

PROPOSITION 5.2. *La courbure sectionnelle d'une métrique pseudo-riemannienne biinvariante* g *dans la direction du 2-plan* $\Sigma \subset T_x(G)$ *engendré par* X_x, $Y_x \in T_x(G)$ *(et ne contenant pas de vecteurs isotropes de* g_x*) est donnée par (5.2).*

Dans la suite nous supposons plus particulièrement que g est une métrique riemannienne biinvariante (c'est-à-dire définie positive). Alors dans (5.1) $\|X_x \wedge Y_x\|^2 > 0$ (X_x et Y_x sont linéairement indépendants) et on obtient

$$(5.3) \qquad c(x;\Sigma) \geqq 0,$$

où l'on a égalité si et seulement si $[X, Y] = 0$. Ceci implique (Samelson [7])

PROPOSITION 5.3. *Soit* G *un groupe de Lie admettant une métrique riemannienne biinvariante. Toutes les valeurs de la courbure sectionnelle sont non-négatives. La courbure sectionnelle dans la direction du 2-plan* Σ *au point* e *est nulle si et seulement si* Σ *engendre un groupe abélien.*

REMARQUE. Soit G connexe admettant une métrique riemannienne biinvariante. (5.3) implique la compacité de G (pour $\dim G > 1$) dans le cas où $\underline{G}$ ne possède aucune sous-algèbre commutative de dimension deux, ce qui signifie que $[X, Y] \neq 0$ si X_e et Y_e sont linéairement indépendants. Alors $c(x, \Sigma) > 0$ et une telle variété riemannienne (complète) est compacte. (Mais on a naturellement un résultat plus fort pour tout groupe semi-simple).

L'existence d'une métrique riemannienne biinvariante g sur G (connexe) permet encore la conclusion suivante. Comme la connexion symétrique canoniquement associée à g coïncide d'après la proposition 5.1 avec $\overset{\circ}{\nabla}$, G est une variété riemannienne complète par rapport à g. Tout point de G est donc atteint par au moins une géodésique de g passant par e (voir H. Hopf et W. Rinow, Comment. Math. Helv. 3 (1931), p. 209-225). Mais ces géodésiques se confondent avec les sous-groupes à un paramètre de G (voir fin du paragraphe 4). D'où la

PROPOSITION 5.4. *Soit* G *un groupe de Lie connexe admettant une métrique riemannienne biinvariante. Alors les sous-groupes à un paramètre recouvrent la variété du groupe.*

6. Remarque sur les 2-formes biinvariantes sur G.

Pour une 2-forme ω sur G, $d\omega$ s'exprime à l'aide de $\mathring{\nabla}\omega$ ($\mathring{\nabla}$ étant une connexion symétrique) par

$$d\omega(X, Y, Z) = \mathring{\nabla}_X\,\omega(Y, Z) + \mathring{\nabla}_Y\,\omega(Z, X) + \mathring{\nabla}_Z\,\omega(X, Y).$$

Soit ω invariant à gauche. La formule (2.2) étant valable pour un tenseur arbitraire de type (0, 2), on obtient

$$\mathring{\nabla}_X\,\omega(Y, Z) + \mathring{\nabla}_Y\,\omega(Z, X) = \mathring{\nabla}_Z\,\omega(X, Y) + \omega(S(X, Y), Z)$$

d'où

$$d\omega(X, Y, Z) = 2\,.\mathring{\nabla}_Z\,\omega(X, Y) + \omega(S(X, Y), Z).$$

Si ω est biinvariant, alors $\mathring{\nabla}\omega = 0$ (et ω est fermée). En utilisant (4.2) on a donc

$$\omega([X, Y], Z) = 0 \quad \text{pour } X, Y, Z \in \underline{G}. \tag{6.1}$$

C'est l'expression que l'on utilise classiquement pour montrer qu'un groupe semi-simple n'admet pas de 2-formes biinvariantes non nulles (car alors $\underline{G}$ est engendré par les crochets $[X, Y]$, ce qui implique bien que ω est nul). (6.1) implique aussi que sur un groupe non commutatif il n'y a pas de 2-formes non-dégénérées biinvariantes. Car si ω est une telle forme, c'est-à-dire si $\omega(X_o, Z) = 0\ \forall Z \in \underline{G}$ entraîne $X_o = 0$, alors (6.1) implique que $\underline{G}$ est commutative.

7. Groupes de Lie complexes.

Dans ce paragraphe, le groupe de Lie G sera nécessairement de dimension paire. Considérons un opérateur de carré = −identité sur $\underline{G}$ définissant une structure presque complexe invariante à gauche J sur G, satisfaisant donc à $\nabla J = 0$.

PROPOSITION 7.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) J *est biinvariant,*

(ii) $\mathring{\nabla} J = 0$,

(iii) $J[X, Y] = [X, JY]$ *pour* $X, Y \in \underline{G}$,

(iv) J *est complexe et* G *un groupe de Lie complexe par rapport à* J.

DEMONSTRATION. (4.2) et le lemme 3.1 montrent que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) et que chacune de ces conditions implique que J est complexe. Mais J étant invariant par les translations du groupe, les opérations de G respectent la structure complexe J et G est un groupe de Lie complexe. Inversement la structure complexe d'un groupe de Lie complexe est naturellement biinvariante, ce qui démontre la proposition.

REMARQUE. La condition (iii) peut être interprétée directement comme l'invariance de J par les translations à droite de G. Car la dérivée de Lie de J par rapport à $X \in \underline{G}$ s'écrit

$$(L(X)J)Y = [X, JY] - J[X, Y].$$

La nullité de $L(X)J$ exprime que J est invariant par le groupe engendré par X (invariant à gauche) qui n'est autre que la translation à droite par $expt\ X$.

Une autre démonstration de l'équivalence des propriétés (i), (iii) et (iv) de la proposition (7.1) est indiquée par Helgason [4], p. 323. Suivant [4], p. 153 nous posons la

DEFINITION. *Un opérateur J définit une structure complexe sur une algèbre de Lie réelle E si (a) $J^2 = -$ identité, (b) $J[X, Y] = [X, JY]$ pour $X, Y \in E$. La condition (b) est encore équivalente à (b') $J[X, Y] = [JX, Y]$ pour $X, Y \in E$.*
On peut écrire (b) à l'aide de $Ad\ X : Y \to [X, Y]$ comme suit

$$J \circ Ad\ X = Ad\ X \circ J \tag{7.1}$$

et (b')

$$J \circ Ad\ X = Ad\ (JX). \tag{7.1'}$$

PROPOSITION 7.2. *L'algèbre de Lie complexifiée $\tilde{E}$ d'une algèbre de Lie E avec structure complexe J n'est pas simple.*

DEMONSTRATION. La représentation complexifiée $\widetilde{Ad} : \tilde{E} \to \widetilde{L(E)} = L(\tilde{E})$ coïncide avec la représentation adjointe de $\tilde{E}$. L'opérateur complexifié $\tilde{J} : \tilde{E} \to \tilde{E}$ possède les deux valeurs propres $i, -i$ et $\widetilde{Ad}$ est donc réductible d'après le lemme de Schur. La proposition résulte alors du fait qu'un sous-espace $\widetilde{Ad}$-invariant de $\tilde{E}$ est un idéal de $\tilde{E}$.

PROPOSITION 7.3. *La forme de Killing B d'une algèbre de Lie E avec structure complexe J satisfait à l'identité*

$$B(JX, JY) = -B(X, Y) \qquad X, Y \in E. \tag{7.2}$$

DEMONSTRATION. Soit Tr l'abbréviation de trace. Alors B est définie par

$$B(X, Y) = Tr(Ad\ X \circ Ad\ Y)$$

En utilisant (7.1') et (7.1) on a donc

$$\begin{aligned} B(JX, JY) &= Tr(Ad(JX) \circ Ad(JY)) = Tr(J \circ AdX \circ J \circ Ad\ Y) = Tr(J^2 \circ AdX \circ AdY) \\ &= -Tr(AdX \circ AdY) = -B(X, Y) \qquad C.Q.F.D. \end{aligned}$$

PROPOSITION 7.4. *Soit E une algèbre de Lie avec structure complexe J, E' son algèbre dérivée et Z son centre. La restriction de J à E' et Z définit sur ces algèbres des structures complexes. E' et Z sont donc en particulier de dimension paire.*

Ceci résulte encore de la propriété (b) dans la définition d'une structure complexe sur E. On a alors le

COROLLAIRE. *Soit G un groupe de Lie complexe. La structure complexe de G induit des structures complexes sur les sous-groupes G' et Z engendrés par l'algèbre dérivée $\underline{G}'$ et le centre $\underline{Z}$ de $\underline{G}$, et G' et Z sont des groupes complexes par rapport à ces structures complexes.*

PROPOSITION 7.5. *Soit G un groupe complexe connexe admettant une métrique riemannienne biinvariante. Alors G est commutatif.*

DEMONSTRATION. Nous allons montrer que dans la décomposition directe $\underline{G} = \underline{G}' \oplus \underline{Z}$ l'algèbre dérivée $\underline{G}'$ ne contient que l'élément zéro, ce qui impliquera bien l'énoncé. La forme de Killing B' de $\underline{G}'$ est définie négative (Pontrjagin, L.S. Topologische Gruppen II. Leipzig 1958, p. 233). D'autre part d'après les propositions 7.3 et 7.4 la restriction $J' = J/\underline{G}'$ satisfait à l'identité $B'(J'X, J'X) = -B'(X, X)$ $\forall X \in \underline{G}'$. Donc $X = 0$ $\forall X \in \underline{G}'$ et $\underline{G}' = \{0\}$, C.Q.F.D.

8. Remarque finale.

Nous indiquons encore brièvement une autre interprétation de la connexion $\overset{\circ}{\nabla}$ utilisée sur la variété d'un groupe de Lie G connexe. Considérons le groupe produit $P = G \times G$. Par la définition

$$(8.1) \qquad (x_1, x_2) \circ x = x_1 x x_2^{-1} \qquad (x_1, x_2) \in P,\ x \in G$$

P opère transitivement sur G ([5], p. 181). Le groupe d'isotropie H au point $e \in G$ est la diagonale de $P : H = \Delta(G \times G)$. Le groupe d'isotropie linéaire $\tilde{H}$ est donc isomorphe au groupe $ad\, G$ où $ad : G \to GL(\underline{G})$ désigne la représentation adjointe de G.

L'automorphisme involutif $S : P \to P$ défini par $S(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ pour $(x_1, x_2) \in G \times G$ donne lieu à une structure d'espace homogène symétrique sur $P/H \cong G$ en tant que variété ([5], p. 181). La connexion canonique de cet espace s'identifie à la connexion $\overset{\circ}{\nabla}$ introduite au paragraphe 4. Pour cela il suffit de voir que $\overset{\circ}{\nabla}$ est invariante par la symétrie $S_e : G \to G$ définie par passage au quotient de $S : P \to P$ ([6], theorem 15.3).

Les tenseurs biinvariants sur G sont exactement les tenseurs sur P/H invariants sous l'opération (8.1) de P et sont donc en correspondance biunivoque avec les tenseurs sur $T_e(G)$ resp. $\underline{G}$ invariant par $ad\, G$. En linéarisant cette dernière condition c'est-à-dire en exprimant l'invariance par $ad\, G$ par l'invariance par rapport à $Ad\, \underline{G}$ on obtient immédiatement les conditions (iii) des propositions 5.1 et 7.1. Et il suit de [6], theorem 15.4 que les tenseurs biinvariants sur G sont à dérivée covariante nulle dans la connexion $\overset{\circ}{\nabla}$, ce qui démontre les conditions (ii) des propositions 5.1 et 7.1.

Références.

[1] E. CARTAN. La géométrie des groupes de transformations. J. Math. Pures et Appl. 6 (1927), 1-119.

[2] C. CHEVALLEY. Theory of Lie groups. Vol. I. Princeton Univ. Press 1946.

[3] A. FRÖLICHER. Zur Differentialgeometrie der komplexen Strukturen. Math. Ann. 129 (1955), 50-95.

[4] S. HELGASON. Differential geometry and symmetric spaces. Academic Press 1962.

[5] A. LICHNEROWICZ. Géométrie des groupes de transformations. Dunod Paris 1958.

[6] K. NOMIZU. Invariant affine connexions on homogeneous spaces. Amer. J. Math. 76 (1954), 33-65.

[7] H. SAMELSON. On curvature and characteristic of homogeneous spaces. Michigan Math. J. 5 (1958), 13-18.

[8] Ph. TONDEUR. Zur Frage der Ueberdeckbarkeit einer Lieschen Gruppe durch ihre einparametrigen Untergruppen. Math. Ann. 147 (1962), 373-377.

[9] Ph. TONDEUR. Fastkomplexe Strukturen auf einer Lieschen Gruppe. Comment. Math. Helv. 38 (1963), 14-25.