TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. CAHIERS DU SÉMINAIRE DIRIGÉ PAR CHARLES EHRESMANN

DANIEL LEHMANN

Une généralisation de la géométrie du plongement

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann, tome 6 (1964), exp. nº 2, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1964__6__A2_0>

TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE Vol. VI
Séminaire dirigé par C. EHRESMANN
NOVEMBRE 1962

UNE GENERALISATION DE LA GEOMETRIE DU PLONGEMENT.

par Daniel LEHMANN

Sur une variété U régulièrement plongée dans une variété riemannienne V on peut étudier essentiellement deux sortes de propriétés,

- des propriétés intrinsèques exprimées à l'aide de la structure riemannienne induite.

- des propriétés faisant intervenir la position de U dans V, exprimées à l'aide de la seconde forme fondamentale et de la dérivation des champs de vecteurs normaux à U.

Nous allons généraliser en termes de connexions dans les espaces fibrés cette situation, et certains résultats qui lui sont inhérents. [7]

Notations.

Toutes les variétés et applications considérées seront de classe C^∞. On notera P (base U, projection p, groupe H) et Q (base V, projection q, groupe G), deux espaces fibrés principaux différentiables.

On supposera que H est un sous-groupe de Lie fermé de G, et que $G|H$ est réductif. On notera $\underline{G}$ et $\underline{H}$ les algèbres de Lie de G et H. On choisit une fois pour toutes un supplémentaire $\mathfrak{M}$ de $\underline{H}$ dans $\underline{G}$ tel que $[\underline{H}, \mathfrak{M}] \subset \mathfrak{M}$. Si $a \in \underline{G}$, on notera $a_{\underline{H}}$ (resp. $a_{\mathfrak{M}}$) la projection de a sur $\underline{H}$ (resp. $\mathfrak{M}$) parallèlement à $\mathfrak{M}$ (resp. $\underline{H}$).

Si f est un morphisme de U dans V, on notera Qf (projection p') l'image réciproque de Q par f, $\tilde{f}$ l'application canonique de Qf dans Q.

On dira que «*(U, V, f) vérifie la condition R.D.*» si U et V sont dénombrables à l'infini, et s'il existe un morphisme r de V sur U tel que $r \circ f$ soit l'identité sur U et $f \circ r$ soit homotope à l'identité sur V. On identifiera Qfr à Q, et on notera $\tilde{r}$ l'application canonique de Q sur Qf. (*)

(*) Si f est un plongement régulier de U dans V (dénombrable à l'infini), et si V est un voisinage tubulaire de U, la condition R.D. est vérifiée.

Pour toute variété W et tout point $x \in W$, on notera $T_x(W)$ l'espace tangent en x à W, $D(W)$ l'anneau des fonctions différentiables sur W, et $T(W)$ le fibré vectoriel tangent à W. Si A est un fibré principal différentiable de base W et de groupe structural K, et si $\mathfrak{R}$ est une représentation linéaire de K dans un espace vectoriel réel M on notera $M_{\mathfrak{R}}[A]$ le fibré vectoriel de fibre type M, modelé sur A, associé à $\mathfrak{R}$.

On notera $\overline{M_{\mathfrak{R}}[A]}$ le $D(W)$-module des sections différentiables de $M_{\mathfrak{R}}[A]$ et λ l'isomorphisme canonique de $D(W)$-modules de l'espace $\overset{p}{\Lambda}(\overline{T(W)})^* \underset{D(W)}{\otimes} \overline{M_{\mathfrak{R}}[A]}$ des p-formes sur W à valeurs dans $M_{\mathfrak{R}}[A]$ sur l'espace $\overset{p}{\Lambda}_{\mathfrak{R}(K)}(A, M)$ des p-formes α sur A à valeurs dans M qui sont

- tensorielles (c'est-à-dire telles que $\alpha(X_1, \dots, X_p) = 0$ si l'un des vecteurs X_i est vertical)
- de type $\mathfrak{R}(K)$ (c'est-à-dire telles que $\alpha(X_1 k, \dots, X_p k) = \mathfrak{R}(k^{-1}).\alpha(X_1, \dots, X_p)$).

On notera ∇_ω la différentiation covariante : $\overset{p}{\Lambda}_{\mathfrak{R}(K)}(A, M) \to \overset{p+1}{\Lambda}_{\mathfrak{R}(K)}(A, M)$ associée à une forme de connexion ω sur A : $(\nabla_\omega \alpha)(X_1, \dots, X_{p+1}) = d\alpha(\mathcal{H}or\, X_1, \dots, \mathcal{H}or\, X_{p+1})$.

CHAPITRE I

GENERALITES.

A. Plongements d'espaces fibrés. Formes de Plongement. Connexions induites.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "p"'] & & Qf \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dl, "p'"] & Q \arrow[d, "g"] \\ & U \arrow[rr, "f"'] & & V \end{tikzcd}$$

On appellera «plongement de P dans Q» un couple (f, ρ) d'applications où f est un morphisme de U dans V et ρ un plongement régulier de P dans Qf vérifiant :

$$p' \circ \rho = p$$

$$\rho(\xi h) = \rho(\xi) . h \qquad \forall \xi \in P, \forall h \in H.$$

Donnons nous - une forme de connexion ω sur Q

- un plongement (f, ρ) de P dans Q

et notons ω' (resp. Pl) la 1-forme sur P image réciproque par $\tilde{f} \circ \rho$ de $\omega_{\underline{H}}$ (resp. $\omega_{\mathfrak{M}}$).

PROPOSITION 1.

a) ω' *est une forme de connexion sur* P.

b) $Pl \in \overset{1}{\Lambda}_{ad\,H}(P, \mathfrak{M})$ *où* $ad\,H$ *désigne la restriction à* $\mathfrak{M}$ *de la représentation adjointe de* H *dans* $\underline{G}$ $([\underline{H}, \mathfrak{M}] \subset \mathfrak{M})$.

Puisque $\rho(\xi h) = \rho(\xi).h \quad \forall \xi \in P \quad \forall h \in H$, on peut affirmer :

- d'une part que l'image par ρ du champ de vecteurs fondamental A'^* sur P engendré par l'élément A de $\underline{H}$ est la restriction à $\rho(P)$ du champ de vecteurs fondamental A^* sur Qf engendré par le même élément A de $\underline{H}$.

- d'autre part que $\rho(d\xi.h) = \rho(d\xi).h \quad \forall d\xi \in T_\xi(P) \quad \forall h \in H$.

On en déduit, compte tenu de ce que $\omega\tilde{f}$ est une forme de connexion sur Qf

- d'une part que $\omega'(A'^*) = A$ et $Pl(A'^*) = 0$.

- d'autre part que $(\omega' + Pl)(d\xi.h) = ad(h^{-1})(\omega'(d\xi) + Pl(d\xi))$.

Mais puisque $(ad\,H)\underline{H} \subset \underline{H}$ et $(ad\,H)\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$, la représentation adjointe de H dans $\underline{G}$ commute avec les projections de $\underline{G}$ sur $\underline{H}$ et $\mathfrak{M}$. On en déduit: $ad(h^{-1})\omega'(d\xi) = \omega'(d\xi.h)$ et $ad(h^{-1})\,Pl(d\xi) = Pl(d\xi.h)$.

La connexion ω' *sera dite «induite par* $(\omega, (f, \rho), \mathfrak{M})$» (1)

La 1-forme Pl *sera appelée «forme de plongement» de* P *dans* Q *relativement à* $(\omega, (f, \rho), \mathfrak{M})$.

Soit $\mathfrak{R}$ une représentation linéaire de G dans un espace vectoriel M. Composant $\mathfrak{R}$

(1) Les notations de plongements d'espaces fibrés et de connexions induites ont été explicitées indépendamment dans [4] et [7] mais figuraient déjà implicitement dans de nombreux articles antérieurs.

avec l'injection de H dans G, on en déduit une représentation $\mathfrak{R}'$ de H dans M.

PROPOSITION 2. *Si α est une p-forme sur Q appartenant à $\overset{p}{\Lambda}_{\mathfrak{R}(G)}(Q, M)$*

a) $\widetilde{\alpha f\rho}$ appartient alors à $\overset{p}{\Lambda}_{\mathfrak{R}'(H)}(P, M)$

b) $(\nabla_\omega \alpha)\tilde{f} \circ \rho = \nabla_{\omega'}(\alpha \tilde{f} \circ \rho) + Pl \wedge \alpha \tilde{f} \rho$

(de la représentation $\mathfrak{R} : G \to GL(M)$ on déduit une représentation des algèbres de Lie $\underline{\mathfrak{R}} : \underline{G} \to End\, M$, d'où une forme bilinéaire : $\underline{G} \times M \to M$; c'est au sens de cette forme bilinéaire que le produit extérieur $Pl \wedge \alpha \tilde{f} \rho$ doit être compris).

La partie a) est évidente. D'après [1] ou [8]

$$\nabla_\omega \alpha = d\alpha + \omega \wedge \alpha \qquad \text{et} \qquad \nabla_{\omega'}(\alpha \tilde{f} \rho) = d(\alpha \tilde{f} \rho) + \omega' \wedge (\alpha \tilde{f} \rho) .$$

Donc
$$\begin{aligned}(\nabla_\omega \alpha)\tilde{f} \circ \rho &= (d\alpha)\tilde{f}\rho + \omega \tilde{f} \rho \wedge \alpha \tilde{f} \rho \\ &= d(\alpha \tilde{f} \rho) + \omega' \wedge \alpha \tilde{f} \rho + Pl \wedge \alpha \tilde{f} \rho \\ &= \nabla_{\omega'} \alpha \tilde{f} \circ \rho + Pl \wedge \alpha \tilde{f} \circ \rho .\end{aligned}$$

Formule des courbures : Notons Ω et Ω' les formes de courbure des connexions ω et ω'.

PROPOSITION 3. $\Omega \tilde{f} \circ \rho = \Omega' + \nabla_{\omega'} Pl + [Pl, Pl]$.

En effet
$$\Omega = d\omega + [\omega, \omega]$$
et
$$\Omega' = d\omega' + [\omega', \omega'] .$$
Donc
$$\begin{aligned}\Omega \tilde{f} \rho &= d\omega \tilde{f} \rho + [\omega \tilde{f} \rho, \omega \tilde{f} \rho] \\ &= d(\omega' + Pl) + [\omega' + Pl, \omega' + Pl] \\ &= (d\omega' + [\omega', \omega']) + (dPl + \omega' \wedge Pl) + [Pl, Pl] \\ \Omega \tilde{f} \rho &= \Omega' + \nabla_{\omega'} Pl + [Pl, Pl] .\end{aligned}$$

Nous appellerons «formule des courbures» l'identité dont le théorème 1 est l'objet. On dira que (f, ρ) est un plongement «affine» (resp. «développable») de P dans (Q, ω) si $Pl = 0$ (resp. $\Omega \tilde{f} \rho = \Omega'$). On voit qu'un plongement est développable si et seulement si :

$$\nabla_{\omega'} Pl + [Pl, Pl] = 0 .$$

Cette condition est moins forte que $Pl = 0$.

Equation de Gauss-Codazzi. Si l'on se donne
- un plongement (f, ρ) de P dans Q
- une forme de connexion ω' sur P
- une 1-forme $Pl \in \overset{1}{\Lambda}_{adH}(P, \mathfrak{M})$

et si l'on suppose que (U, V, f) vérifie $R.D.$, on a :

THEOREME 1.

a) Il existe une forme de connexion ω sur Q telle que ω' et Pl soient induites par

$(\omega,(f,\rho),\mathfrak{M})$. *Cette forme* ω *est unique lorsque* $U = V$ *et* $f = (id)_V$.
b) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe sur Q *une forme de connexion* ω *sur* Q à courbure nulle *telle que* ω' *et* Pl *soient induites par* $(\omega,(f,\rho),\mathfrak{M})$ *est que les données* ω' *et* Pl *vérifient l'équation :*

$$\Omega' + \nabla_{\omega'} Pl + [Pl, Pl] = 0 .$$

Il existe en effet sur Qf une forme de connexion ω_1 et une seule telle que $\omega_1\rho = \omega' + Pl$. Soit r une application $V \to U$ telle que

$$f \circ r \sim (id)_V$$
$$r \circ f = (id)_U$$

$\omega_1 r$ est une forme de connexion sur Qfr, induisant ω_1 sur $Qf = Qfrf$. Par isomorphisme de Qfr sur Q on en déduit une forme de connexion ω sur Q, si l'on choisit cet isomorphisme $\tilde{\varphi}$ de façon que sa projection $\varphi : V \to V$ vérifie $\varphi \circ f = f$, on aura $\omega f = \omega_1$. Il est alors immédiat que ω est une forme de connexion sur Q induisant ω' et Pl sur P.

La condition $\Omega' + \nabla_{\omega'} Pl + [Pl, Pl] = 0$ est évidemment nécessaire pour qu'il existe une telle connexion ω à courbure nulle, ceci en vertu de la formule des courbures. Réciproquement, si cette condition est vérifiée, la connexion ω_1 construite précédemment est à courbure Ω_1 nulle.
En effet $\Omega_1(\rho d_1\xi, \rho d_2\xi) = 0 \quad \forall d_1\xi,\, d_2\xi \in T_\xi(P)$
en vertu de la formule des courbures; comme les vecteurs verticaux de $T_{\rho(\xi)}(Qf)$ et les vecteurs tangents à $\rho(P)$ engendrent tous les vecteurs tangents à Qf en $\rho(\xi)$ on en déduit $\Omega_1(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in T_{\rho(P)}(Qf)$. Comme Ω_1 est de type *ad* G, on en déduit $\Omega_1 = 0$. La connexion $\omega_1 \tilde{r}\tilde{\varphi}$ est donc également à courbure nulle.

EXEMPLE. Prenons pour P le fibré principal $G \to G/_H$ et munissons le de la forme de connexion ω' et de la forme Pl ainsi définies :

$$\omega'(dg) = (g^{-1}dg)_{\underline{H}} \qquad\qquad Pl(dg) = (g^{-1}dg)_{\mathfrak{M}} .$$

La condition $\Omega' + \nabla_{\omega'} Pl + [Pl, Pl] = 0$ est satisfaite. Les champs de vecteurs horizontaux de P sont engendrés par les champs de vecteurs invariants à gauche M^* sur G définis par les éléments M de $\mathfrak{M} \subset \underline{G}$ ([9] p. 49). Il suffit de vérifier $(\Omega' + \nabla_{\omega'} Pl + [Pl, Pl])(M^*, N^*) = 0$.

Or
$$\Omega'(M^*, N^*) = -[M, N]_{\underline{H}}$$
$$(\nabla_{\omega'} Pl)(M^*, N^*) = -Pl([M^*, N^*]) = -[M, N]_{\mathfrak{M}}$$
$$[Pl, Pl](M^*, N^*) = [M, N]$$

d'où l'égalité cherchée.

B. Cas de groupes H et G m - n permis.

Soient m et n deux entiers > 0 $(m < n)$. Notons $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Identifions $\{e_1, \dots, e_m\}$ à la base canonique de $\mathbf{R}^m$, donc $\mathbf{R}^m$ a un sous-espace de $\mathbf{R}^n$. Soit N^{n-m} le sous-espace de $\mathbf{R}^n$ engendré par $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$: $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^m \oplus N^{n-m}$ Identifions naturellement $GL(m, \mathbf{R})$ au sous-groupe de $GL(n, \mathbf{R})$ formé par les opérateurs qui laissent N^{n-m} invariant point par point. Si H est un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie G, on dira que

«H et G sont $m-n$ permis» si H est un sous-groupe de Lie de $GL(m, \mathbf{R})$, si G est un sous-groupe de Lie de $GL(n, \mathbf{R})$ et si $H = G \cap GL(m, \mathbf{R})$.

Par exemple, les couples suivants sont $m-n$ permis : $GL(m, \mathbf{R})$ et $GL(n, \mathbf{R})$, $O(m)$ et $O(n)$, $O(m)$ et $SO(n)$.

Supposons, dans la suite du § B, H et G $m-n$ permis. L'algèbre de Lie $\underline{H}$ s'identifiant alors au sous-espace des matrices $((a_{ij}))$ de $\underline{G}$ telles que $a_{ij} = 0$ pour $i > m$ ou $j > m$, prenons pour $\mathfrak{M}$ l'espace des matrices $((a_{ij}))$ de $\underline{G}$ telles que $a_{ij} = 0$ chaque fois que l'on a simultanément $i \leq m$ et $j \leq m$. On vérifie aisément que $\underline{G} = \underline{H} \oplus \mathfrak{M}$ et $[\underline{H}, \mathfrak{M}] \subset \mathfrak{M}$. Remarquons par ailleurs que les éléments de $\mathfrak{M}$, considérés comme endomorphismes de $\mathbf{R}^n$, appliquent $\mathbf{R}^m$ dans N^{n-m}. Décomposons $\mathfrak{M}$ en la somme directe $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}_3$ où $\mathfrak{M}_1$ (resp. $\mathfrak{M}_2$; resp. $\mathfrak{M}_3$) est l'ensemble des endomorphismes de $\mathbf{R}^n$ appliquant $\mathbf{R}^m$ dans N^{n-m} et N^{n-m} sur $\{0\}$ (resp. $\mathbf{R}^m$ sur $\{0\}$ et N^{n-m} dans $\mathbf{R}^m$; resp. $\mathbf{R}^m$ sur $\{0\}$ et N^{n-m} dans N^{n-m}).

On vérifie que $[\underline{H}, \mathfrak{M}_1] \subset \mathfrak{M}_1$, $[\underline{H}, \mathfrak{M}_2] \subset \mathfrak{M}_2$, $[\underline{H}, \mathfrak{M}_3] = \{0\}$.

Notons p_i $(i = 1, 2, 3)$ les projecteurs de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}_i$ associés à cette décomposition.

Notons - $\mathcal{R}_m$ la représentation canonique de H dans $\mathbf{R}^m$

- $\mathcal{R}_n$ la représentation canonique de G dans $\mathbf{R}^n$

- $\mathcal{R}'_n$ la représentation de H dans $\mathbf{R}^n$ obtenue en composant $\mathcal{R}_n$ avec l'injection de H dans G.

- $\mathcal{R}'_o$ la représentation triviale de H dans N^{n-m} qui, à tout élément h de H, associe l'identité sur N^{n-m}.

Soient $P \to U$ et $Q \to V$ les deux fibrés principaux de groupe H et G introduits dans les notations. Soit (f, ρ) un plongement de P dans Q. (On suppose toujours H et G $m-n$ permis).

THEOREME 2. *Le fibré vectoriel $\mathbf{R}^n_{\mathcal{R}_n}[Qf]$ se décompose canoniquement en la somme de Whitney de deux sous-fibrés vectoriels différentiables, dont l'un est canoniquement isomorphe à $\mathbf{R}^m_{\mathcal{R}_m}[P]$, et dont l'autre est un fibré* trivial *canoniquement isomorphe à $N^{n-m}_{\mathcal{R}'_o}[P]$.*

Puisque les injections canoniques $i : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ et $j : N^{n-m} \to \mathbf{R}^n$ vérifient :

$$\mathcal{R}'_n(h) \circ i = i \circ \mathcal{R}_m(h) \qquad \forall\, h \in H$$

et

$$\mathcal{R}'_n(h) \circ j = j \circ \mathcal{R}'_o(h) \qquad \forall\, h \in H,$$

elles induisent des homomorphismes injectifs de fibrés vectoriels $\bar{i} : \mathbf{R}^m_{\mathcal{R}_m}[P] \to \mathbf{R}^n_{\mathcal{R}'_n}[P]$ et $\bar{j} : N^{n-m}_{\mathcal{R}'_o}[P] \to \mathbf{R}^n_{\mathcal{R}'_n}[P]$. Puisque $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^m \oplus N^{n-m}$,

$$\mathbf{R}^n_{\mathcal{R}'_n}[P] = \bar{i}(\mathbf{R}^m_{\mathcal{R}_m}[P]) \oplus \bar{j}(N^{n-m}_{\mathcal{R}'_o}[P]) .$$

Comme, d'autre part, ρ permet d'identifier P à un sous-fibré principal de Qf, les fibrés $\mathbf{R}^n_{\mathcal{R}'_n}[P]$ et $\mathbf{R}^n_{\mathcal{R}_n}[Qf]$ sont canoniquement isomorphes. Enfin, puisque la représentation $\mathcal{R}'_o$ de H dans N^{n-m} est triviale, le fibré $N^{n-m}_{\mathcal{R}'_o}[P]$ est trivial, d'où le théorème 2. On identifiera désormais $\mathbf{R}^n_{\mathcal{R}_n}[Qf]$ et $\mathbf{R}^n_{\mathcal{R}'_n}[P]$ et l'on notera respectivement E, E' et N les fibrés $\mathbf{R}^n_{\mathcal{R}_n}[Qf]$, $\bar{i}(\mathbf{R}^m_{\mathcal{R}_m}[P])$ et $\bar{j}(N^{n-m}_{\mathcal{R}'_o}[P])$. Ainsi, $E = E' \oplus N$. On notera p_U (resp. p_N) la projection de E sur E' (resp. N) parallèlement à N (resp. E').

Soit maintenant ω une loi de dérivation sur Q.

$\omega' = (\omega \tilde{f} \rho)_{\underline{H}}$ la connexion induite sur P

$Pl = (\omega \tilde{f} \rho)_{\mathfrak{M}}$ la forme de plongement .

Posons $Pl^i = p_i \circ Pl$ pour $i = 1, 2, 3$. Puisque $[\underline{H}, \mathfrak{M}_i] \subset \mathfrak{M}_i$, la restriction $\mathfrak{M}_i$ de la représentation adjointe de H dans $\underline{G}$ est une représentation dans $\mathfrak{M}_i$. Chaque forme Pl_i appartient évidemment à $\Lambda^1_{adH}(P, \mathfrak{M}_i)$ et, par conséquent, est l'image par l'isomorphisme λ défini dans l'introduction d'une 1 - forme $\mathcal{P}l^i$ sur U à valeurs dans $\mathfrak{M}_{i_{adH}}[P]$. D'autre part, les $D(U)$-modules $\overline{\mathfrak{M}_{1_{adH}}[P]}$, $\overline{\mathfrak{M}_{2_{adH}}[P]}$ et $\overline{\mathfrak{M}_{3_{adH}}[P]}$ sont respectivement égaux à $\bar{E}'^* \underset{D(U)}{\otimes} \bar{N}$, $\bar{N}^* \underset{D(U)}{\otimes} \bar{E}'$ et $End\, \bar{N}$. A la forme de connexion $\omega \tilde{f}$, est associée une loi de dérivation D sur $\bar{E}$, et à la forme de connexion ω' est associée une loi de dérivation D' (resp. D'') sur $\bar{E}'$ (resp. $\bar{N}$).

THEOREME 3. *La loi de dérivation D' vérifie*

$$D'_X \sigma = p_U(D_X \sigma) \qquad \forall\, X \in \overline{T(U)}$$
$$\forall\, \sigma \in \bar{E}' .$$

La valeur $\mathcal{P}l^1_X$ (resp. $\mathcal{P}l^2_X$) de la 1-forme $\mathcal{P}l^1$ (resp. $\mathcal{P}l^2$) sur le champ de vecteurs $X \in \overline{T(U)}$ est l'application $D(U)$ linéaire de $\bar{E}'$ dans $\bar{N}$ (resp. $\bar{N}$ dans $\bar{E}'$) définie par

$$(\mathcal{P}l^1_X)(\sigma) = p_N(D_X \sigma) \quad \forall\, \sigma \in \bar{E}' \ (\textit{resp. } (\mathcal{P}l^2_X)(\nu) = p_U(D_X \nu) \ \forall\, \nu \in \bar{N}) .$$

La valeur $\mathcal{P}l^3_X$ de $\mathcal{P}l^3$ en X est l'application $D(U)$ linéaire de $\bar{N}$ dans $\bar{N}$ définie par:

$$(\mathcal{P}l^3_X)(\nu) = p_N(D_X \nu) - D''_X \nu \qquad \forall\, \nu \in \bar{N} .$$

Soit $\xi = \rho(\xi')$ un élément de $\rho(P)$.

Notons :

G_ξ l'espace des vecteurs verticaux de $T_\xi(Qf)$

H_ξ l'espace $\rho(T_{\xi'}(P))$ qui est un sous-espace de G_ξ

$\mathcal{H}_\xi$ l'espace des vecteurs horizontaux de $T_\xi(Qf)$ relativement à $\tilde{\omega f}$.

$\mathcal{H}'_\xi$ l'espace des vecteurs de $T_\xi(Qf)$ qui sont images par ρ des vecteurs horizontaux de $T_\xi(P)$ relativement à ω'.

$\mathfrak{M}_\xi$ et $(\mathfrak{M}_i)_\xi$ l'espace des vecteurs verticaux de $T_\xi(Qf)$ engendré par $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

On a évidemment $\mathfrak{M}_\xi = \bigoplus_{i=1,2,3} (\mathfrak{M}_i)_\xi$.

Puisque ρ commute avec les opérations de H, on a : $G_\xi = H_\xi \oplus \mathfrak{M}_\xi$.

Puisque $\tilde{\omega f} \rho = \omega' + Pl$, $\mathfrak{M}_\xi \oplus \mathcal{H}_\xi = \mathfrak{M}_\xi \oplus \mathcal{H}'_\xi$.

Si $X \in \overline{T(U)}$, notons X^* (resp. X'^*) le relèvement horizontal de X dans Qf (resp. l'image par ρ du relèvement horizontal de X dans P). Observons que $X^*_\xi - X'^*_\xi$ est égal à l'opposé du vecteur $\overline{Pl(X'^*_\xi)}$ engendré par l'élément $Pl(X'^*_\xi)$ de $\mathfrak{M}$ ($X^*_\xi - X^*_\xi \in \mathfrak{M}_\xi$). Notons $\overline{Pl(X'^*)}$ le champ de vecteurs correspondant.

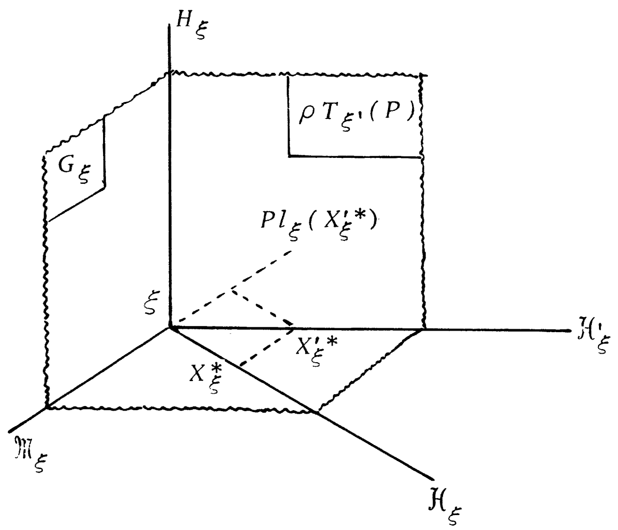

schéma de l'espace $T_\xi(Qf)$

Si $\sigma \in \overline{E}$, notons $\tilde{\sigma}$ l'élément correspondant de $\mathring{\Lambda}_G(Qf, \mathbf{R}^n)$. Les fonctions de $\mathring{\Lambda}_G(Qf, \mathbf{R}^n)$ correspondant aux sections σ du sous-fibré vectoriel E' de E (resp. aux sections ν du sous-fibré vectoriel N de E) sont celles dont la restriction à $\rho(P)$ prend ses valeurs dans $\mathbf{R}^m$ (resp. N^{n-m}). D'autre part, étant de type $\mathcal{R}_n(G)$, les fonctions de $\mathring{\Lambda}_G(Qf, \mathbf{R}^n)$ sont entièrement déterminées par leur restriction à $\rho(P)$.

D'après [6],
$$\widetilde{D_X \sigma} = X^* . \tilde{\sigma}$$
$$= X'^* . \tilde{\sigma} - \overline{Pl(X'^*)} . \tilde{\sigma}$$

Observons enfin que, pour une fonction $\varphi \in \mathring{\Lambda}_G(Qf, \mathbf{R}^n)$, la dérivée $\overline{A}.\varphi$ relativement au champ de vecteurs fondamental $\overline{A}$ engendré par l'élément A de $\underline{G}$ est égale à $\langle -A, \varphi \rangle$ (où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne l'application bilinéaire canonique $\underline{G} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$). En effet le groupe des translations à droite $(exp\ tA)_{t \in \mathbf{R}}$ est le groupe local à 1 paramètre engendré par le champ $\overline{A}$.

On a donc : $$(\overline{A}.\varphi)(\xi) = lim_{t \to o} \tfrac{1}{t}[\varphi(\xi.exp\ tA) - \varphi(\xi)].$$

Mais $$\varphi(\xi.exp\ tA) = \langle (exp\ tA)^{-1}, \varphi(\xi) \rangle .$$

Donc $$\begin{aligned}(\overline{A}.\varphi)(\xi) &= \langle lim_{t \to o}[(exp\ tA)^{-1} - (id)], \varphi(\xi) \rangle \\ &= \langle -A, \varphi(\xi) \rangle\end{aligned}$$

Donc : $$-\overline{Pl(X'^*)}.\tilde{\sigma} = \langle Pl(X'^*), \tilde{\sigma} \rangle :$$

Supposons d'abord $\sigma \in \overline{E}'$:

- la fonction $X'^*.\tilde{\sigma}$ correspond à la dérivée covariante de σ par rapport à X relativement à la connexion ω' (en particulier, la restriction de $X'^*.\tilde{\sigma}$ à $\rho(P)$ prend ses valeurs dans $\mathbf{R}^m$).

- puisque la restriction de $\tilde{\sigma}$ à $\rho(P)$ prend ses valeurs dans $\mathbf{R}^n$, et puisque $\mathfrak{M}(\mathbf{R}^m) \subset N^{n-m}$, $-Pl(X'^*).\tilde{\sigma}$ correspond à une section de $\overline{N}$.

On en déduit : $X'^* \circ \tilde{\sigma} = p_U(\widetilde{D_X \sigma})$

$-Pl(X'^*).\tilde{\sigma} = p_N(\widetilde{D_X \sigma})$.

La première de ces deux égalités signifie que $D'_X \sigma = p_U D_X \sigma$.

Puisque $$\begin{aligned}-\overline{Pl(X'^*)}.\tilde{\sigma} &= \langle Pl(X'^*), \tilde{\sigma} \rangle \\ &= \langle Pl^1(X'^*), \tilde{\sigma} \rangle ,\end{aligned}$$

la seconde égalité prouve que $(\mathcal{P}l^1_x)(\sigma) = p_N(D_x \sigma)$.

Supposons maintenant que $\nu \in \overline{N}$.

La fonction $X'^*.\tilde{\nu}$ correspond à la dérivée covariante de ν par rapport à X relativement à la connexion ω' (en particulier, la restriction de $X'^*.\tilde{\nu}$ à $\rho(P)$ prend ses valeurs dans N^{n-m}).

Puisque $$\begin{aligned}-Pl\overline{(X'^*)}.\tilde{\nu} &= \langle Pl(X'^*), \tilde{\nu} \rangle \\ &= \langle Pl^2(X'^*), \tilde{\nu} \rangle + \langle Pl^3(X'^*), \tilde{\nu} \rangle\end{aligned}$$

et puisque $\mathfrak{M}_2(N^{n-m}) \subset \mathbf{R}^m$ et $\mathfrak{M}_3(N^{n-m}) \subset N^{n-m}$

$$X'^*.\tilde{\nu} + \langle Pl^3(X'^*), \tilde{\nu} \rangle = p_N(\widetilde{D_X \nu})$$
$$\langle Pl^2(X'^*), \tilde{\nu} \rangle = p_U(\widetilde{D_X \nu}).$$

On en déduit $$(\mathcal{P}l^3_X)(\nu) = p_N(D_X \nu) - D''_X \nu$$
$$(\mathcal{P}l^2_X)(\nu) = p_U(D_X \nu)$$

d'où le théorème 3.

REMARQUE. Il résulte du théorème 3 que les 1 - formes $\mathcal{P}l^1$ et $\mathcal{P}l^2$ d'une part, les lois de dérivation D' et $D'' + \mathcal{P}l^3$ d'autre part, ne dépendent pas de ρ à proprement parler, mais seulement de la décomposition $\mathbf{R}^m_{\mathcal{R}_m} [P] \oplus N$ du fibré $\mathbf{R}^n_{\mathcal{R}_n} [Qf]$.

Nous allons, dans la seconde partie, appliquer ces généralités à la géométrie différentielle des sous-variétés. D'autres applications sont possibles, par exemple :

- à la géométrie différentielle des G - structures ([1] et [5])
- à l'étude des connexions affines ([8])
- à l'étude de la connexion canonique d'un espace de Minkowski ([3]).

CHAPITRE II

LA GEOMETRIE DES SOUS-VARIETES.

On se propose de généraliser en termes de connexions linéaires, et indépendamment de toute métrique, la géométrie différentielle classique des sous-variétés d'une variété riemannienne.

Soit donc V une variété de dimension n, et soit U une sous-variété régulièrement plongée (plongement noté f) de dimension m.

A. Structures compatibles.

Soit P (resp. Q) l'espace des repères adaptés à une H-structure sur U (resp. à une G-structure sur V). On dira que ces deux structures sont «*compatibles*»

1°) si H et G sont $m-n$ permis

2°) il existe un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de U par des ouverts, il existe un fibré normal N (c'est-à-dire un sous-fibré vectoriel de $T_U(V)$ tel que $T_U(V)=T(U)\oplus N$) et il existe $\forall\, i\in I$ un plongement (f_i,ρ_i) de $P\,|\,U_i$ dans Q tels que

a) f_i soit la restriction de f à U_i

b) tout repère $\xi\in P\,|\,U_i$ est formé des m-premiers vecteurs du repère $\rho_i(\xi)$.

c) $\forall\, i\in I$, les $n-m$-derniers vecteurs du repère $\rho_i(\xi)$ appartiennent à la fibre $N_{p(\xi)}$ (p désignant la projection $P\to U$).

On dira que les données $[(U_i)_{i\in I},(\rho_i)_{i\in I},N]$ sont «*admissibles*» si elles vérifient les conditions précédentes. Supposant les structures définies par P et Q compatibles, et les données $[(U_i)_i,(\rho_i)_i,N]$ admissibles, on obtient

PROPOSITION 1. *L'injection de $(\mathbf{R}^m[P\,|\,U_i])_x$ dans $(\mathbf{R}^n[Q f_i])_x$ définie à partir de ρ_i (pour $x\in U_i$) comme au théorème 2 de I B, coïncide avec l'injection canonique de $T_x(U)$ dans $T_x(V)$.*

C'est une conséquence immédiate de a) et b).

PROPOSITION 2. *$\forall\, i\in I$, $\forall\,\xi\in P\,|\,U_i$ les $n-m$-derniers vecteurs du repère $\rho_i(\xi)$ forment une base de $N_{p(\xi)}$. Ils ne dépendent que de i et de $p(\xi)$.*

C'est une conséquence immédiate de c) et du fait que H et G sont $m-n$ permis.

PROPOSITION 3. *$\forall\, i\in I$, le fibré $N\,|\,U_i$ coïncide avec le fibré N_i défini à partir de $(P\,|\,U_i,\rho_i,f_i,Q)$ comme au théorème 2 de I B.*

C'est une conséquence immédiate de b) et c).

COROLLAIRE. *$\forall\, i\in I$, le fibré $N\,|\,U_i$ est trivial et il existe $n-m$ champs de vecteurs*

$(X_i^{m+1}, \ldots, X_i^n)$ *formant une base de* $\dot{N} | U_i$ *tels que* $\forall \xi \in P | U_i$, $\rho_i(\xi)$ *soit obtenu en complètant* ξ *par les vecteurs* $(X_i^{m+1})_{p(\xi)}, \ldots, (X_i^n)_{p(\xi)}$.

Les deux structures définies par P et Q seront dites «totalement compatibles» si elles sont compatibles, et si en outre on peut prendre pour recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ admissible le recouvrement ne comprenant que le seul élément U. L'existence d'une H-structure P sur U et d'une G-structure Q sur V, totalement compatibles, implique en particulier que le fibré normal de U dans V (défini à isomorphisme près) soit trivial. Localement, deux structures compatibles sont toujours totalement compatibles.

EXEMPLES.

a) Supposons V munie d'une structure pseudo-riemannienne g, et supposons que g induise encore sur U une structure pseudo-riemannienne g' (c'est-à-dire $\forall x \in U$, la restriction à $(T_x(U))^2$ de la forme bilinéaire g_x définie sur $(T_x(V))^2$ est non dégénérée). Dans ces conditions, l'orthogonal N_x de $T_x(U)$ relativement à g_x est un supplémentaire de $T_x(U)$ dans $T_x(V)$, les deux structures pseudo-riemanniennes sont compatibles, et le seul fibré normal admissible est $N = \bigcup_{x \in U} N_x$.

b) Prenons pour P (resp. Q) l'espace $R(U)$ (resp. $R(V)$) de tous les repères de U (resp. de V). Les deux structures définies par P et Q sont compatibles : on peut prendre pour N n'importe quel sous-fibré vectoriel de $T_U(V)$ tel que $T_U(V) = T(U) \oplus N$.

B. Connexion induite sur une sous-variété. Les secondes formes fondamentales.

Soit P (resp. Q) l'espace des repères adaptés à une H-structure sur U (resp. à une G-structure sur V).

Supposons ces deux structures compatibles, et donnons nous une fois pour toutes des données $[(U_i)_{i \in I}, (\rho_i)_{i \in I}, N]$ admissibles. Notons p_U (resp. p_N) la projection de $T_U(V)$ sur $T(U)$ (resp. N) parallèlement à N (resp. $T(U)$).

Soit ω une forme de connexion sur Q et D la loi de dérivation sur $\overline{T(V)}$ (resp. $\overline{T_U(V)}$) associée à ω (resp. $\tilde{\omega f}$). Notons ω'_i la forme de connexion induite sur $P | U_i$ par $(\omega, (f_i, \rho_i), \mathfrak{M})$.

THEOREME 1. *Il existe une forme de connexion* ω' *et une seule sur* P *dont la restriction à* $P | U_i$ *soit égale,* $\forall i \in I$, *à* ω'_i. *La loi de dérivation* D' *sur* $\overline{T(U)}$, *associée à* ω', *est définie par :* $D'_X Y = p_U(D_X Y)$ $\forall X, Y \in \overline{T(U)}$.

Notons D'_i la loi de dérivation sur $T(U_i)$ associée à ω'_i. D'après le théorème 3 de II B et la proposition 1 de III A, $(D'_i)_X Y = p_{U_i}(D_X Y)$, $\forall X, Y \in \overline{T(U_i)}$. Par conséquent, les lois de dérivation induites par D'_i et D'_j sur $\overline{T(U_i \cap U_j)}$ coïncident. Si $x \in U_i \cap U_j$, et si $\xi \in P_x$, les isomorphismes $\mathbf{R}^m \to T_x(U_i)$ et $\mathbf{R}^m \to T_x(U_j)$ définis par le repère ξ, considéré successivement comme appartenant à $P | U_i$ et à $P | U_j$, coïncident. Donc

ω'_i et ω'_j coïncident sur $P \mid U_i \cap U_j$. Le théorème 1 en résulte immédiatement.

La connexion (ω', D') sera dite «*induite sur U par la connexion (ω, D) et le fibré normal N*».

DEFINITION. *Etant donnés un fibré normal N, et une connexion linéaire D sur V, on appellera «seconde forme fondamentale de $1^{ère}$ espèce (resp. de 2^{nde} espèce)» la 1-forme $\mathcal{P}l^1$ (resp. $\mathcal{P}l^2$) sur U à valeurs dans $(T(U))^* \otimes N$ (resp. $N^* \otimes T(U)$) définie par*

$$(\mathcal{P}l^1_X)(Y) = p_N(D_X Y) \qquad \forall X, Y \in \overline{T(U)} \qquad (resp.$$
$$\mathcal{P}l^2_X)(n) = p_U(D_X n) \qquad \forall \quad X \in \overline{T(U)} \qquad \forall n \in \overline{N})$$

REMARQUE. Notons Pl^1_i et Pl^2_i les projections $p_1 \circ Pl_i$ et $p_2 \circ Pl_i$ de la forme de plongement Pl_i de $P \mid U_i$ dans Q définie par $(\omega, (f_i, \rho_i), \mathfrak{M})$.

Il résulte du théorème 3 de I B que Pl^1_i et Pl^2_i correspondent à $\mathcal{P}l^1 \mid U_i$ et $\mathcal{P}l^2 \mid U_i$ par l'isomorphisme λ défini dans les notations. Mais, si $x \in U_i \cap U_j$ et si $\xi \in P_x$, les isomorphismes $N^{n-m} \overset{\varphi_i}{\to} N_x$ et $N^{n-m} \overset{\varphi_j}{\to} N_x$ définis par l'élément ξ considéré successivement comme élément de $P \mid U_i$ et $P \mid U_j$ ne sont pas les mêmes, dès l'instant que $(\rho_i)(\xi) \neq (\rho_j)(\xi)$. Par conséquent les formes induites sur $P \mid U_i \cap U_j$ par Pl^1_i et Pl^1_j ne coïncident pas; de même pour les formes induites sur $P \mid U_i \cap U_j$ par Pl^2_i et Pl^2_j.

Formule des torsions : Supposons toujours les espaces de repères P et Q adaptés à deux structures compatibles. Supposons toujours donnés $(U_i)_{i \in I}, (\rho_i)_{i \in I}$ et N admissibles. Soit ω une G-connexion sur Q (ω' la H-connexion induite sur P). Notons D et D' les lois de dérivation correspondantes dans $\overline{T(V)}$ et $\overline{T(U)}$; $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ les 2 formes de torsion $\mathfrak{T} = d_D(id)_{T(V)}$, $\mathfrak{T}' = d_{D'}(id)_{T(U)}$, θ et θ' les formes fondamentales de Q et P, Σ et Σ' les formes de torsion $\Sigma = \nabla_\omega \theta$, $\Sigma' = \nabla_{\omega'} \theta'$.

THEOREME 2.

(I) $\quad \forall i \in I \quad$ *$\theta \tilde{f}_i \rho_i$ est égal à la restriction θ'_i de θ' à $P \mid U_i$.*

(II) $\quad \forall i \in I \quad \Sigma \tilde{f}_i \rho_i = \Sigma' + Pl^1_i \wedge \theta'_i$

(Σ'_i désigne la restriction de Σ' à $P \mid U_i$)

(III) *Σ'_i est la composante de $\Sigma \tilde{f}_i \rho_i$ sur $\mathbf{R}^m$*

$Pl^1_i \wedge \theta'_i$ est la composante de $\Sigma \tilde{f}_i \rho_i$ sur N^{n-m}.

(IV) $\quad \forall X, Y \in \overline{T(U)} \quad \mathfrak{T}(X, Y) = \mathfrak{T}'(X, Y) + (\mathcal{P}l^1_X)(Y) - (\mathcal{P}l^1_Y)(X)$.

Notons p et p' les projections de P et Qf sur U.

Soit ξ un élément de $(P \mid U_i)_x$ et $\xi_1 = \rho_i(\xi)$ son image dans $(Qf)_x$. Considéré comme isomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur $T_x(V)$, ξ_1 envoie $\mathbf{R}^m$ sur $T_x(U)$ et N^{n-m} sur N_x. Si $d\xi \in T_\xi(P \mid U_i)$, $(p' \rho_i)(d\xi) = p(d\xi)$ est tangent à U et

$$(\xi_1^{-1}) \circ p' \rho_i (d\xi) = \xi^{-1} p(d\xi)$$

d'après la condition 2° b intervenant dans la définition de la compatibilité. Or

$$\xi_1^{-1} \circ p' \rho_i = \theta \tilde{f} \rho_i \qquad \text{et} \qquad \xi^{-1} \circ p = \theta'$$

d'où la partie (I) du théorème.

La partie (II) résulte immédiatement de (I) et de la proposition 2 de I A.

La partie (III) résulte de ce que $\mathfrak{M}(\mathbf{R}^m) \subset N^{n-m}$.

La formule de la partie (IV) est l'homologue de (II) par λ (on peut aisément la redémontrer directement).

Il résulte de (III) que $Pl_i^1 \wedge \theta'_i$ correspond, par λ, à la 2 forme sur U_i à valeurs dans $N : (X, Y) \to (\mathcal{P}l_X^1)(Y) - (\mathcal{P}l_Y^1)(X)$.

COROLLAIRE. *Si* $\Sigma = 0$, *alors* $\Sigma' = 0$ *et la forme bilinéaire* $(X, Y) \to (\mathcal{P}l_X^1)(Y)$ *est symétrique.*

C. Cas des structures pseudo-riemanniennes.

Reprenons l'exemple 1 de II A d'une structure pseudo-riemannienne g sur V induisant une structure pseudo-riemannienne g' sur U. (Puisque g'_x est non dégénérée, l'orthogonal N_x de $T_x(U)$ dans $T_x(V)$ relativement à g_x est un supplémentaire de $T_x(U)$. On prend pour N le fibré $\bigcup_{x \in U} N_x$). Prenons pour (D, ω) la connexion de Levi-Civita de g.

Seconde forme quadratique fondamentale. Suivant E. Cartan ([2] p. 229), on appelle «seconde forme quadratique fondamentale de U dans V» la forme quadratique $X \overset{\Phi}{\to} \Phi(X)$ sur $\overline{T(U)}$, qui, à tout champ de vecteurs $X \in \overline{T(U)}$, associe la *1*-forme $\Phi(X)$ sur $\overline{N}$ définie par $\langle \Phi(X), n \rangle = - g(D_X n, X) \quad \forall n \in \overline{N}$. La forme bilinéaire g, étant non dégénérée, définit un isomorphisme de $\overline{N}^*$ sur $\overline{N}$: notons $\tilde{\Phi}(X)$ l'image de $\Phi(X)$ par cet isomorphisme $(\tilde{\Phi}(X) \in \overline{N}) : g(\tilde{\Phi}(X), n) = \langle \Phi(X), n \rangle$. Nous appellerons encore «seconde forme quadratique fondamentale» la forme quadratique $X \overset{\tilde{\Phi}}{\to} \tilde{\Phi}(X)$ sur $\overline{T(U)}$ à valeurs dans $\overline{N}$.

REMARQUE. $g(\tilde{\Phi}(X), n)$ est encore égale à $-g[(\mathcal{P}l_X^2)(n), X]$ pour $n \in \overline{N}$.

THEOREME 3.

(I) *La connexion* ω' *induite sur* P *par la connexion de Levi-Civita* ω *relative à* g, *est la connexion de Levi-Civita relative à* g'.

(II) *Les formes* $\mathcal{P}l^1$ *et* $\mathcal{P}l^2$ *sont liées par la condition :*

$$\forall X, Y \in \overline{T(U)} \quad \forall n \in \overline{N} \qquad g((\mathcal{P}l_X^1)(Y), n) = - g((\mathcal{P}l_X^2)(n), Y).$$

(III) *La forme bilinéaire* $(X, Y) \to (\mathcal{P}l_X^1)(Y)$ *de* $(\overline{T(U)})^2$ *dans* $\overline{N}$ *est symétrique. Elle est la forme polaire de la* 2^{nde} *forme quadratique fondamentale :*

$$\forall X \in \overline{T(U)} \qquad \tilde{\Phi}(X) = p_N(D_X X)$$

Notons D la dérivation sur $\overline{T(V)}$ associée à ω

D' la dérivation sur $\overline{T(U)}$ associée à ω'

D^o la dérivation sur $\overline{T(U)}$ de la connexion de Levi-Civita de g'.

D'après [6] p. 25, on doit avoir $\forall X, Y, Z \in \overline{T(U)}$:

$$2g'(D^o_X Y, Z) = X.g'(Y,Z) + Y.g'(X,Z) - Z.g'(X,Y)$$
$$-g'([X,Z],Y) - g'([Y,X],Z) + g'([Z,Y],X)$$
$$2g(D_X Y, Z) = X.g(Y,Z) + Y.g(X,Z) - Z.g(X,Y)$$
$$-g([X,Z],Y) - g([Y,X],Z) + g([Z,Y],X).$$

Par définition de g', on peut remplacer g' par g dans la première de ces équations.

Donc $\qquad g(D_X Y, Z) = g(D^o_X Y, Z) \qquad \forall Z \in \overline{T(U)}$

Ceci prouve que $\qquad D^o_X Y = p_U(D_X Y)$.

Or $\qquad D'_X Y = p_U(D_X Y)$

d'après le théorème 1 de II B.

On en déduit $D^o = D'$ d'où la partie (I) du théorème. Soit $X, Y \in \overline{T(U)}$ et $n \in \overline{N}$. Par dérivation covariante de la formule $g(Y,n) = 0$, on obtient

$$(D_X g)(Y,n) + g(D_X Y, n) + g(Y, D_X n) = 0.$$

Mais $D_X g = 0$, $g(D_X Y, n) = g(p_N(D_X Y), n) = g(\mathcal{P}l^1_X)(Y), n)$ et $g(Y, D_X n) =$ $= g(Y, p_U D_X n) = g(Y, (\mathcal{P}l^2_X)(n)))$.

On en déduit la partie (II) du théorème.

Puisque la connexion (D, ω) est à torsion nulle, la forme bilinéaire

$$(X,Y) \to (\mathcal{P}l^1_X)(Y)$$

est symétrique (corollaire du théorème 2 de II B). Elle est donc la forme polaire de la forme quadratique $X \to (\mathcal{P}l^1_X)(X)$. Pour montrer que $\tilde{\Phi}(X) = p_N D_X X$, il suffit de montrer que

$$g(\tilde{\Phi}(X), n) = g((\mathcal{P}l^1_X)(X), n) \qquad \forall n \in \overline{N}.$$

Or $g(\tilde{\Phi}(X), n) = -g((\mathcal{P}l^2_X)(n), X) = g((\mathcal{P}l^1_X)(X), n)$ d'après la partie (II), d'où la partie (III).

De la partie (II) du théorème 3, résulte:dans le cas de structures pseudo-riemanniennes, il est équivalent de se **donner** la 2nde forme fondamentale de 1ère espèce ou celle de 2nde espèce.

D. Théorie classique des sous-variétés plongées.

La variété V étant munie d'une connexion linéaire D et un fibré normal N étant donné $(T_U(V) = T(U) \oplus T(N))$, on munit la sous-variété U de la connexion linéaire D' : $D'_X Y = p_U(D_X Y)$. On pose, comme précédemment, $(\mathcal{P} l^1_X)(Y) = p_N(D_X Y)$ et $(\mathcal{P} l^2_X)(n) = p_U(D_X n)$ pour $X, Y \in \overline{T(U)}$ et $n \in \overline{N}$.

1°) sous-variétés totalement géodésiques.

Suivant E. Cartan, on dira que U est une sous-variété «totalement géodésique» de V si toute géodésique de U est géodésique de V.

PROPOSITION 4. *Une condition nécessaire et suffisante pour que U soit totalement géodésique, est que la forme bilinéaire $(X, Y) \to (\mathcal{P} l^1_X)(Y)$ soit anti-symétrique.*

Les géodésiques de V (resp. de U) sont les courbes intégrales des champs de vecteurs X solutions de l'équation $D_X X = 0$ (resp. $D'_X X = 0$).

Puisque, pour $X \in \overline{T(U)}$, $D_X X = D'_X X + (\mathcal{P} l^1_X)(X)$, la condition $D'_X X = 0$ implique $D_X X = 0$ si et seulement si $(\mathcal{P} l^1_X)(X) = 0$, d'où la proposition 4.

COROLLAIRE. *Si V est à torsion nulle, U est totalement géodésique si et seulement si $\mathcal{P} l^1 = 0$.*

En effet, si V est à torsion nulle, la forme $(X, Y) \to (\mathcal{P} l^1_X)(Y)$ est symétrique. Elle ne peut donc être anti-symétrique que si elle est nulle.

2°) sous-variétés affines.

On dira que U est une sous-variété «affine» de V si $\mathcal{P} l^1 = 0$. Une sous-variété affine est totalement géodésique, et la réciproque est vraie si V est à torsion nulle d'après le corollaire de la proposition 4.

PROPOSITION 5. Notons $\overset{V}{J}{}^{\gamma}_{x_o x_1}$ le transport parallèle de $T_{x_o}(V)$ sur $T_{x_1}(V)$ le long d'un arc γ de V joignant x_o à x_1, relativement à la connexion D.

Pour que U soit une sous-variété affine de V, il faut et il suffit que pour tout arc γ de U, l'image par $\overset{V}{J}{}^{\gamma}_{x_o x_1}$ du sous-espace $T_{x_o}(U)$ de $T_{x_o}(V)$ soit égale à $T_{x_1}(U)$.

En effet, pour que U soit affine, il faut et il suffit que $D_X X = D'_X X \quad \forall X \in \overline{T(U)}$. Par intégration le long d'un chemin γ de U, on en déduit que les transports parallèles $\overset{V}{J}{}^{\gamma}_{x_o x_1}$ et $\overset{U}{J}{}^{\gamma}_{x_o x_1}$ relatifs à D et D' coïncident sur $T_{x_o}(U)$, donc que :

$$\overset{V}{J}{}^{\gamma}_{x_o x_1}(T_{x_o}(U)) = T_{x_1}(U).$$

Réciproquement, si $\overset{V}{J}{}^{\gamma}_{x_o x_1}(T_{x_o}(U)) = T_{x_1}(U) \quad \forall \gamma$, on en déduit, par différentiation covariante :

$$D_X Y \in \overline{T(U)} \qquad \forall X, Y \in \overline{T(U)}.$$

Donc $(\mathcal{P} l^1_X)(Y) = p_N(D_X Y) = 0 \quad \forall X, Y \in \overline{T(U)}$.

PROPOSITION 6. *Si g est une métrique pseudo-riemannienne sur V induisant une métrique pseudo-riemannienne sur U, si D est la connexion de Levi-Civita de g, et si N_x*

est, en chaque point x *de* U, *le supplémentaire orthogonal de* $T_x(U)$ *dans* $T_x(V)$, U *est une sous-variété affine de* V *si et seulement si, pour tout arc* γ *de* U, *joignant* x_o *à* x_1 *l'image de* N_{x_o} *par le transport parallèle* $\overset{V}{J}{}^{\gamma}_{x_o x_1}$ *est égale à* N_{x_1}.

En effet, d'après la partie (II) du théorème 3 de II C, les conditions $\mathcal{P}l^1 = 0$ et $\mathcal{P}l^2 = 0$ sont équivalentes. Or $\mathcal{P}l^2 = 0 \Longleftrightarrow \forall X \in \overline{T(U)} \quad \forall n \in \overline{N} \quad D_X n \in \overline{N}$. On en déduit par intégration que $\overset{V}{J}{}^{\gamma}_{x_o x_1}(N_{x_o}) = N_{x_1}$ pourvu que γ soit une courbe de U, et réciproquement s'il en est ainsi, on en déduit $\mathcal{P}l^2 = 0$ par différentiation. Une autre façon de raisonner consiste à utiliser la proposition 5 et le fait que $J^{\gamma}_{x_o x_1}$ est une isométrie.

3°) courbure de plongement.

La courbure de plongement d'une sous-variété U de V est, géométriquement, ce qui empêche U d'être une sous-variété affine.

Notant Π^V_U l'application canonique de $\overline{T_U(V)}$ sur $\overline{T_U(V)/_{T(U)}}$, on appellera «courbure de plongement» de U dans V la 1-forme $\mathcal{K}^V_U$ sur U à valeurs dans $T(U) \otimes (T_U(V)/_{T(U)})$ définie par :

$$(\mathcal{K}^V_{UX})(Y) = \Pi^V_U(D_X Y).$$

(Les données de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{P}l^1$ sont évidemment équivalentes).

4°) courbure géodésique et normale.

On suppose toujours $T_U(V) = T(U) \oplus N$

V munie de la connexion D

U munie de la connexion $D'_X Y = p_U D_X$

$$(\mathcal{P}l_X)(Y) = p_N(D_X Y).$$

Soit W une sous-variété régulièrement plongée dans U. On appellera :

- «courbure géodésique de W dans V relativement à U» la 1-forme $({}^g\mathcal{K}^V_W)$ sur W à valeurs dans $T(W)^* \otimes T_W(V)/_{T(W)}$ égale à la courbure de plongement $\mathcal{K}^U_W$ de W dans U.
- «courbure normale de W dans V relativement à U» la 1-forme ${}^N\mathcal{K}^U_W$ sur W à valeurs dans $T(W)^* \otimes T_W(V)/_{T(W)}$ telle que $({}^N\mathcal{K}^V_{W X})(Y) = (\Pi^V_W - \mathcal{P}l^1_X)(Y)$.

On a évidemment $$\mathcal{K}^V_W = {}^g\mathcal{K}^V_W + {}^N\mathcal{K}^V_W.$$

En outre, du caractère tensoriel de $\mathcal{P}l^1$, donc de ${}^N\mathcal{K}^V_W$, résulte le

THEOREME DE MEUSNIER. *Si deux sous-variétés* W *et* W' *de* U *ont même espace tangent en un point* x_o, *elles ont, en* x_o, *même courbure normale dans* V *relativement à* U : $({}^N\mathcal{K}^V_W)(x_o) = ({}^N\mathcal{K}^V_{W'})(x_o)$.

5°) espaces osculateurs à une courbure de V.

Supposons $\dim U = 1$.

Soit X un champ de vecteurs tangent à U, partout différent de 0. On appellera, s'il existe, «demi-plan osculateur à U en un point x de U» le demi-plan engendré par la tangente à U, et le vecteur $(D_X X)(x)$.

L'existence et la définition de ce demi-plan sont indépendantes du champ de vecteurs X : si X' est un autre champ de vecteurs tangent à U et partout différent de 0, il existe une fonction $f \in D(U)$ partout différente de 0, telle que $X' = fX$ et $(D_{fX} fX)_x = f^2(x)(D_X X)_x + f(x)(Xf)_{(x)} X_x$. Donc $(X_x \wedge (D_X X)_x = 0) \Longleftrightarrow (f(x) X_x \wedge (D_{fX} fX)_x = 0)$ et si $X_x \wedge (D_X X)_x \neq 0$, $(D_{fX} fX)_x$ engendre avec $(fX)_x$ le même demi-plan que $(D_X X)_x$ avec X_x.

Plus généralement, on appellera, s'il existe, demi-espace osculateur d'ordre p en x, le demi-espace de dimension p engendré par le $(p-1)$-plan $X_x \wedge (D_X X)_x \wedge \ldots \wedge (D_X^{p-2} X)_x$ et le vecteur $(D_X^{p-1} X)_x$ où l'on a posé, pour tout entier $k > 0$,

$$D_X^1 X = D_X X, \quad D_X^k X = D_X (D_X^{k-1} X).$$

Là encore, l'existence et la définition de ce demi-espace sont indépendantes du champ X tangent à U : on le démontre aisément par récurence. Evidemment, l'existence de ce demi-espace d'ordre p implique que p soit inférieur ou égal à la dimension de V.

E. Plongement dans un fibré à courbure nulle.

1°) équation de Gauss-Codazzi.

Soient H et G deux groupes $m-n$ permis, et soit $\mathfrak{M}$ le supplémentaire de $\underline{H}$ dans $\underline{G}$ défini comme en I B. Soit V une variété de dimension n et U une sous-variété de dimension m telle que V *soit un voisinage tubulaire de* U (plongement régulier de U dans V noté f).

THEOREME 4. *Donnons-nous -une H-structure sur U (d'espace de repères P)*
-une H-connexion ω' sur P (courbure Ω')
-une 1-forme $Pl \in \overset{1}{\Lambda}_{adH}(P, \mathfrak{M})$.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(I) *il existe sur V une G-structure* totalement compatible *avec la H-structure, il existe un plongement* admissible *(f, ρ) de P dans l'espace Q des repères adaptés à la G-structure, et il existe sur Q une G-connexion ω* à courbure nulle, *tels que ω' et Pl soient induits par $(\omega, (f, \rho), \mathfrak{M})$.*

(II) *ω', Ω' et Pl vérifient la relation suivante : (appelée équation de Gauss-Codazzi)*

$$\Omega' + \nabla_{\omega'} Pl + [Pl, Pl] = 0.$$

Si la proposition (I) est vérifiée, l'équation (II) est une conséquence immédiate de la formule des courbures.

Réciproquement, supposons (II) vérifiée.

a) construction d'une G-structure Q totalement compatible avec P.

Puisque V est un voisinage tubulaire de U, identifions V à $U \times B$ (où B désigne un ouvert de $\mathbf{R}^{n-m}$), et identifions f à l'application $u \to (u, b_o)$ (b_o désignant un point de B fixé une fois pour toutes). Soit r la projection canonique de $V = U \times B$ sur U. Notons X_U et X_B les composantes d'un vecteur X de $T_{(u,b)}(V) = T_u(U) \oplus T_b(B)$ sur $T_u(U)$ et $T_b(B)$ (si $X \in \overline{T(V)}$, X_U et X_B désigneront des éléments de $\overline{T(V)}$).

Soit $J_{b\,b'}$ l'isomorphisme de $T_{(u,b)}(V)$ sur $T_{(u,b')}(V)$ tel que :

$(J_{b\,b'}(X))_U = X_U$,

$(J_{b\,b'}(X))_B =$ image de X_B dans le transport parallèle de $T_B(B)$ sur $T_{b'}(B)$ associé à la structure affine plate canonique de $\mathbf{R}^{n-m}$ $(B \subset \mathbf{R}^{n-m})$.

Soient $\{X^o_{m+1}, \ldots, X^o_n\}$ $n-m$ vecteurs formant une base de $T_{b_o}(B)$. Notons X_i $(m+1 \leq i \leq n)$ le champ de vecteurs appartenant à $\overline{T(V)}$ tel que

$$(X_i)_U = 0$$

$$(X_i(u, b))_B = J_{b_o b}(X^o_i).$$

Soit ρ l'application qui, à tout repère ξ de $T_u(U)$, associe le repère $\rho(\xi)$ de $T_u(V)$ obtenu en complètant ξ par les $n-m$ vecteurs $(X_i)_{(u, b_o)}$. On munit l'ensemble $Q'_1 = \rho(P)$ d'une structure de fibré principal différentiable de groupe H, en imposant à ρ d'être un isomorphisme de fibrés principaux. Puisque $H = G \cap Gl(m, \mathbf{R})$, les deux façons qu'à H d'opérer à droite sur Q'_1 (en tant que groupe structural d'une part, en tant que sous-groupe de $G \subset GL(n, \mathbf{R})$ opérant naturellement à droite sur les repères de V d'autre part) sont les mêmes. En élargissant le groupe structural H de Q'_1 à un sous-groupe de $GL(n, \mathbf{R})$ on obtient donc un espace de repères de V (au-dessus de U). Soit Q_1 l'espace des repères de V au-dessus de U, obtenu à partir de Q'_1 par agrandissement à G du groupe structural H. Si z_1 est un repère de $T_{(u, b_o)}(V)$ c'est-à-dire un isomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur $T_{(u, b_o)}(V)$, $J_{b_o b} \circ z_1$ est un repère de $T_{(u, b)}(V)$. Soit $Q_{(u, b)}$ l'ensemble des repères de $T_{(u, b)}(V)$ de la forme $J_{b_o b} \circ z_1$, où z_1 parcourt $(Q_1)_u$. Identifiant l'espace $Q = \bigcup_{(u,b) \in V} Q_{(u, b)}$ à l'image réciproque $Q_1 r$ de Q_1 par r en associant $J_{b_o b} \circ z_1$ (élément de Q) à $(z_1, (u, b))$ (élément de Qr), on définit sur Q une structure de fibré principal différentiable de groupe G, qui est en plus un espace de repères [(1)]. Par construction, le fibré Qf induit par Q sur U est égal à Q_1. Prenant pour fibré normal N le fibré trivial engendré par les champs de vecteurs $(X_i)_{m+1 \leq i \leq n}$, il est immédiat que P et Q sont totalement compatibles, et

[(1)] En tant qu'espace fibré principal différentiable, Q et $Q_1 r$ sont isomorphes. Mais Q est muni d'une structure d'espace de repères, contrairement à $Q_1 r$.

les données $(N,(f,\rho))$ admissibles.

L'application $\tilde{r}: Q \to Q_1$ qui, à $z = J_{b_o b} \circ z_1$, associe $\tilde{r}(z) = z_1$ est un homomorphisme de G-fibrés principaux au dessus de r.

b) existence d'une G-connexion ω à courbure nulle induisant ω' et Pl.

Il suffit d'appliquer le théorème 1 de I A.

2°) Application aux espaces pseudo-sphériques :

Un espace homogène réductif $G/_H$ sera dit (m,n)-pseudo-sphérique si

a) H et G sont $m-n$ permis

b) la dimension de $G/_H$ est égale à m

c) il existe un repère t_o de $T_{x_o}(G/_H): \mathbf{R}^m \to T_{x_o}(G/_H)$ tel que

$$h = (t_o)^{-1} \circ i(h) \circ t_o \qquad \forall\, h \in H$$

(x_o désigne la projection sur $G/_H$ de l'élément neutre de G; i désigne l'isomorphisme canonique de H sur le groupe linéaire d'isotropie en x_o $\tilde{H}_{x_o}$, les éléments de H sont considérés comme éléments de $GL(m,\mathbf{R})$).

Par exemple, la sphère $S^{n-1} = SO(n)/_{SO(n-1)}$ est un espace $(n-1,n)$-pseudo-sphérique.

THEOREME 5.

Soit $G/_H$ un espace homogène $(m-n)$-pseudo-sphérique

Soit $\mathfrak{M}$ le supplémentaire de $\underline{H}$ dans $\underline{G}$ défini comme en I B.

Soit t_o un repère de $T_{x_o}(G/_H)$ tel que $h = (t_o)^{-1} \circ i(h) \circ t_o$

Soit P l'espace des repères de $G/_H$ qui sont de la forme $g t_o$

Soit ψ l'application $g t_o \to g$ de P dans G. (Puisque $G/_H$ est réductif, l'application $g \to g t_o$ est bijective d'après [9] p. 48).

Soient ω' la forme de la connexion canonique sur P (cf [9] p. 48) et Pl la 1-forme $(\psi^{-1} d\psi)_{\mathfrak{M}}$.

(I) P est l'espace des repères adaptés à une H structure sur $G/_H$

(II) $Pl \in \overset{1}{\Lambda}_{ad\,H}(P,\mathfrak{M})$

(III) Pour tout plongement régulier f d'un ouvert U de $G/_H$ dans une variété V de dimension n telle que V soit un voisinage tubulaire de U, il existe sur V une G-structure (d'espace de repères Q) totalement compatible avec la H-structure P, il existe un plongement admissible (f,ρ) de P dans Q, et il existe sur Q une G-connexion ω à courbure nulle, tels que ω' et Pl soient induits pqr $(\omega,(f,\rho),\mathfrak{M})$.

Puisque l'image de H par l'application $h \to (t_o)^{-1} \circ i(h) \circ t_o$ est égale à H, P est l'espace des repères adaptés à une H-structure sur $G/_H$ d'où la partie (I) du théorème.

En outre, puisque $h = (t_o)^{-1} \circ i(h) \circ t_o \quad \forall\, h \in H$, la bijection

$$\begin{tikzcd} \psi : P \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr] & & G \arrow[dl] \\ & G/_H & \end{tikzcd}$$

est en fait un isomorphisme de H-fibrés principaux.

On en déduit :

- d'une part, que $Pl \in \overset{1}{\Lambda}_{ad\,H}(P, \mathfrak{M})$ (car la 1-forme sur G : $dg \xrightarrow{Pl_1} (g^{-1}dg)_{\mathfrak{M}}$ appartient à $\overset{1}{\Lambda}_{ad\,H}(G, \mathfrak{M})$ et Pl en est l'image réciproque par un isomorphisme de H-fibrés), d'où la partie (II).

- d'autre part, que ω' est l'image réciproque par ψ de la forme de connexion sur G : $dg \xrightarrow{\omega_1} (g^{-1}dg)_{\underline{H}}$.

Puisque la forme de connexion ω_1 sur G, et la 1-forme $Pl_1 \in \overset{1}{\Lambda}_{ad\,H}(G, \mathfrak{M})$ vérifient l'équation de Gauss-Codazzi (le calcul a été fait dans l'exemple d'application qui suit le théorème 1 de I A), il en est de même de ω' et Pl. La partie (III) du théorème est donc conséquence immédiate du théorème 4 de II E.

Références.

[1] D. BERNARD. Sur la Géométrie différentielle des G-structures. Ann. Inst. Fourier tome X. 1960.

[2] E. CARTAN. Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann. (Gauthiers-Villars).

[3] V. GUILLEMAIN. Thèse. Transactions of the Amer. Math. Soc. (à paraître).

[4] A. GOETZ. Bull. Acad. polon. Sc., Vol. X, n° 1, p. 29.

[5] A. GOETZ. Bull. Acad. polon. Sc., Vol. X, n° 5, p. 277.

[6] J.L. KOSZUL. Fibre bundles and Differential Geometry. Inst. of Tata. 1960.

[7] C.R. Acad. Sc., Paris. tome 255 p. 1566. (1962).

[8] A. LICHNEROWICZ. Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie. (Cremonese).

[9] A. LICHNEROWICZ. Géométrie des groupes de transformations. (Dunod).