Charles Ehresmann

Catégories structurées III. Quintettes et applications covariantes

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann, tome 5 (1963), exp. nº 3, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1963__5__A3_0>

TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Séminaire dirigé par Charles Ehresmann

Février 1963

CATEGORIES STRUCTUREES *)

III. QUINTETTES ET APPLICATIONS COVARIANTES

par Charles EHRESMANN

1. Catégorie double des quintettes.

Les notations sont celles utilisées dans les paragraphes I et II. En particulier $\mathcal{M}_o$ est une classe de classes contenant avec une classe toutes ses sous-classes, avec deux classes, leur produit; $\mathcal{M}$ est la catégorie de toutes les applications (M', f, M) telles que $M \in \mathcal{M}_o$ et $M' \in \mathcal{M}_o$. Nous désignons encore par $\mathcal{F}_o$ la classe de toutes les catégories $\mathcal{C}^\perp$ dont la classe support $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{M}$, par $\mathcal{F}$ la catégorie de tous les foncteurs $(\overline{\mathcal{C}}^\perp, F, \mathcal{C}^\perp)$, où $\mathcal{C}^\perp \in \mathcal{F}_o$ et $\overline{\mathcal{C}}^\perp \in \mathcal{F}_o$, par $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{C}}^\perp, \mathcal{C}^\perp)$ la sous-classe de $\mathcal{F}$ formée des foncteurs $(\overline{\mathcal{C}}^\perp, F, \mathcal{C}^\perp)$.

Soit $\mathcal{C}^\perp \in \mathcal{F}_o$; nous représentons par $\boxbar\, \mathcal{C}^\perp$ et $\boxminus\, \mathcal{C}^\perp$ les catégories longitudinale et latérale des quatuors (voir II,5) de $\mathcal{C}^\perp$, par $\alpha^{\boxbar}, \beta^{\boxbar}, \alpha^{\boxminus}$ et $\beta^{\boxminus}$ les applications source et but dans chacune de ces catégories. L'application $\omega^{\boxbar} : f \to (f, \beta(f), \alpha(f), f)$, où $f \in \mathcal{C}$, définit un foncteur double de $(\mathcal{C}^o, \mathcal{C}^\perp)$ vers $(\boxbar\, \mathcal{C}^\perp, \boxminus\, \mathcal{C}^\perp)$, où o désigne la loi de composition (triviale) :

$$(f', f) \to f \qquad \text{si, et seulement si,} \quad f' = f.$$

Nous noterons $\mu^{\boxbar}$ l'application inverse : $(f, \beta(f), \alpha(f), f) \to f$ qui définit un foncteur de $(\boxbar\, \mathcal{C}^\perp)_o^{\boxminus}$ sur $\mathcal{C}^\perp$. De même l'application $\omega^{\boxminus}$: $f \to (\beta(f), f, f, \alpha(f))$ définit un foncteur double de $(\mathcal{C}^\perp, \mathcal{C}^o)$ vers $(\boxbar\, \mathcal{C}^\perp, \boxminus\, \mathcal{C}^\perp)$ et nous désignerons par $\mu^{\boxminus}$ l'application inverse:

$$(\beta(f), f, f, \alpha(f)) \to f \qquad \text{de } (\boxminus\, \mathcal{C}^\perp)_o \text{ sur } \mathcal{C}.$$

De plus nous écrirons :

$$'\alpha^{\boxbar} = \mu^{\boxbar}\alpha^{\boxbar}, \ '\beta^{\boxbar} = \mu^{\boxbar}\beta^{\boxbar}, \ '\alpha^{\boxminus} = \mu^{\boxminus}\alpha^{\boxminus} \text{ et } '\beta^{\boxminus} = \mu^{\boxminus}\beta^{\boxminus}.$$

*) Voir Références.

Si $(\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, F, \mathcal{C}^{\perp}) \in \mathcal{F}$, rappelons (II, 5) que la restriction à $\square\mathcal{C}^{\perp}$ de l'application produit $F \times F \times F \times F$ définit un foncteur double :

$$((\boxbar\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \boxminus\overline{\mathcal{C}}^{\perp}), \square F, (\boxbar\mathcal{C}^{\perp}, \boxminus\mathcal{C}^{\perp})).$$

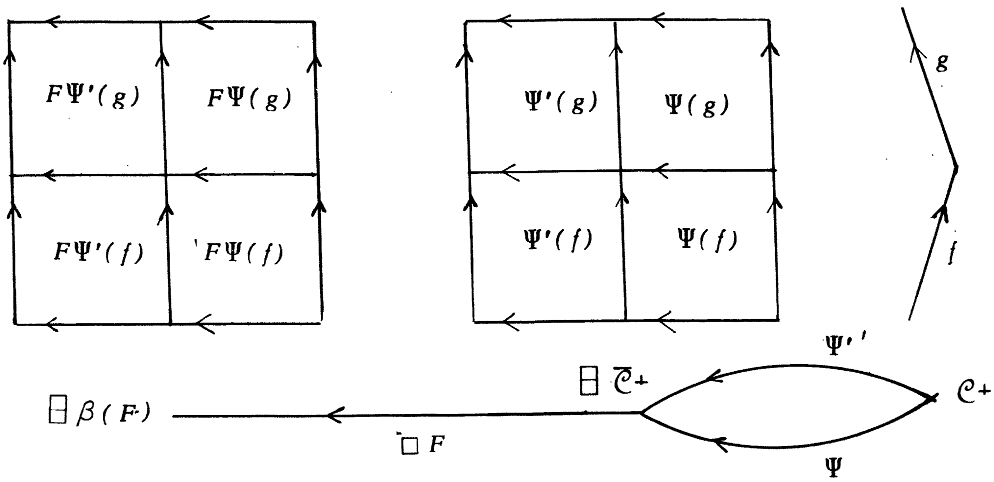
Soit $\overline{\mathcal{C}}^{\perp} \in \mathcal{F}_o$. En vertu de la proposition 14,II, $\mathcal{F}(\boxminus\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie pour la loi de composition définie par :

$(\Psi', \Psi) \to \Psi' \boxbar \Psi$ si, et seulement si, $\Psi'(f) \boxbar \Psi(f)$ est défini pour tout $f \in \mathcal{C}$; alors $\Psi' \boxbar \Psi$ est le foncteur défini par : $f \mapsto \Psi'(f) \boxbar \Psi(f)$.

$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une classe d'objets pour $\mathcal{F}(\boxminus\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \mathcal{C}^{\perp})$, la bijection canonique sur $\mathcal{F}(\boxminus\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \mathcal{C}^{\perp})_o$ étant :

$$F \to F^{\boxbar} = \square F.(\boxminus\mathcal{C}^{\perp}, \omega^{\boxbar}, \mathcal{C}^{\perp}).$$

Soit $\mathcal{N}$ la classe de tous les foncteurs Ψ tels que $\beta(\Psi) = \boxminus\mathcal{C}^{\perp}$, où $\mathcal{C}^{\perp} \in \mathcal{F}_o$. D'après le théorème 7,II, $\mathcal{N}$ s'identifie à la classe des transformations naturelles entre foncteurs appartenant à $\mathcal{F}$, en identifiant Ψ avec $('\beta^{\boxbar}\Psi, \mu^{\boxminus}\Psi_o, '\alpha^{\boxbar}\Psi)$.



PROPOSITION 1. *$\mathcal{F}$ opère (resp. opère à droite) sur $\mathcal{N}$ pour la loi de composition définie par :*

$(F, \Psi) \to F\Psi = \square F.\Psi$ *si, et seulement si,* $\beta(\Psi) = \boxminus\alpha(F)$.

(resp. $(\Psi, F) \to \Psi.F$ *si, et seulement si,* $\beta(F) = \alpha(\Psi)$*).*

L'espèce de structures (resp. l'espèce de structures à droite) correspondante (I, 7) est sous une espèce de morphismes (I, 3).

DEMONSTRATION. La première partie de la proposition est évidente. Munissons $\mathcal{N}$ de la structure de catégorie équivalente à la catégorie somme des catégories $\mathcal{F}(\boxminus\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \mathcal{C}^{\perp})$, où $\mathcal{C}^{\perp} \in \mathcal{F}_o$ et $\overline{\mathcal{C}}^{\perp} \in \mathcal{F}_o$. Si le composé $F(\Psi' \square\square \Psi)$ est défini, on a :

$$\alpha(\Psi) = \alpha(\Psi') \text{ et } \beta(\Psi) = \beta(\Psi') = \boxminus\, \alpha(F),$$

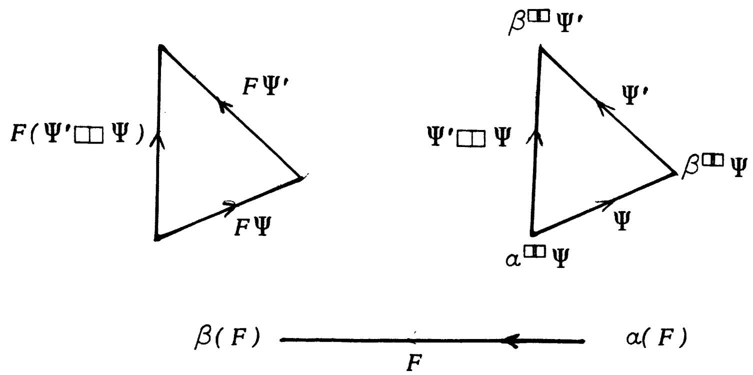
donc $F\Psi$ et $F\Psi'$ sont définis; de plus, on trouve :

$$F(\Psi' \square\square \Psi) = \square F \,.(\Psi' \square\square \Psi) = (\square F \,.\Psi') \square\square (\square F \,.\Psi) = F\Psi' \square\square F\Psi \,,$$

puisque $(\square\square\, \beta(F), \square F, \square\square\, \alpha(F)) \in \mathcal{F}$. Enfin, si Ψ est une unité de $\mathfrak{N}$, $F\Psi = (\square F).\Psi$ est aussi une unité; par suite la condition c de I,5 est vérifiée, ce qui démontre la proposition. De même l'espèce de structures à droite $(\mathcal{F}, \alpha, \mathfrak{N})$ est sous une espèce de morphismes puisque

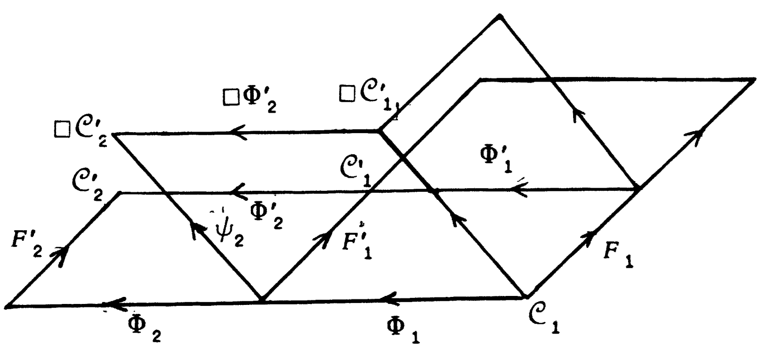
$$(\Psi' \square\square \Psi).F = (\Psi'.F) \square\square (\Psi.F)$$

par définition du composé $\Psi' \square\square \Psi$.



DEFINITION 1. *On appelle* quintette de $\mathcal{F}$ *un quintuplet* $(F', \Phi', \Psi, \Phi, F)$ *tel que* $(F', \Phi', \Phi, F) \in \square(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ = *catégorie des quadruplets de* $(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ *(voir II,5),* $\Psi \in \mathfrak{N}$, $\alpha^{\square\square}\Psi = (\Phi'.F)^{\square\square}$ *et* $\beta^{\square\square}\Psi = (F'.\Phi)^{\square\square}$.

La classe des quintettes de $\mathcal{F}$ sera notée $Q(\mathcal{F})$.



PROPOSITION. *$Q(\mathfrak{F})$ est une catégorie $Q^{\cdot}(\mathfrak{F})$ pour la loi de composition (multiplication longitudinale) suivante :*

$$(F'_2, \Phi'_2, \Psi_2, \Phi_2, F_2).(F'_1, \Phi'_1, \Psi_1, \Phi_1, F_1) = (F'_2, \Phi'_2.\Phi'_1, \Psi, \Phi_2.\Phi_1, F_1)$$

$$\textit{si, et seulement si, } F_2 = F'_1, \textit{ où } \Psi = (\Psi_2 . \Phi_1) \mathbin{\square\!\square} (\Phi'_2 \Psi_1)$$

DEMONSTRATION. Soit $T_i = (F'_i, \Phi'_i, \Psi_i, \Phi_i, F_i) \in Q(\mathfrak{F})$, où $i = 1, 2, 3$; posons $\chi(T_i) = (F'_i, \Phi'_i, \Phi_i, F_i) \in \square(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$ et $\psi(T_i) = \Psi_i \in \mathfrak{N}$. Si $T_3.T_2$ et $T_2.T_1$ sont définis, on a $F_3 = F'_2$ et $F_2 = F'_1$; par suite les composés $T = T_3.(T_2.T_1)$ et $T' = (T_3.T_2).T_1$ sont aussi définis. Montrons que $T = T'$. D'après l'associativité de la multiplication longitudinale dans $\square\!\square(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$ on a $\chi(T) = \chi(T')$, puisque par définition :

$$\chi(T_j.T_i) = \chi(T_j) \mathbin{\square\!\square} \chi(T_i).$$

Par ailleurs, on trouve :

$$\psi(T) = \Psi_3.(\Phi_2.\Phi_1) \mathbin{\square\!\square} \Phi'_3(\Psi_2.\Phi_1 \mathbin{\square\!\square} \Phi'_2 \Psi_1)$$

et

$$\psi(T') = (\Psi_3.\Phi_2 \mathbin{\square\!\square} \Phi'_3 \Psi_2).\Phi_1 \mathbin{\square\!\square} (\Phi'_3.\Phi'_2)\Psi_1.$$

En utilisant l'associativité de la loi de composition $\square\!\square$ et la proposition 1, on a:

$$\psi(T) = (\Psi_3.\Phi_2.\Phi_1) \mathbin{\square\!\square} \Phi'_3(\Psi_2.\Phi_1) \mathbin{\square\!\square} (\Phi'_3.\Phi'_2)\Psi_1 = \psi(T'),$$

d'où $T = T'$. Soit $F \in \mathfrak{F}$. Alors $(F, \beta(F), F^{\square\!\square}, \alpha(F), F) = \overline{\overline{F}} \in Q(\mathfrak{F})$. Si le composé

$$T = T_i.\overline{\overline{F}}$$

est défini, on a $F = F_i$, $\chi(T) = \chi(T_i)$ et $\psi(T) = \Psi_i \mathbin{\square\!\square} F^{\square\!\square} = \Psi_i$. Il en résulte que $Q^{\cdot}(\mathfrak{F})$ est une catégorie, l'unité à droite de T_i étant $\overline{\overline{F}}_i$. De plus $\mathfrak{F}$ s'identifie à la classe des unités de $Q^{\cdot}(\mathfrak{F})$ en identifiant $F \in \mathfrak{F}$ à $\overline{\overline{F}}$.

COROLLAIRE. *Pour que $T = (F', \Phi', \Psi, \Phi, F) \in Q(\mathfrak{F})$ soit inversible dans $Q^{\cdot}(\mathfrak{F})$, il faut et il suffit que Φ et Φ' soient inversibles dans $\mathfrak{F}$ et Ψ dans $\mathfrak{N}$; l'inverse de T est alors :*

$$(F, \Phi'^{-1}, \Psi', \Phi^{-1}, F'), \qquad \textit{où } \Psi' = \Phi'^{-1}\Psi^{-1}.\Phi^{-1}.$$

DEMONSTRATION. Soit $T_1 \in Q(\mathfrak{F})$ tel que $T_1.T = \overline{\overline{F}}$ et $T.T_1 = \overline{\overline{F'}}$; alors le quadruplet $\chi(T_1)$ est l'inverse de $\chi(T)$ dans $\square\!\square(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$; par suite $T_1 = (F, \Phi'^{-1}, \Psi_1, \Phi^{-1}, F')$ tel que :

$$(\Psi_1.\Phi) \mathbin{\square\!\square} (\Phi'^{-1}\Psi) = F^{\square\!\square} \text{ et } (\Psi.\Phi^{-1}) \mathbin{\square\!\square} (\Phi'\Psi_1) = F'^{\square\!\square}.$$

De ces équations, on déduit :

$$\Psi_1 \mathbin{\square\!\square} \Phi'^{-1}\Psi.\Phi^{-1} = F^{\square\!\square}.\Phi^{-1} = \beta^{\square\!\square}\Psi_1;$$

$$\Phi'^{-1}\Psi.\Phi^{-1}\boxminus\Psi_1 = \alpha^{\boxminus}\Psi_1.$$

Donc Ψ_1 est l'inverse de $\Phi'^{-1}\Psi.\Phi^{-1}$ dans $\mathfrak{N}$; il en résulte que Ψ est inversible dans $\mathfrak{N}$ et que :

$$\Psi_1 = \Phi'^{-1}\Psi^{-1}.\Phi^{-1}.$$

PROPOSITION 3. *$Q(\mathcal{F})$ est une catégorie $Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F})$ pour la multiplication latérale définie par :*

$$(F'_2, \Phi'_2, \Psi_2, \Phi_2, F_2) \blacklozenge (F'_1, \Phi'_1, \Psi_1, \Phi_1, F_1) = (F'_2.F'_1, \Phi'_2, \Psi, \Phi_1, F_2.F_1)$$

si, et seulement si, $\Phi_2 = \Phi'_1$, *où* $\Psi = F'_2\Psi_1\boxminus\Psi_2.F_1$.

La démonstration est analogue à celle de la proposition 2. $\mathcal{F}$ s'identifie encore à la classe des unités de $Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F})$, en identifiant Φ à $(\beta(\Phi), \Phi, \Phi^{\boxminus}, \Phi, \alpha(\Phi))$, où $\Phi^{\boxminus}$ est l'unité de $\mathfrak{N}$ associée à Φ. Les éléments inversibles sont les quintettes tels que F, F' et Ψ soient inversibles dans $\mathcal{F}$ et $\mathfrak{N}$ respectivement. L'inverse de $(F', \Phi', \Psi, \Phi, F)$ est $(F'^{-1}, \Phi, \Psi_1, \Phi', F^{-1})$, où $\Psi_1 = F'^{-1}\Psi^{-1}.F^{-1}$.

THEOREME 1. *$(Q^{\cdot}(\mathcal{F}), Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F}))$ est une catégorie double et l'application*

$$\chi : (F', \Phi', \Psi, \Phi, F) \to (F', \Phi', \Phi, F)$$

définit un foncteur double de $(Q^{\cdot}(\mathcal{F}), Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F}))$ vers $\square(\mathcal{F}, \mathcal{F})$.

DEMONSTRATION. Si $\overline{\overline{F}}$ et $\overline{\overline{F'}}$ sont deux unités de $Q^{\cdot}(\mathcal{F})$ et si $\overline{\overline{F'}} \blacklozenge \overline{\overline{F}}$ est défini, on a : $\alpha(F') = \beta(F)$ et :

$$\overline{\overline{F'}} \blacklozenge \overline{\overline{F}} = (F'.F, \beta(F'), (F'.F)^{\boxminus}, \alpha(F), F'.F) = \overline{\overline{F'.F}}.$$

Ainsi $(Q^{\cdot}(\mathcal{F}))_o$ est stable relativement à $\blacklozenge$; de même $(Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F}))_o$ est stable relativement à la multiplication longitudinale. Soit :

$$T_i = (F'_i, \Phi'_i, \Psi_i, \Phi_i, F_i) \in Q(\mathcal{F}) \text{ et } \chi(T_i) = t_i.$$

On trouve facilement :

$$\alpha^{\cdot}(\alpha^{\blacklozenge}(T_i)) = \overline{\overline{\alpha(\Phi_i)}} = \overline{\overline{\alpha(F_i)}} = \alpha^{\blacklozenge}(\alpha^{\cdot}(T_i));$$
$$\beta^{\cdot}(\beta^{\blacklozenge}(T_i)) = \beta^{\blacklozenge}(\beta^{\cdot}(T_i)) = \overline{\overline{\beta(\Phi'_i)}};$$
$$\alpha^{\cdot}(\beta^{\blacklozenge}(T_i)) = \beta^{\blacklozenge}(\alpha^{\cdot}(T_i)) = \overline{\overline{\alpha(\Phi'_i)}};$$
$$\beta^{\cdot}(\alpha^{\blacklozenge}(T_i)) = \alpha^{\blacklozenge}(\beta^{\cdot}(T_i)) = \overline{\overline{\alpha(F'_i)}}.$$

En vertu du théorème 6, II, il reste seulement à démontrer que l'axiome de permutabilité est vérifié. En effet, supposons les composés $(T_4 \blacklozenge T_3)$, $(T_2 \blacklozenge T_1)$, $(T_4.T_2)$ et $(T_3.T_1)$ définis; alors on a :

$$\Phi_4 = \Phi'_3,\ \Phi_2 = \Phi'_1,\ F_4 = F'_2 \text{ et } F_3 = F'_1;$$

par suite $\qquad F_4 . F_3 = F'_2 . F'_1$ et $\Phi_4 . \Phi_2 = \Phi'_3 . \Phi'_1$.

Donc les composés :

$$T = (T_4 \blacklozenge T_3) . (T_2 \blacklozenge T_1) \qquad \text{et} \qquad T' = (T_4 . T_2) \blacklozenge (T_3 . T_1)$$

sont définis. Montrons qu'ils sont égaux. Puisque $\square(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ est une catégorie double pour les multiplications longitudinale et latérale, on a :

$$\chi(T) = (t_4 \boxminus t_3) \square\!\square (t_2 \boxminus t_1) = (t_4 \square\!\square t_2) \boxminus (t_3 \square\!\square t_1) = \chi(T').$$

De plus :

$$\psi(T) = [(F'_4 \Psi_3 \square\!\square \Psi_4 . F_3) . \Phi_1] \square\!\square [\Phi'_4 (F'_2 \ \Psi_1 \square\!\square \Psi_2 . F_1)],$$

$$\psi(T') = [F'_4 (\Psi_3 . \Phi_1 \square\!\square \Phi'_3 \Psi_1] \square\!\square [\Psi_4 . \Phi_2 \square\!\square \Phi'_4 \Psi_2] . F_1 .$$

En utilisant l'associativité de $\square\!\square$ et la proposition 1, on trouve :

$$\psi(T) = F'_4 \Psi_3 . \Phi_1 \square\!\square \tilde{\Psi} \square\!\square \Phi'_4 \Psi_2 . F_1$$

et $\qquad \psi(T') = F'_4 \Psi_3 . \Phi_1 \square\!\square \tilde{\Psi}' \square\!\square \Phi'_4 \Psi_2 . F_1,$

avec $\tilde{\Psi} = \Psi_4 . (F'_1 . \Phi_1) \square\!\square (\Phi'_4 . F_4) \Psi_1$ $\qquad$ et $\qquad$ $\tilde{\Psi}' = (F'_4 . \Phi_4) \Psi_1 \square\!\square \Psi_4 . (\Phi'_1 . F_1)$.

Il suffit donc de prouver que $\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}'$. On obtient :

$$\alpha^{\square\!\square} \tilde{\Psi} = (\Phi'_4 . F_4) \alpha^{\square\!\square} \Psi_1 = (\Phi'_4 . F_4 . \Phi'_1 . F_1)^{\square\!\square}$$

et $\qquad \alpha^{\square\!\square} \tilde{\Psi}' = (\alpha^{\square\!\square} \Psi_4) . (\Phi'_1 . F_1) = (\Phi'_4 . F_4 . \Phi'_1 . F_1)^{\square\!\square} = \alpha^{\square\!\square} \tilde{\Psi};$

de même $\qquad \beta^{\square\!\square} \tilde{\Psi} = (F'_4 . \Phi_4 . F'_1 . \Phi_1)^{\square\!\square} = \beta^{\square\!\square} \tilde{\Psi}'$.

Prouvons que l'on a $\alpha^{\boxminus} \tilde{\Psi} = \alpha^{\boxminus} \tilde{\Psi}'$, ainsi que $\beta^{\boxminus} \tilde{\Psi} = \beta^{\boxminus} \tilde{\Psi}'$. Comme pour tout $f \in \alpha(F_1)$ on a $\alpha^{\boxminus} \tilde{\Psi}(f) = \tilde{\Psi}(\alpha(f))$, on voit que $\alpha^{\boxminus} \tilde{\Psi}$ et $\alpha^{\boxminus} \tilde{\Psi}'$ (resp. $\beta^{\boxminus} \tilde{\Psi}$ et $\beta^{\boxminus} \tilde{\Psi}'$) sont égaux si, et seulement si, $\tilde{\Psi}_o = \tilde{\Psi}'_o$. Si $g \in \mathcal{C}$, posons $\langle g^{\boxminus} \rangle = g$. Soit $e \in \alpha(F_1)_o$; on a :

$$\alpha \langle \Psi_1(e) \rangle = (\Phi'_1 . F_1)(e) \qquad \text{et} \qquad \beta \langle \Psi_1(e) \rangle = (F'_1 . \Phi_1)(e).$$

Comme $\Psi_4(\langle \Psi_1(e) \rangle)$ est un quatuor, on obtient :

$$\langle \Psi_4(F'_1 . \Phi_1(e)) \rangle . (\Phi'_4 . F_4)(\langle \Psi_1(e) \rangle) =$$
$$= (F'_4 . \Phi_4)(\langle \Psi_1(e) \rangle) . \langle \Psi_4(\Phi'_1 . F_1(e)) \rangle ;$$

c'est-à-dire $\tilde{\Psi}(e) = \tilde{\Psi}'(e)$. Par conséquent :

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}', \ \psi(T) = \psi(T') \text{ et } T = T'.$$

Ceci démontre le théorème.

La classe des sommets de $(Q^{\cdot}(\mathcal{F}), Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F}))$ s'identifie à $\mathcal{F}_o$ en identifiant $(\alpha(F), \alpha(F), (\alpha(F))^{\square\!\square}, \alpha(F), \alpha(F))$ avec $\alpha(F)$.

L'application $\nu : \Psi \to ('\beta^{\boxplus}\Psi, \mathcal{C}, \Psi, \alpha(\Psi), '\alpha^{\boxplus}\Psi)$, où $\beta(\Psi) = \boxminus\mathcal{C}$, est une bijection de $\mathfrak{N}$ sur la sous-classe $\mathcal{F}_o \blacklozenge Q(\mathcal{F}) \blacklozenge \mathcal{F}_o$ de $Q(\mathcal{F})$.

PROPOSITION 4. *ν définit sur $\mathfrak{N}$ une structure de catégorie double $(\mathfrak{N}^{\cdot}, \mathfrak{N}^{\blacklozenge})$, équivalente à une sous-catégorie double de $(Q^{\cdot}(\mathcal{F}), Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F}))$. Pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_o$, la classe des transformations naturelles entre foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$ s'identifie à une sous-catégorie double $\mathfrak{N}(\mathcal{C})$ de $(\mathfrak{N}^{\cdot}, \mathfrak{N}^{\blacklozenge})$.*

DEMONSTRATION. $\mathfrak{N}^{\cdot}$ s'identifie à la catégorie somme des catégories $\mathcal{F}(\boxminus\mathcal{C}^{\perp}, \overline{\mathcal{C}}^{\perp})$, où $\mathcal{C}^{\perp} \in \mathcal{F}_o$ et $\overline{\mathcal{C}}^{\perp} \in \mathcal{F}_o$. Dans $\mathfrak{N}^{\blacklozenge}$, la loi de composition est définie par :

$$\Psi_2 \blacklozenge \Psi_1 = ('\beta^{\boxplus}\Psi_2)\Psi_1 \Box \Psi_2 . ('\alpha^{\boxplus}\Psi_1) \text{ si, et seulement si, } \boxminus\alpha(\Psi_1) = \beta(\Psi_2).$$

Par suite $\mathfrak{N}^{\blacklozenge}$ est équivalente à la catégorie latérale des transformations naturelles considérée dans [1]. Pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_o$, la catégorie double $\mathfrak{N}(\mathcal{C})$ s'identifie à la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$, munie des multiplications longitudinale et latérale définies dans [1]; $\mathfrak{N}^{\blacklozenge}(\mathcal{C})$ admet $\mathcal{C}$ pour seule unité.

2. Catégorie induite de la catégorie des quintettes.

Dans la fin de ce paragraphe, nous désignerons par $(\mathfrak{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ une catégorie d'homomorphismes à produits finis résolvante à droite, par $\mathcal{H}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{H}$ contenant le groupoïde Γ des éléments inversibles de $\mathcal{H}$, stable par produit dans $\mathcal{H}$ (définition 3, II), et vérifiant la condition (σ) de la proposition 10, I. Soient $(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}), \overline{\Gamma})$ et $(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}), \overline{\Gamma}')$ les catégories d'homomorphismes au-dessus de $\mathcal{F}$ formées de foncteurs $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$- structurés et $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$- structurés respectivement; nous savons (II, 2 et 7) que ces catégories d'homomorphismes sont à produits finis.

Pour simplifier les notations, nous utiliserons le symbole $[\mathcal{H}]$, qui pourra être lu soit partout $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$, soit partout $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$; de même $[\overline{\mathcal{H}}]$ signifiera soit $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$, soit $\overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$.

Rappelons [2] que, si $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mu_1, \mathcal{C}_1^{\cdot})$ et $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mu_2, \mathcal{C}_2^{\cdot})$ sont des foncteurs, la classe des couples $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ tels que $\mu_1(f_1) = \mu_2(f_2)$ est une sous-catégorie de la catégorie produit $\mathcal{C}_1^{\cdot} \times \mathcal{C}_2^{\cdot}$, appelée *catégorie induite de* $\mathcal{C}_1^{\cdot}$ *par* (μ_2, μ_1), et désignée par $\mu_2^*(\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mu_1)$. Soient p_i les projections canoniques de $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ sur $\mathcal{C}_i$. Rappelons [3] et proposition 31, [2]) que si $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mu_i, \mathcal{C}_i^{\cdot}, \mathcal{S}_i^{\cdot})$ est une catégorie d'homomorphismes et $\mathcal{S}_i^{\cdot}$ le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{C}_i^{\cdot}$, où $i = 1, 2$, alors $(\mathcal{C}_i^{\cdot}, p_i\iota, \mu_2^*(\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mu_1), \mu_2^*(\mathcal{S}_1^{\cdot}, \mu_1))$ est une catégorie d'homomorphismes.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{C}^{\cdot}_1 \times \mathcal{C}^{\cdot}_2 \arrow[dll, "p_1"'] \arrow[dl, "p_2"] \\
\mathcal{C}^{\cdot}_1 \arrow[d, "\mu_1"'] & \mu^*_2(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mu_1) \arrow[l] \arrow[ur, "\iota"] \arrow[d] & \\
{} & \mathcal{C}^{\cdot}_2 \arrow[l, "\mu_2"] &
\end{tikzcd}
$$

Nous reviendrons au § V sur la théorie des catégories structurées induites (cf. [2]); nous démontrerons seulement ici le théorème suivant dont nous aurons besoin.

THEOREME 2. *Soient* $\overline{\mu}_i = ((\mathcal{C}^{\cdot}, s), \mu_i, (\mathcal{C}^{\cdot}_i, s_i)) \in [\overline{\mathcal{H}}]$, *où* $i = 1, 2$. *Il existe une sous-structure* σ *de* $s_1 \times s_2$ *dans* $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ *telle que* $(\mu^*_2(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mu_1), \sigma)$ *soit une sous-catégorie* $[\mathcal{H}]$*-structurée de* $(\mathcal{C}^{\cdot}_1 \times \mathcal{C}^{\cdot}_2, s_1 \times s_2)$; *on appelle* $(\mu^*_2(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mu_1), \sigma)$ *catégorie structurée induite par* $(\overline{\mu}_2, \overline{\mu}_1)$, *notée aussi* $\overline{\mu}_2 \vee \overline{\mu}_1$. *De plus, on a :* $((\mathcal{C}^{\cdot}_i, s_i), p_i\iota, \overline{\mu}_2 \vee \overline{\mu}_1) \in [\overline{\mathcal{H}}]$.

DEMONSTRATION. Puisque $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ est résolvante à droite, le couple :

$$((s, \mu_1 p_1, s_1 \times s_2), (s, \mu_2 p_2, s_1 \times s_2))$$

admet un p-noyau σ tel que $p(\sigma) = \mu^*_2(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mu_1)$. D'après le théorème 13, II, on a $(\mathcal{C}^{\cdot}_1 \times \mathcal{C}^{\cdot}_2, s_1 \times s_2) \in [\overline{\mathcal{H}}]_o$, et il résulte du théorème 14, II, que $(\mu^*_2(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mu_1), \sigma)$ est une sous-catégorie $[\mathcal{H}]$-structurée de la catégorie $[\mathcal{H}]$-structurée $(\mathcal{C}^{\cdot}_1 \times \mathcal{C}^{\cdot}_2, s_1 \times s_2)$.

COROLLAIRE. *Si* $\overline{\mu}_i = ((\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp}), \mu_i, (\mathcal{C}^{\cdot}_i, \mathcal{C}^{\perp}_i))$, *où* $i = 1, 2$, *sont des foncteurs doubles,* $\overline{\mu}_2 \vee \overline{\mu}_1 = (\mu^*_2(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mu_1), \mu^*_2(\mathcal{C}^{\perp}_1, \mu_1))$ *est une catégorie double et* $((\mathcal{C}^{\cdot}_i, \mathcal{C}^{\perp}_i), p_i\iota, \overline{\mu}_2 \vee \overline{\mu}_1)$ *est un foncteur double.*

Soit $(\mathcal{K}, q, \mathcal{L}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes telle que $\mathcal{S}$ soit le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{L}$. Pour abréger, écrivons $\mathcal{L}_\wedge$ pour $(\mathcal{L}, \mathcal{L})$.
Soit $(\boxbar\mathcal{L})_\gamma$ le groupoïde des éléments inversibles de la catégorie longitudinale $\boxbar\mathcal{L}$, dont les éléments sont les quatuors (h', f', f, h) tels que $f \in \mathcal{S}$ et $f' \in \mathcal{S}$. Soit $(\boxminus\mathcal{L})_\gamma$ le groupoïde des éléments inversibles de la catégorie latérale $\boxminus\mathcal{L}$, dont les éléments sont les quatuors (h', f', f, h) tels que $h \in \mathcal{S}$ et $h' \in \mathcal{S}$.

PROPOSITION 5. $(\boxbar\mathcal{K}_\wedge, \square q, \boxbar\mathcal{L}_\wedge, (\boxbar\mathcal{L})_\gamma)$ *et* $(\boxminus\mathcal{K}_\wedge, \square q, \boxminus\mathcal{L}_\wedge, (\boxminus\mathcal{L})_\gamma)$ *sont des catégories d'homomorphismes.*

DEMONSTRATION. Soient $T = (h', f', f, h) \in \square\mathcal{L}_\wedge$ et $\overline{T} = (\overline{h}', \overline{f}', \overline{f}, \overline{h}) \in \square\mathcal{L}_\wedge$. Les conditions : $\alpha^{\boxbar}(T) = \alpha^{\boxbar}(\overline{T})$, $\beta^{\boxbar}(T) = \beta^{\boxbar}(\overline{T})$ et $\square q(T) = \square q(\overline{T})$ entraînent :

$$h = \overline{h}, \quad h' = \overline{h}', \quad q(f) = q(\overline{f}) \quad \text{et} \quad q(f') = q(\overline{f}').$$

Comme $\alpha(f) = \alpha(\overline{f}) = \alpha(h)$ et $\beta(f) = \beta(\overline{f}) = \alpha(h')$, il en résulte $f = \overline{f}$, puisque $(\mathcal{K}, q, \mathcal{L}, \mathcal{S})$ est une catégorie d'homomorphismes; de même $f' = \overline{f'}$, d'où $T = \overline{T}$. Supposons $T \in (\square\!\square \mathcal{L})_\gamma$ et $\overline{T} \in (\square\!\square \mathcal{L})_\gamma$ tels que :

$$\alpha^{\square\square}(T) = \alpha^{\square\square}(\overline{T}) \qquad \text{et} \qquad \square q(T) = \square q(\overline{T});$$

on a : $\quad h = \overline{h},\ \alpha(f) = \alpha(\overline{f}) \qquad$ et $\qquad q(f) = q(\overline{f})$,

donc $f = \overline{f}$, car $f \in \mathcal{S}$; de même $f' = \overline{f'}$. Les éléments f et f' étant inversibles, on en déduit :

$$h' = f' . h . f^{-1} = \overline{f'} . \overline{h} . \overline{f}^{-1} = \overline{h'},$$

et par suite $T = \overline{T}$. Enfin si $T \in (\square\!\square \mathcal{L})_\gamma$ et si $\overline{h} \in \mathcal{L}$ est tel que $q(h) = q(\overline{h})$, il existe $\overline{f} \in \mathcal{S}$ tel que :

$$q(f) = q(\overline{f}) \qquad \text{et} \qquad \alpha(\overline{f}) = \alpha(h)$$

et il existe $\overline{f'} \in \mathcal{S}$ tel que :

$$q(f') = q(\overline{f'}) \qquad \text{et} \qquad \alpha(\overline{f'}) = \beta(h);$$

on en déduit $(\overline{f'} . \overline{h} . \overline{f}^{-1}, \overline{f'}, \overline{f}, \overline{h}) \in (\square\!\square \mathcal{L})_\gamma$. Ceci montre que $(\square\!\square \mathcal{K}_\wedge, \square q, \square\!\square \mathcal{L}_\wedge, (\square\!\square \mathcal{L})_\gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes. Une démonstration analogue prouve que $(\boxminus \mathcal{K}_\wedge, \square q, \boxminus \mathcal{L}_\wedge, (\boxminus \mathcal{L})_\gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes.

Soit $(\mathcal{F}, q, \mathcal{L}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes telle que $\mathcal{S}$ soit le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{L}$.

DEFINITION 2. *On appelle* quintette de $(\mathcal{F}, q, \mathcal{L}, \mathcal{S})$ *un élément de la catégorie induite* $\chi^*(\square\!\square \mathcal{L}_\wedge, \square q)$ *de* $\square\!\square \mathcal{L}_\wedge$ *par* $(\chi, \square q)$, *où* χ *est le foncteur canonique de* $Q^{\cdot}(\mathcal{F})$ *vers* $\square\!\square \mathcal{F}_\wedge$ *(théorème 1).*

Un quintette de $(\mathcal{F}, q, \mathcal{L}, \mathcal{S})$ est donc un couple :

$$((F', \Phi', \Phi, F), (q(F'), q(\Phi'), \Psi, q(\Phi), q(F))),$$

où $(F', \Phi', \Phi, F) \in \square \mathcal{L}_\wedge$, $\Psi \in \mathfrak{N}$, $'\alpha^{\square\square}\Psi = q(F'.\Phi)$ et $'\beta^{\square\square}(\Psi) = q(F'.\Phi)$. Nous désignerons ce quintette par la notation abrégée : $(F', \Phi', \Psi, \Phi, F)$.

Soit $Q(\mathcal{F}, q, \mathcal{L}, \mathcal{S})$, ou plus simplement $Q(\mathcal{L})$, la classe des quintettes de $(\mathcal{F}, q, \mathcal{L}, \mathcal{S})$. Soit $\overline{q}$ la projection canonique :

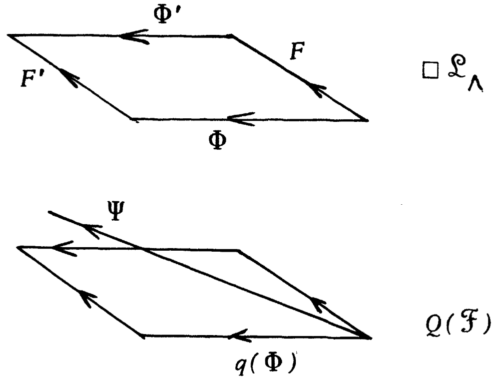
$$(F', \Phi', \Psi, \Phi, F) \to (q(F'), q(\Phi'), \Psi, q(\Phi), q(F))$$

de $Q(\mathcal{L})$ vers $Q(\mathcal{F})$. Soit $\overline{\chi}$ la projection canonique :

$$(F', \Phi', \Psi, \Phi, F) \to (F', \Phi', \Phi, F).$$

On a $(\square q)\overline{\chi} = \chi\, \overline{q}$.

$$\begin{tikzcd}
Q(\mathcal{F}) \arrow[d, "\chi"'] & Q(\mathcal{L}) \arrow[l, "\bar{q}"'] \arrow[d, "\bar{\chi}"] \\
\square \mathcal{F}_\wedge & \square \mathcal{L}_\wedge \arrow[l, "\square q"]
\end{tikzcd}$$



THEOREME 3. *$Q(\mathcal{L})$ est munie d'une structure de catégorie double $(Q^{\cdot}(\mathcal{L}), Q^{\blacklozenge}(\mathcal{L}))$ induite par* $[((\square\!\square \mathcal{F}_\wedge, \boxminus \mathcal{F}_\wedge), \chi, (Q^{\cdot}(\mathcal{F}), Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F})), ((\square\!\square \mathcal{F}_\wedge, \boxminus \mathcal{F}_\wedge), \square q, (\square\!\square \mathcal{L}_\wedge, \boxminus \mathcal{L}_\wedge))]$. *Les applications $\bar{q}$ et $\bar{\chi}$ définissent des foncteurs doubles.*

En effet, χ et $\square q$ définissant deux foncteurs doubles, le théorème 3 résulte des théorèmes 1 et 2. Les lois de compositions sur $Q(\mathcal{L})$, appelées resp. *multiplication longitudinale et multiplication latérale,* sont définies de la manière suivante :

$$(F'_2, \Phi'_2, \Psi_2, \Phi_2, F_2) . (F'_1, \Phi'_1, \Psi_1, \Phi_1, F_1) = (F'_2, \Phi'_2 . \Phi'_1, \Psi, \Phi_2 . \Phi_1, F_1)$$

si, et seulement si, $F_2 = F'_1$, où : $\Psi = \Psi_2 . q(\Phi_1) \square\!\square\, q(\Phi'_2) \Psi_1$;

$$(F'_2, \Phi'_2, \Psi_2, \Phi_2, F_2) \blacklozenge (F'_1, \Phi'_1, \Psi_1, \Phi_1, F_1) = (F'_2 . F'_1, \Phi'_2, \Psi, \Phi_1, F_2 . F_1)$$

si, et seulement si, $\Phi_2 = \Phi'_1$, où: $\Psi = q(F'_2) \Psi_1 \square\!\square\, \Psi_2 . q(F_1)$.

Pour que $T = (F', \Phi', \Psi, \Phi, F) \in Q(\mathcal{L})$ soit inversible dans $Q^{\cdot}(\mathcal{L})$ (resp. $Q^{\blacklozenge}(\mathcal{L})$), il faut et il suffit que $\Phi \in \mathcal{S}$, $\Phi' \in \mathcal{S}$ (resp. $F \in \mathcal{S}$, $F' \in \mathcal{S}$) et que Ψ soit inversible dans $\mathcal{N}$.

COROLLAIRE. *$(Q^{\cdot}(\mathcal{F}), \bar{q}, Q^{\cdot}(\mathcal{L}), \Sigma_1^{\cdot})$ et $(Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F}), \bar{q}, Q^{\blacklozenge}(\mathcal{L}), \Sigma_2^{\blacklozenge})$ sont des catégories d'homomorphismes, où Σ_1 (resp. Σ_2) est la classe des quintettes $(F', \Phi', \Psi, \Phi, F)$ tels que $\Phi' \in \mathcal{S}$ et $\Phi \in \mathcal{S}$ (resp. $F' \in \mathcal{S}$ et $F \in \mathcal{S}$) et $(F', \Phi', \Phi, F) \in \square \mathcal{L}$.*

Ce corollaire résulte de la proposition 5 et du résultat rappelé avant le théorème 2.

Identifions $\mathcal{L}_0$ à la classe des sommets de $(Q^{\cdot}(\mathcal{L}), Q^{\blacklozenge}(\mathcal{L}))$.

Soit $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ la sous-classe $\mathcal{L}_0 \blacklozenge Q(\mathcal{L}) \blacklozenge \mathcal{L}_0$ de $Q(\mathcal{L})$ formée des quintettes T tels que $\alpha^{\blacklozenge}(T) \in \mathcal{L}_0$ et $\beta^{\blacklozenge}(T) \in \mathcal{L}_0$, c'est-à-dire de la forme $(F', \beta(F), \Psi_0, \alpha(F), F)$.

PROPOSITION 6. *$\mathcal{N}(\mathcal{L})$ est une sous-catégorie double de $(Q^{\cdot}(\mathcal{L}), Q^{\blacklozenge}(\mathcal{L}))$. Pour tout $L \in \mathcal{L}_0$, $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ admet pour sous-catégorie double la classe $L \blacklozenge Q(\mathcal{L}) \blacklozenge L$ des quintettes T tels que $\alpha^{\blacklozenge}(T) = L = \beta^{\blacklozenge}(T)$.*

$\mathcal{N}(\mathcal{L})$ s'identifie à la catégorie double induite par :

$$((\square \mathcal{F}_\wedge, \chi, \nu(\mathcal{N})), (\square \mathcal{F}_\wedge, \square q, (\square\!\square \mathcal{L}_\wedge)_0)).$$

3. Quintettes structurés.

Soit $(\bar{\bar{\boxminus}}, \bar{\varepsilon}, \bar{\bar{\boxbar}})$ l'équivalence naturelle entre foncteurs de $[\bar{\mathcal{H}}]$ vers $[\bar{\mathcal{H}}]$ construite au § II, corollaire du théorème 16, telle que : $\bar{\bar{\boxbar}}(\mathcal{C}^{\cdot}, s) = (\boxbar\mathcal{C}^{\cdot}, \square s)$ et $\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot}, s) = (\boxminus\,\mathcal{C}^{\cdot}, \square s)$ pour tout $(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in [\bar{\mathcal{H}}]_o$. Rappelons que l'on a :

$$(s, \mu^{\boxbar}, \boxbar\, s_o) \in \Gamma, \quad \text{où} \quad \boxbar\, s_o \propto \square s$$

et

$$(s, \mu^{\boxminus}, \boxminus\, s_o) \in \Gamma, \quad \text{où} \quad \boxminus\, s_o \propto \square s.$$

Nous poserons :

$$'\bar{\alpha}^{\boxbar} = ((\mathcal{C}^{\cdot}, s), {'\alpha^{\boxbar}}, \bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot}, s))$$

et

$$'\bar{\beta}^{\boxbar} = ((\mathcal{C}^{\cdot}, s), {'\beta^{\boxbar}}, \bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot}, s)).$$

DEFINITION 3. *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in [\bar{\mathcal{H}}]_o$ *; un foncteur* $[\mathcal{H}]$*-structuré* $\bar{\Psi}$ *tel que* $\beta(\bar{\Psi}) = \bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *sera appelé* transformation naturelle $[\mathcal{H}]$- structurée de $'\bar{\alpha}^{\boxbar}.\bar{\Psi}$ vers $'\bar{\beta}^{\boxbar}.\bar{\Psi}$.

Nous désignerons par $\bar{\mathcal{N}}([\bar{\mathcal{H}}])$ la classe des transformations naturelles $[\mathcal{H}]$-structurées. Si $\bar{\Psi} \in \bar{\mathcal{N}}([\bar{\mathcal{H}}])$, nous représenterons $\bar{\Psi}$ soit par le triplet $(\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot}, s), \Psi, (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}))$, soit par le triplet $(\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot}, s), \psi, (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}))$ où $\Psi = \bar{p}(\bar{\Psi}) = (\boxminus\,\mathcal{C}^{\cdot}, \psi, \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}) \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$ et $\psi = p_{\mathcal{F}}(\Psi)$, en désignant encore par $p_{\mathcal{F}}$ le foncteur canonique de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{M}$.

PROPOSITION 7. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) On a : $(\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot}, s), \psi, (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s})) \in \bar{\mathcal{N}}([\bar{\mathcal{H}}])$.

2) On a : $(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in [\bar{\mathcal{H}}]_o$, $(\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}) \in [\bar{\mathcal{H}}]_o$, $(\boxminus\,\mathcal{C}^{\cdot}, \psi, \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}) \in \mathcal{F}$, $(s, {'\alpha^{\boxbar}}\psi, \bar{s}) \in \mathcal{H}$, $(s, {'\beta^{\boxbar}}\psi, \bar{s}) \in \mathcal{H}$ *et* $(s, \mu^{\boxminus}\psi_o, \bar{s}_o) \in \mathcal{H}$.

DEMONSTRATION : Supposons la condition 1 vérifiée; on a :

$$(\boxminus\,\mathcal{C}^{\cdot}, \psi, \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}) \in \mathcal{F},$$

$$(s, \mu^{\boxbar}, \boxbar\, s_o).(\boxbar\, s_o, \alpha^{\boxbar}, \square s).(\square s, \psi, \bar{s}) = (s, {'\alpha^{\boxbar}}\psi, \bar{s}) \in \mathcal{H}$$

et, de même,

$$(s, {'\beta^{\boxbar}}\psi, \bar{s}) \in \mathcal{H}.$$

Puisque: $(\square s, \psi_o, \bar{s}_o) = (\square s, \psi, \bar{s}).(\bar{s}, \iota, \bar{s}_o) \in \mathcal{H}$ et $\psi_o(p(\bar{s}_o)) \subset p(\boxminus\, s_o)$

on obtient $(\boxminus\, s_o, \psi_o, \bar{s}_o) \in \mathcal{H}$, d'où $(s, \mu^{\boxminus}\psi_o, \bar{s}_o) \in \mathcal{H}$.

Inversement supposons la condition 2 vérifiée. Pour tout $f \in \mathcal{C}$, on a :

$$\psi(f) = ({'\beta^{\boxbar}}\psi(f), \mu^{\boxminus}\psi_o(\beta(f)), \mu^{\boxminus}\psi_o(\beta(f)), {'\alpha^{\boxbar}}\psi(f)),$$

de sorte que ψ se décompose sous la forme :

$$\psi = [[{'\beta^{\boxbar}}\psi, \mu^{\boxminus}\psi_o\beta], [\mu^{\boxminus}\psi_o\alpha, {'\alpha^{\boxbar}}\psi]];$$

comme

$$(s, \mu^{\boxminus}\psi_o, \bar{s}_o).(\bar{s}_o, \alpha, \bar{s}) = (s, \mu^{\boxminus}\psi_o\alpha, \bar{s}) \in \mathcal{H}, \ (s, \mu^{\boxminus}\Psi_o\beta, \bar{s}) \in \mathcal{H},$$

$$(s, {}'\alpha^{\boxbox}\psi, \bar{s}) \in \mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad (s, {}'\beta^{\boxbox}\psi, \bar{s}) \in \mathcal{H},$$

on trouve : $$((s \times s) \times (s \times s), \psi, s) \in \mathcal{H}.$$

En tenant compte des relations :

$$\Box s \propto (s \times s) \times (s \times s) \qquad \text{et} \qquad \psi(\bar{\mathcal{C}}) \subset \boxminus \mathcal{C},$$

il en résulte $(\Box s, \psi, \bar{s}) \in \mathcal{H}$, donc $(\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^\cdot, s), \psi, (\bar{\mathcal{C}}^\cdot, \bar{s})) \in \bar{\mathfrak{N}}([\bar{\mathcal{H}}])$.

Soient $(\mathcal{C}^\cdot, s) \in [\bar{\mathcal{H}}]_o$ et $(\bar{\mathcal{C}}^\cdot, \bar{s}) \in [\bar{\mathcal{H}}]_o$. Nous désignerons par $\bar{\mathfrak{N}}((\mathcal{C}^\cdot, s), (\bar{\mathcal{C}}^\cdot, \bar{s}))$ la sous-classe de $\bar{\mathfrak{N}}([\bar{\mathcal{H}}])$ formée des transformations naturelles $[\mathcal{H}]$-structurées de la forme $(\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^\cdot, s), \Psi, (\bar{\mathcal{C}}^\cdot, \bar{s}))$.

PROPOSITION 8. *$\bar{p}(\bar{\mathfrak{N}}((\mathcal{C}^\cdot, s), (\bar{\mathcal{C}}^\cdot, \bar{s})))$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F}(\boxminus \mathcal{C}^\cdot, \bar{\mathcal{C}}^\cdot)$.*

DEMONSTRATION. Soient $\bar{\Psi}_i = (\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^\cdot, s), \Psi_i, (\bar{\mathcal{C}}^\cdot, \bar{s})) \in \bar{\mathfrak{N}}((\mathcal{C}^\cdot, s), (\bar{\mathcal{C}}^\cdot, \bar{s}))$, où $i = 1, 2$. En utilisant la relation :

$$(\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^\cdot, s), \alpha^{\boxbox}, \bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^\cdot, s)) \in [\bar{\mathcal{H}}],$$

on trouve :

$$(\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^\cdot, s), \alpha^{\boxbox}\Psi_i, (\bar{\mathcal{C}}^\cdot, \bar{s})) = (\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^\cdot, s), \alpha^{\boxbox}, \bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^\cdot, s)).\bar{\Psi}_i \in \bar{\mathfrak{N}}((\mathcal{C}^\cdot, s), (\bar{\mathcal{C}}^\cdot, \bar{s})) .$$

De même : $$(\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^\cdot, s), \beta^{\boxbox}\Psi_i, (\bar{\mathcal{C}}^\cdot, \bar{s})) \in \bar{\mathfrak{N}}((\mathcal{C}^\cdot, s), (\bar{\mathcal{C}}^\cdot, \bar{s})).$$

Supposons que $\Psi_2 \boxbox \Psi_1$ soit défini dans $\mathcal{F}(\boxminus \mathcal{C}^\cdot, \bar{\mathcal{C}}^\cdot)$; puisque $(s, \mu^{\boxminus}(\Psi_i)_o, \bar{s}_o) \in \mathcal{H}$, on a :

$$(s \times s, [\mu^{\boxminus}(\Psi_2)_o, \mu^{\boxminus}(\Psi_1)_o], \bar{s}_o) \in \mathcal{H};$$

soit $s' \propto s$ tel que $p(s') = \mathcal{C}^\cdot * \mathcal{C}^\cdot$. La relation :

$$[\mu^{\boxminus}(\Psi_2)_o, \mu^{\boxminus}(\Psi_1)_o](\bar{\mathcal{C}}_o^\cdot) \subset \mathcal{C}^\cdot * \mathcal{C}^\cdot$$

entraîne $(s', [\mu^{\boxminus}(\Psi_2)_o, \mu^{\boxminus}(\Psi_1)_o], \bar{s}_o) \in \mathcal{H}$ et :

$$(s, \kappa^\cdot, s').(s', [\mu^{\boxminus}(\Psi_2)_o, \mu^{\boxminus}(\Psi_1)_o], \bar{s}_o) = (s, \mu^{\boxminus}(\Psi_2 \boxbox \Psi_1)_o, \bar{s}_o) \in \mathcal{H};$$

comme : $$(\mathcal{C}^\cdot, {}'\beta^{\boxbox}, \boxminus \mathcal{C}^\cdot).(\Psi_2 \boxbox \Psi_1) = (\mathcal{C}^\cdot, {}'\beta^{\boxbox}, \boxminus \mathcal{C}^\cdot).\Psi_2$$

et $$(\mathcal{C}^\cdot, {}'\alpha^{\boxbox}, \boxminus \mathcal{C}^\cdot).(\Psi_2 \boxbox \Psi_1) = (\mathcal{C}^\cdot, {}'\alpha^{\boxbox}, \boxminus \mathcal{C}^\cdot).\Psi_1,$$

on déduit de la proposition 7 :

$$(\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^\cdot, s), \Psi_2 \boxbox \Psi_1, (\bar{\mathcal{C}}^\cdot, \bar{s})) \in \bar{\mathfrak{N}}([\bar{\mathcal{H}}]).$$

Donc $\bar{p}(\bar{\mathfrak{N}}((\mathcal{C}^\cdot, s), (\bar{\mathcal{C}}^\cdot, \bar{s})))$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F}(\boxminus \mathcal{C}^\cdot, \bar{\mathcal{C}}^\cdot)$.

COROLLAIRE. *$\bar{\mathfrak{N}}([\bar{\mathcal{H}}])$ est une catégorie pour la loi de composition définie par :*

$$(\bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}) \to \bar{\Psi}_1 \boxbox \bar{\Psi} = (\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^\cdot, s), \bar{p}(\bar{\Psi}_1) \boxbox \bar{p}(\bar{\Psi}), (\bar{\mathcal{C}}^\cdot, \bar{s}))$$

si, et seulement si, $\alpha(\bar{\Psi}) = \alpha(\bar{\Psi}_1) = (\bar{\mathcal{C}}^\cdot, s)$ et $\beta(\bar{\Psi}) = \beta(\bar{\Psi}_1) = \bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^\cdot, s)$.

La classe des unités de $\mathfrak{H}([\mathcal{H}])$ s'identifie à $[\mathcal{H}]$ en identifiant les unités à droite et à gauche de $\overline{\Psi} = (\overline{\boxminus}(\mathcal{C}^{\cdot}, s), \psi, (\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}))$ à $((\mathcal{C}^{\cdot}, s), {}'\alpha^{\square\square}\psi, (\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}))$ et à $((\mathcal{C}^{\cdot}, s), {}'\beta^{\square\square}\psi, (\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}))$ respectivement.

PROPOSITION 3. $[\mathcal{H}]$ *est une catégorie d'opérateurs (resp. à droite) sur* $\mathfrak{H}([\mathcal{H}])$ *pour la loi de composition :*

$$(F, \overline{\Psi}) \to \overline{\boxminus}\, F.\overline{\Psi} \quad \textit{si, et seulement si,} \quad \beta(\overline{\Psi}) = \overline{\boxminus}\,\alpha(F)$$

$$(\textit{resp. } (\overline{\Psi}, F) \to \overline{\Psi}.F \quad \textit{si, et seulement si,} \quad \alpha(\overline{\Psi}) = \beta(F));$$

l'espèce de structures (resp. structures à droite) ainsi définie est sous une espèce de morphismes.

Cette proposition se démontre comme la proposition 2. La catégorie dont les éléments $\overline{\Psi}$ sont les structures composables avec F est la catégorie somme des catégories $\mathfrak{H}((\mathcal{C}^{\cdot}, s), (\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}))$, où $(\mathcal{C}^{\cdot}, s) = \alpha(F)$ et $(\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}) \in [\mathcal{H}]_0$. (Resp. la catégorie dont les éléments sont les $\overline{\Psi}$ composables à droite avec F est la catégorie somme des catégories $\mathfrak{H}((\mathcal{C}^{\cdot}, s), (\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}))$, où $(\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}) = \beta(F)$).

Soit $Q([\mathcal{H}])$ la classe des quintettes de $(\mathcal{F}, \bar{p}, [\mathcal{H}], \overline{\Gamma})$.

DEFINITION 4. *On appellera* quintette $[\mathcal{H}]$- structuré *un quintuplet* $(F', \Phi', \overline{\Psi}, \Phi, F)$ *tel que* $\overline{\Psi} \in \mathfrak{H}(\beta(\Phi'), \alpha(\Phi))$ *et*

$$(F', \Phi', \bar{p}(\overline{\Psi}), \Phi, F) \in Q([\mathcal{H}]).$$

Soit $\overline{Q}([\mathcal{H}])$ la classe des quintettes $[\mathcal{H}]$- structurés.

PROPOSITION 10. *On a* $\overline{T} = (F', \Phi', \overline{\Psi}, \Phi, F) \in \overline{Q}([\mathcal{H}])$ *si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\overline{\Psi} \in \mathfrak{H}(\beta(\Phi'), \alpha(\Phi)), (F', \Phi', \Phi, F) \in \square([\mathcal{H}], [\mathcal{H}]),$$

$${}'\bar{\alpha}^{\square\square}.\overline{\Psi} = \Phi'.F \qquad \textit{et} \qquad {}'\bar{\beta}^{\square\square}.\overline{\Psi} = F'.\Phi.$$

En effet, si $\overline{T} \in \overline{Q}([\mathcal{H}]))$, on a : ${}'\alpha^{\square\square}\bar{p}(\overline{\Psi}) = \bar{p}(\Phi'.F)$ et $\alpha(\overline{\Psi}) = \alpha(F)$, d'où : ${}'\bar{\alpha}^{\square\square}.\overline{\Psi} = ((\beta(\Phi'), {}'\alpha^{\square\square}\bar{p}(\overline{\Psi}), \alpha(\overline{\Psi})) = \Phi'.F$; de même on trouve : ${}'\bar{\beta}^{\square\square}.\overline{\Psi} = F'.\Phi$. La réciproque est évidente.

THEOREME 4. $\overline{Q}([\mathcal{H}])$ *est une catégorie double équivalente à une sous-catégorie double de* $(Q^{\cdot}([\mathcal{H}]), Q^{\blacklozenge}([\mathcal{H}]))$.

DEMONSTRATION. Soit $\tilde{q}$ l'application :

$$\overline{T}_i = (F'_i, \Phi'_i, \overline{\Psi}_i, \Phi_i, F_i) \to (F'_i, \Phi'_i, \bar{p}(\overline{\Psi}_i), \Phi_i, F_i)$$

de $\overline{Q}([\mathcal{H}])$ dans $Q([\mathcal{H}])$. L'égalité : $\tilde{q}(\overline{T}_i) = \tilde{q}(\overline{T}_j)$ entraîne :

$$\bar{p}(\overline{\Psi}_i) = \bar{p}(\overline{\Psi}_j), \ \alpha(\overline{\Psi}_i) = \alpha(\overline{\Psi}_j) \ \text{ et } \ \beta(\overline{\Psi}_i) = \beta(\overline{\Psi}_j) = \overline{\boxminus}\,\beta(\Phi'_j),$$

d'où $\overline{T}_i = \overline{T}_j$; ainsi $\tilde{q}$ est une injection. On a :

$$\alpha^{\cdot}(\tilde{q}(\overline{T}_i)) = (F_i, F_i, F_i^{\boxminus}, F_i, F_i).$$

Si $\tilde{q}(\overline{T}_2).\tilde{q}(\overline{T}_1)$ est défini dans $Q^{\cdot}([\mathcal{H}])$, on obtient :

$$\tilde{q}(\overline{T}_2).\tilde{q}(\overline{T}_1) = (F'_2, \Phi'_2.\Phi'_1, \Psi, \Phi_2.\Phi_1, F_1),$$

$$\text{où} \quad \Psi = \overline{p}(\overline{\Psi}_2).\overline{p}(\Phi_1) \boxminus (\overline{p}(\Phi'_2)\overline{p}(\overline{\Psi}_1)).$$

Il résulte des propositions 8 et 9 que l'on a :

$$\overline{\Psi} = \overline{\Psi}_2.\Phi_1 \boxminus \Phi'_2 \overline{\Psi}_1 \in \overline{\mathcal{H}}([\mathcal{H}])$$

et, comme $\Psi = \overline{p}(\overline{\Psi})$, on trouve : $\tilde{q}(\overline{T}_2).\tilde{q}(\overline{T}_1) \in \tilde{q}(\overline{Q}([\mathcal{H}]))$. Par suite $\tilde{q}(\overline{Q}([\mathcal{H}]))$ est une sous-catégorie de $Q^{\cdot}([\mathcal{H}])$. On montre de même que $\tilde{q}(\overline{Q}([\mathcal{H}]))$ est une sous-catégorie de $Q^{\cdot}([\overline{\mathcal{H}}])$. Ceci permet de définir sur $\overline{Q}([\mathcal{H}])$ une structure de catégorie double telle que $\tilde{q}$ devienne une équivalence double sur $\tilde{q}(\overline{Q}[\mathcal{H}])$.

4. Applications covariantes.

Soient $\eta = (\mathcal{C}, \pi, \mathcal{S})$ et $\eta' = (\mathcal{C}', \pi', \mathcal{S}')$ deux espèces de structures. Rappelons la définition suivante :

DEFINITION 5. *On appelle* application covariante de η vers η' *un couple* $(\varphi, \overline{\varphi}_o)$ *tel que* $(\mathcal{C}', \varphi, \mathcal{C})$ *soit un foncteur et que* $\overline{\varphi}_o$ *soit une application de* $\mathcal{S}_o$ *dans* $\mathcal{S}'_o$ *vérifiant la condition :*

$$\overline{\varphi}_o(fz) = \varphi(f)\overline{\varphi}_o(z) \ \textit{si} \ z \in \mathcal{S}_o, f \in \mathcal{C} \ \textit{et} \ \pi(z) = \alpha(f).$$

L'application covariante $(\varphi, \overline{\varphi}_o)$ sera aussi représentée par :

$$(\eta', (\varphi, \overline{\varphi}_o), \eta).$$

Rappelons [3] que si $(\eta', (\varphi, \overline{\varphi}_o), \eta)$ est une application covariante l'application $\overline{\varphi}: (f, z) \to (\varphi(f), \overline{\varphi}_o(z))$, où $(f, z) \in \mathcal{S}$, est un foncteur de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$, qui est un relèvement de φ relativement à (π, π'), c'est-à-dire que l'on a : $\pi'.\overline{\varphi} = \varphi.\pi$.

Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{F}$ les catégories déjà considérées. Soit $\mathcal{M}'_o$ une classe de classes contenant avec une classe toutes ses sous-classes. Supposons que la catégorie $\mathcal{M}'$ de toutes les applications (M', f, M), où $M' \in \mathcal{M}'_o$ et $M \in \mathcal{M}'_o$, appartienne à $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que la classe $\mathcal{M}'$ appartienne à $\mathcal{M}_o$. Soit $\mathcal{A}(\mathcal{M}')_o$ la classe des espèces de structures $\eta = (\mathcal{C}, \pi, \mathcal{S})$ telles que $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$ et $\pi^{-1}(e) \in \mathcal{M}'_o$ pour tout $e \in \pi(\mathcal{S}_o)$. Soit $\mathcal{A}(\mathcal{M}')$ la classe de toutes les applications covariantes entre espèces de structures appartenant à $\mathcal{A}(\mathcal{M}')_o$. Alors (voir [3]) $\mathcal{A}(\mathcal{M}')$ est une catégorie pour la loi de composition :

$$(\eta'_1, (\varphi_1, \overline{\varphi}^1_o), \eta_1).(\eta', (\varphi, \overline{\varphi}_o), \eta) = (\eta'_1, (\varphi_1.\varphi, \overline{\varphi}^1_o.\overline{\varphi}_o), \eta)$$

si, et seulement si, $\eta_1 = \eta'$.

Nous identifierons $\mathfrak{A}(\mathfrak{M}')_o$ à la classe des unités de $\mathfrak{A}(\mathfrak{M}')$ en identifiant η avec $(\eta, (Id_{\mathcal{C}}, Id_{\mathcal{S}_o}), \eta)$.

Rappelons que $(\mathcal{C}, F)$ est un couple définissant une espèce de structures $\eta \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M}')$ si F est un foncteur d'une sous-catégorie de la catégorie $\mathcal{C}$ vers $\mathfrak{M}'$ tel que :

$$F(e) \neq \emptyset \text{ pour tout } e \in \alpha(F)_o \qquad \text{et} \qquad F(e) \cap F(e') = \emptyset \text{ si } e \neq e'.$$

THEOREME 5. *$\mathfrak{A}(\mathfrak{M}')$ est une catégorie équivalente à une sous-catégorie $\mathfrak{A}'(\mathfrak{M}')$ de la catégorie produit $\mathcal{F} \times Q^{\cdot}(\mathcal{F})$.*

DEMONSTRATION. Supposons $(\eta', (\varphi, \overline{\varphi}_o), \eta) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M}')$. Soient $(\mathcal{C}, F)$ et $(\mathcal{C}', F')$ les couples définissant η et η' respectivement. Soit Φ la restriction de φ à $\alpha(F)$ et, pour tout $e \in \alpha(F)_o$, soit $\tau(e)$ la restriction de $\overline{\varphi}_o$ à $F(e)$. Alors l'application:

$$f \to (F'.\Phi(f), \tau(\beta(f)), \tau(\alpha(f)), F(f)), \qquad \text{où } f \in \alpha(F),$$

définit un foncteur Ψ de $\alpha(F)$ vers $\boxminus\mathfrak{M}'$ et on a :

$$(F', \mathfrak{M}', \Psi, \Phi, F) \in Q(\mathcal{F}),$$

en identifiant $\mathfrak{M}'$ au foncteur identique de $\mathfrak{M}'$. Inversement soit $\tilde{\mathfrak{A}}'(\mathfrak{M}')$ la sous-classe de $Q(\mathcal{F})$ formée des $(F', \mathfrak{M}', \Psi, \Phi, F)$ tels que $(\alpha(F), F)$ et $(\alpha(F'), F')$ définissent des espèces de structures; $\tilde{\mathfrak{A}}'(\mathfrak{M}')$ est une sous-catégorie de $Q^{\cdot}(\mathcal{F})$. Soit $\mathfrak{A}'(\mathfrak{M}')$ la sous-catégorie de $\mathcal{F} \times Q^{\cdot}(\mathcal{F})$ formée des couples (φ, T) tels que $T = (F', \mathfrak{M}', \Psi, \Phi, F) \in \tilde{\mathfrak{A}}'(\mathfrak{M}')$ et que Φ soit une restriction de $\varphi \in \mathcal{F}$. Soit $(\varphi, T) \in \mathfrak{A}'(\mathfrak{M}')$; soient $a(\mathcal{C}, F) = (\mathcal{C}, \pi, \mathcal{S})$ et $a(\mathcal{C}', F') = (\mathcal{C}', \pi', \mathcal{S}')$ les espèces de structures définies par $(\alpha(\varphi), F)$ et $(\beta(\varphi), F')$ respectivement. Pour tout $e \in \alpha(F)_o$, $\mu^{\boxminus}\Psi_o(e)$ est une application de $F(e)$ dans $F'\Phi(e)$; comme :

$$(F'\Phi(f), \mu^{\boxminus}\Psi_o(e'), \mu^{\boxminus}\Psi_o(e), F(f)), \qquad \text{où } f \in \alpha(F),\ e = \alpha(f),\ e' = \beta(f),$$

est un quatuor de $\mathfrak{M}'$, on a, pour tout $z \in F(e)$:

$$\mu^{\boxminus}\Psi_o(e')(F(f)(z)) = F'\Phi(f)(\mu^{\boxminus}\Psi_o(e)(z)),$$

c'est-à-dire

$$\mu^{\boxminus}\Psi_o(e')(fz) = \Phi(f)(\mu^{\boxminus}\Psi_o(e)(z)),$$

en utilisant les lois de composition dans $a(\mathcal{C}, F)$ et $a(\mathcal{C}', F')$. Par suite, si $\overline{\varphi}_o$ désigne l'application de $\mathcal{S}_o$ dans $\mathcal{S}'_o$ définie par :

$$\overline{\varphi}_o(z) = \mu^{\boxminus}\Psi_o(\pi(z))(z) \qquad \text{pour tout } z \in \mathcal{S}_o,$$

$(a(\mathcal{C}', F'), (\varphi, \overline{\varphi}_o), a(\mathcal{C}, F))$ est une application covariante. Ceci montre que l'application

$$a : (\varphi, T) \to (a(\mathcal{C}', F'), (\varphi, \overline{\varphi}_o), a(\mathcal{C}, F))$$

est une bijection de $\mathfrak{A}'(\mathfrak{M}')$ sur $\mathfrak{A}(\mathfrak{M}')$. De plus, si $(\varphi_1, T_1) \in \mathfrak{A}'(\mathfrak{M}')$, $\alpha(\varphi_1) = \beta(\varphi)$

$\alpha^{\bullet}(T_1) = \beta^{\bullet}(T)$, on a :

$$(\varphi_1, T_1).(\varphi, T) = (\varphi_1 . \varphi, T_1 . T)$$

et $a(\varphi_1 . \varphi, T_1 . T) = a(\varphi_1, T_1) . a(\varphi, T))$ dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{M}')$. On en déduit que a est une équivalence de $\mathfrak{A}'(\mathfrak{M}')$ sur $\mathfrak{A}(\mathfrak{M}')$.

Comme $\mathcal{F}$ est équivalente à une sous-catégorie de $Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F})$, la catégorie $\mathcal{F}$ opère sur la classe des quintettes T tels que $\beta^{\blacklozenge}(T)$ soit une catégorie,relativement à la loi de composition :

$$(\lambda, T) \to \lambda T = \overline{\overline{\lambda}} \blacklozenge T.$$

Soit $(\mathfrak{M}', \gamma, \mathcal{K}) \in \mathcal{F}$. Supposons que $\mathcal{K}'$ et $\mathcal{K}''$ soient deux sous-catégories de $\mathcal{K}$ et désignons par γ' et γ'' les restrictions de γ à $\mathcal{K}'$ et à $\mathcal{K}''$ respectivement. Rappelons (§ I) que $(\mathcal{C}, F)$ est une espèce de structures dominée par $(\gamma, \mathcal{K})$ si, et seulement si, $(\mathcal{C}, \gamma F)$ est un couple définissant une espèce de structures.

DEFINITION 6. *Soient $(\mathcal{C}', F')$ une espèce de structures dominée par $(\gamma', \mathcal{K}')$ et $(\mathcal{C}'', F'')$ une espèce de structures dominée par $(\gamma'', \mathcal{K}'')$. On appelle* application covariante de *$(\mathcal{C}', F')$ vers $(\mathcal{C}'', F'')$* relativement à *$(\gamma, \mathcal{K})$ un couple (φ, T) vérifiant les conditions suivantes :*

1) $\varphi \in \mathcal{F}$, $\alpha(\varphi) = \mathcal{C}'$ et $\beta(\varphi) = \mathcal{C}''$.
2) $T = (\iota F'', \mathcal{K}, \Psi, \Phi, \iota F') \in Q(\mathcal{F})$ et Φ est une restriction de φ.

PROPOSITION 10 : *Soit $(\varphi, T) = (\varphi, (\iota F'', \mathcal{K}, \Psi, \Phi, \iota F'))$ une application covariante entre espèces de structures dominées; soient $\eta' = (\mathcal{C}', \pi', \mathcal{S}')$ et η'' les espèces de structures sous $(\alpha(\varphi), F')$ et $(\beta(\varphi), F'')$ respectivement. Alors on a*

$$(\eta'', (\varphi, \overline{\varphi}_o), \eta') \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M}'),$$

où $\overline{\varphi}_o(z) = \gamma(\mu^{\boxminus}\Psi_o(e))(z)$ pour tout $z \in \mathcal{S}'_o$, où $e = \pi(z)$.

En effet, on a $(\varphi, \gamma T) \in \mathfrak{A}'(\mathfrak{M}')$, d'où, en vertu du théorème 5 :

$$(\eta'', (\varphi, \overline{\varphi}_o), \eta') = a(\varphi, \gamma T) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M}').$$

L'application covariante $(\eta'', (\varphi, \overline{\varphi}_o), \eta') \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M}')$ sera appelée *application covariante sous (φ, T).*

Soit $\mathfrak{A}'(\gamma, \mathcal{K})_o$ la classe des espèces de structures dominées par $(\gamma', \mathcal{K}')$, relativement à $(\gamma, \mathcal{K})$, où γ' est une restriction quelconque de γ.

PROPOSITION 11. *La classe $\mathfrak{A}'(\gamma, \mathcal{K})$ des applications covariantes entre espèces de structures dominées appartenant à $\mathfrak{A}'(\gamma, \mathcal{K})_o$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F} \times Q^{\bullet}(\mathcal{F})$et l'application :*

$$(\varphi, T) \to (\varphi, \gamma T), \qquad \text{où } (\varphi, T) \in \mathcal{Q}'(\gamma, \mathcal{K}),$$

définit un foncteur de $\mathcal{Q}'(\gamma, \mathcal{K})$ *vers* $\mathcal{Q}'(\mathcal{M}')$.

COROLLAIRE. *Soient* $(\mathcal{M}', \gamma, \mathcal{K}) \in \mathcal{F}$ *et* $(\mathcal{K}, \lambda, \mathcal{L}) \in \mathcal{F}$. *L'application :*

$$(\varphi, T) \to (\varphi, \lambda T), \qquad \text{où } (\varphi, T) \in \mathcal{Q}'(\gamma\lambda, \mathcal{L}),$$

est un foncteur de $\mathcal{Q}'(\gamma\lambda, \mathcal{L})$ *vers* $\mathcal{Q}'(\gamma, \mathcal{K})$.

CAS PARTICULIERS.

I) Soit $(\mathcal{M}', \gamma, \mathcal{K}, \mathcal{K}_\gamma)$ une catégorie d'homomorphismes. Soient $(\mathcal{C}, F)$ et $(\mathcal{C}', F')$ deux espèces de structures dominées par $(\gamma, \mathcal{K})$, η et η' les espèces de structures sous-jacentes. Pour que $(\eta', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta)$ soit une application covariante sous une application covariante (φ, T) entre espèces de structures dominées $(\mathcal{C}, F)$ et $(\mathcal{C}', F)$, il faut et il suffit que, pour tout $e \in \alpha(F)_o$, on ait :

$$(F'\varphi(e), \bar{\varphi}_o / e, F(e)) \in \mathcal{K},$$

où $\bar{\varphi}_o / e$ désigne la restriction de $\bar{\varphi}_o$ à $\gamma F(e)$.

Exemples. 1) Soient $(\mathcal{C}, F)$ et $(\mathcal{C}', F')$ deux espèces de morphismes. Pour qu'une application covariante $(\eta', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta)$ soit sous une application covariante entre $(\mathcal{C}, F)$ et $(\mathcal{C}', F')$, il faut et il suffit que pour tout $e \in \alpha(F)_o$, $\bar{\varphi}_o / e$ soit un foncteur de $F(e)$ vers $F'\varphi(e)$.

2) Soient $(\mathcal{C}, F)$ et $(\mathcal{C}', F')$ deux espèces de structures ordonnées (§ I, n° 2). Pour que $(\eta', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta)$ soit une application covariante sous une application covariante entre $(\mathcal{C}, F)$ et $(\mathcal{C}', F')$, il faut et il suffit que, pour tout $e \in \alpha(F)_o$, $\bar{\varphi}_o / e$ soit un homomorphisme de la classe ordonnée $F(e)$ vers la classe ordonnée $F'\varphi(e)$.

II) Nous avons défini la notion d'application covariante entre espèces de structures dominées par $(\gamma', \mathcal{K}')$ et par $(\gamma'', \mathcal{K}'')$ respectivement dans le seul cas où $\mathcal{K}'$ et $\mathcal{K}''$ sont des sous-catégories d'une même catégorie. On peut se ramener à cette situation lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

Soit $(\mathcal{M}', \lambda, \mathcal{L}) \in \mathcal{F}$. Soient $(\mathcal{L}, \mu', \mathcal{K}')$ et $(\mathcal{L}, \mu'', \mathcal{K}'')$ deux espèces de structures telles que $\mathcal{K}' \cap \mathcal{K}'' = \emptyset$. La construction utilisée dans [4] (n° 3) permet d'obtenir une catégorie $\mathcal{K}^\bullet$ telle qu'on ait :

1) $\mathcal{K}'$ et $\mathcal{K}''$ sont des sous-catégories de $\mathcal{K}^\bullet$.

2) $\mathcal{K}$ est la classe réunion de $\mathcal{K}', \mathcal{K}''$ et de la classe des triplets (s'', f, s'), où $s' \in \mathcal{K}'_o$, $s'' \in \mathcal{K}''_o$, $f \in \mathcal{L}$, $\alpha(f) = \mu'(s')$ et $\beta(f) = \mu''(s'')$.

3) On a $(\mathcal{L}, \mu, \mathcal{K}') \in \mathcal{F}$, où μ admet μ' et μ'' pour restrictions à $\mathcal{K}'$ et à $\mathcal{K}''$ respectivement et $\mu(s'', f, s') = f$.

Soient $(\mathcal{C}', F')$ et $(\mathcal{C}'', F'')$ deux espèces de structures dominées par $(\lambda\mu', \mathcal{K}')$ et par $(\lambda\mu'', \mathcal{K}'')$ respectivement. La donnée d'une application covariante entre $(\mathcal{C}', F')$ et $(\mathcal{C}'', F'')$ relativement à $(\lambda\mu, \mathcal{K})$ équivaut à la donnée de $(\mathcal{C}', F')$, de $(\mathcal{C}'', F'')$ et d'une application covariante de $(\mathcal{C}', \mu' F')$ vers $(\mathcal{C}'', \mu'' F'')$ relativement à $(\lambda, \mathcal{L})$.

5. Applications covariantes naturalisées.

Soit $\mathcal{K}$ une catégorie appartenant à $\mathcal{F}_o$.

Si Σ est une sous-catégorie de $\mathcal{K}$, nous posons $\iota_\Sigma = (\mathcal{K}, \iota, \Sigma) \in \mathcal{F}$. La bijection δ :

$$(\iota_{\Sigma'}, \mathcal{K}, \Psi, \Phi, \iota_\Sigma) \to (\Phi, \mu^{\boxminus} \Psi_o)$$

identifie la sous-catégorie de $Q^\bullet(\mathcal{F})$ formée des quintettes de la forme $(\iota_{\Sigma'}, \mathcal{K}, \Psi, \Phi, \iota_\Sigma)$ à la classe $\mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})$ des couples (Φ, τ) tels que $\Phi \in \mathcal{F}$ et $(\iota_{\Sigma'}.\Phi, \tau, \iota_\Sigma) \in \mathcal{N}$, où $\Sigma = \alpha(\Phi)$ et $\Sigma' = \beta(\Phi)$.

DEFINITION 7. *$(\Phi, \tau) \in \mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})$ sera appelé* foncteur $\mathcal{K}$-naturalisé de $\alpha(\Phi)$ vers $\beta(\Phi)$.

La bijection δ définit sur $\mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})$ une structure de catégorie $\mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})^\bullet$, dont la loi de composition s'écrit :

$(\Phi', \tau').(\Phi, \tau) = (\Phi'.\Phi, \tau'\Phi.\tau)$ si, et seulement si, $\alpha(\Phi') = \beta(\Phi)$,

où $\tau'\Phi.\tau$ désigne l'application : $e \to \tau'\Phi(e).\tau(e), e \in \alpha(\Phi)_o$.

$\mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})^\bullet$ contient comme sous-catégorie la classe $\mathcal{F}_\nu[\mathcal{K}]$ des foncteurs naturalisés [1], dont les éléments sont les $(\Phi, \tau) \in \mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})$ tels que $\alpha(\Phi) = \beta(\Phi) = \mathcal{K}$.

Soit $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})$ la sous-catégorie de $\mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})^\bullet$ formée des couples (Φ, τ) tels que $\alpha(\Phi) = \Sigma$ et $\beta(\Phi) = \Sigma'$ soient des catégories réduites à la classe de leurs unités. Nous identifierons $(\Phi, \tau) \in \mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})$ au couple $((\Sigma', \varphi, \Sigma), \tau)$, où $(\Sigma', \varphi, \Sigma)$ est la simple application $p\mathcal{F}(\Phi)$.

DEFINITION 8. $((\Sigma', \varphi, \Sigma), \tau) \in \mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})$ *sera appelé* application $\mathcal{K}$-naturalisée de Σ vers Σ'.

Pour que l'on ait $((\Sigma', \varphi, \Sigma), \tau) \in \mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) Σ et Σ' sont deux sous-classes de $\mathcal{K}_o$ et $(\Sigma', \varphi, \Sigma) \in \mathcal{M}$.

2) τ est une application de Σ dans $\mathcal{K}$ telle que :

$$\alpha(\tau(z)) = z \text{ et } \beta(\tau(z)) = \varphi(z), \text{ pour tout } z \in \Sigma.$$

La bijection $\zeta : ((\Sigma', \varphi, \Sigma), \tau) \to (\Sigma', \tau(\Sigma))$ identifie $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})$ à la classe des couples (Σ', M) vérifiant les conditions :

1) Σ' est une sous-classe de $\mathcal{K}_o$.

2) M est une sous-classe de $\mathcal{K}$ telle que la restriction α / M de α à M soit une bijec-

tion de M sur $\alpha(M) = \Sigma$ et on a $\Sigma' \subset \beta(M)$.
On a : $\zeta^{-1}(\Sigma', M) = ((\Sigma', \varphi, \Sigma), \tau)$, où $\tau = (\alpha/M)^{-1}$ et $\varphi = \beta\tau$. L'image par ζ de la catégorie $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot$ est la catégorie $\zeta(\mathcal{M}_\nu(\mathcal{K}))^\cdot$ dont la loi de composition s'écrit :

$$(\Sigma'', M').(\Sigma', M) = (\Sigma'', M'.M) \text{ si, et seulement si, } \Sigma' = \alpha(M').$$

Nous désignerons par κ le foncteur de $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot$ vers $\mathcal{M}'$ défini par :

$$((\Sigma', \varphi, \Sigma), \tau) \to (\Sigma', \varphi, \Sigma).$$

Soit $(\mathcal{C}, F)$ un couple définissant une espèce de structures $\eta = (\mathcal{C}, \pi, \mathcal{S})$ appartenant à $\mathcal{Q}(\mathcal{M}')$ et telle que $\mathcal{S}$ s'identifie à une sous-catégorie de $\mathcal{K}$.

PROPOSITION 12. *On peut associer à $(\mathcal{C}, F)$ une espèce de structures dominée par $(\kappa, \mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot)$, notée $(\mathcal{C}, \overline{F})$, telle que η soit l'espèce de structures sous $(\mathcal{C}, \overline{F})$.*

DEMONSTRATION. Soit $f \in \alpha(F)$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$. Désignons par $\hat{f}$ l'application : $z \to (f, z)$ de $F(e)$ dans $F(e')$ et posons :

$$\overline{F}(f) = (F(f), \hat{f}) \in \mathcal{M}_\nu(\mathcal{K}).$$

Soit $g \in \alpha(F)$ tel que $\alpha(g) = \beta(f)$ et $\beta(g) = e''$. Pour tout $z \in F(e)$, on a : $(\widehat{g.f})(z) = (g.f, z)$ et :

$$(g.f, z) = (g, fz).(f, z) = \hat{g}(fz).\hat{f}(z) = \hat{g}F(f)(z).\hat{f}(z),$$

d'où
$$\widehat{g.f} = \hat{g}F(f).\hat{f}.$$

Il en résulte :

$$\overline{F}(g.f) = (F(g.f), \widehat{g.f}) = (F(g).F(f), \hat{g}F(f).\hat{f}) = \overline{F}(g).\overline{F}(f).$$

Ainsi l'application : $f \to \overline{F}(f)$ définit un foncteur $\overline{F}$ de $\alpha(F)$ vers $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot$. Par suite $(\mathcal{C}, \overline{F})$ est une espèce de structures dominée par $(\kappa, \mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot)$ et η est l'espèce de structures sous $(\mathcal{C}, \overline{F})$, car $\kappa\overline{F}(f) = F(f)$ pour tout $f \in \alpha(F)$.

Soient $(\mathcal{C}', F')$ et $(\mathcal{C}'', F'')$ deux couples définissant des espèces de structures $\eta' = (\mathcal{C}', \pi', \mathcal{S}')$ et $\eta'' = (\mathcal{C}'', \pi'', \mathcal{S}'')$ appartenant à $\mathcal{Q}(\mathcal{M}')$ et telles que $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ soient identifiées à des sous-catégories de $\mathcal{K}$. Soient $(\mathcal{C}', \overline{F}')$ et $(\mathcal{C}'', \overline{F}'')$ les espèces de structures dominées par $(\kappa, \mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot)$ correspondantes. Si

$$(\eta'', (\varphi, \overline{\varphi}_o), \eta') \in \mathcal{Q}(\mathcal{M}'),$$

nous désignons par $\overline{\varphi}$ le foncteur de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}''$ prolongeant $\overline{\varphi}_o$ tel que $(\pi', \varphi, \overline{\varphi}, \pi)$ soit un quatuor de foncteurs.

PROPOSITION 13. *Il existe une bijection canonique c de la classe des applications covariantes de $(\mathcal{C}', \overline{F}')$ vers $(\mathcal{C}'', \overline{F}'')$ relativement à $(\kappa, \mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot)$ sur la classe des couples :*

$$((\eta'', (\varphi, \overline{\varphi}_o), \eta'), (\overline{\varphi}, \tau)) \in \mathcal{Q}(\mathcal{M}') \times \mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})$$

tels que $\bar{\varphi}$ *soit le foncteur prolongeant* $\bar{\varphi}_o$.

DEMONSTRATION. Soit $(\varphi, T) = (\varphi, (\bar{F}'', \mathcal{K}, \bar{\Psi}, \Phi, \bar{F}')) \in \mathfrak{A}'(\kappa, \mathfrak{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot)$. Soit $(\eta'', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta')$ l'application covariante sous (φ, T). Pour tout $e \in \alpha(F')_o$ on a :

$$\bar{\Psi}(e) = (\bar{\varphi}_o / e, \tau_e)^{\boxminus} \in \square\,\mathfrak{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot,$$

où τ_e est une application de $F'(e)$ dans $\mathcal{K}$ telle que :

$$\alpha(\tau_e(z)) = z \qquad \text{et} \qquad \beta(\tau_e(z)) = \bar{\varphi}_o(z) \text{ pour tout } z \in F'(e).$$

Soit $f \in \alpha(F')$, $\alpha(f) = e$ et $\beta(f) = e'$. La relation :

$$\bar{\Psi}(f) = (\bar{F}''.\Phi(f), \mu^{\boxminus}\bar{\Psi}(e'), \mu^{\boxminus}\bar{\Psi}(e), \bar{F}(f)) \in \square\,\mathfrak{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot$$

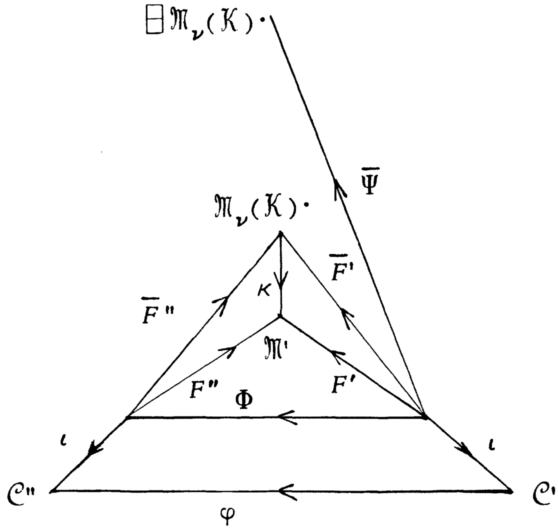
entraîne :

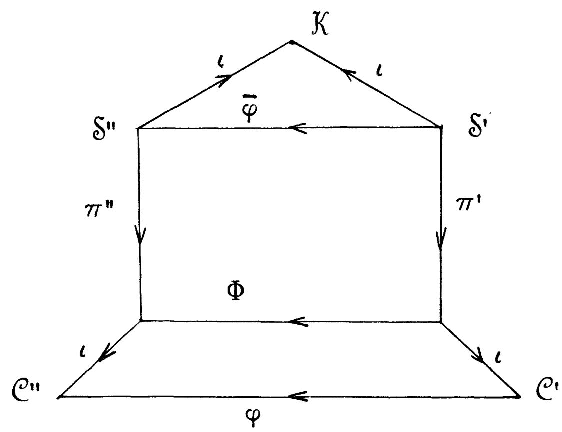
$$\bar{\varphi}(f, z).\tau_e(z) = \tau_{e'}(fz).(f, z) \text{ pour tout } z \in F(e);$$

donc on obtient $(\bar{\varphi}, \tau) \in \mathfrak{F}_\nu(\mathcal{K})$, en désignant par τ l'application :

$$z \to \tau_{\pi(z)}(z), \text{ pour tout } z \in \mathcal{S}'_o,$$

et c est la bijection : $(\varphi, T) \to ((\eta'', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta'), (\bar{\varphi}, \tau))$.





DEFINITION 9. *Un couple* $((\eta'', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta'), (\bar{\varphi}, \tau)) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M}') \times \mathfrak{F}_\nu(\mathcal{K})$ *tel que* $\bar{\varphi}$ *soit le foncteur prolongeant* $\bar{\varphi}_o$, *sera appelé* application covariante $\mathcal{K}$-naturalisée de η' vers η'' .

Soit $((\eta'', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta'), (\bar{\varphi}, \tau))$ une application covariante $\mathcal{K}$-naturalisée. Alors $\pi'(\mathcal{S}')$ est une catégorie d'opérateurs sur la classe $\tau(\mathcal{S}')$ relativement à la loi de composition :

$$(f, \tau(z)) \to \tau(fz) \text{ si, et seulement si, } \pi'(z) = \alpha(f).$$

L'application :

$$(f, \tau(z)) \to (\bar{\varphi}(f, z), \tau(fz), \tau(z), (f, z))$$

définit une équivalence de la catégorie des hypermorphismes associée à cette espèce de structures sur une sous-catégorie de $\boxminus\mathcal{K}$.

$$\begin{tikzcd}
\bar{\varphi}_o(fz) & fz \arrow[l, "\tau(fz)"'] \\
\bar{\varphi}_o(z) \arrow[u] & z \arrow[l, "\tau(z)"] \arrow[u, "(f,z)"']
\end{tikzcd} \qquad \square\mathcal{K}$$

Cas particulier. Une application covariante $(\eta'', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta')$ s'identifie trivialement à l'application covariante naturalisée :

$$((\eta'', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta'), (\bar{\varphi}, \tau)),$$

où $\tau(z) = (\bar{\varphi}_o(z), z)$ pour tout $z \in \mathcal{S}'_o$.

Références.

*)Cet article est la 3ème partie de l'article "Catégories structurées" dont les parties I et II sont à l'impression dans Ann. Ec. Norm. Sup., 1963 (et multigraphiées, Paris, Avril 1963). Nous reprenons ici les notations et la terminologie de ce travail. Les résultats du présent texte ont été résumés dans C.R.A.S., 256, 1963, p. 1891.

[1] Catégorie des foncteurs types. Revista Un. Mate. Argentina, XX, 1960.

[2] Structures quotient; Comm, Mat. Helv. (sous-presse); multigraphié, Paris, Juin 1963.

[3] Elargissements de catégories; Sém. Top. et Géo. diff. (Ehresmann), III, Paris, 1961 et chap. I, cours de Montréal, 1961 .

[4] Structures feuilletées, Proc. Can. Math. Congress, 1961 .