Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann

Paul Ver Eecke

Sur les connexions d'éléments de contact

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann, tome 5 (1963), exp. n° 1, p. 1-70

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1963__5__A1_0>

TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Séminaire dirigé par Charles Ehresmann

1962

A la mémoire de mes compagnons d'armes
du Régiment Para-Commando
morts en service commandé
le 25 juin 1963 à Detmold (Allemagne).

SUR LES CONNEXIONS D'ELEMENTS DE CONTACT

par Paul VER EECKE

INTRODUCTION*

Une connexion affine sur une variété de dimension n définit pour tout entier k, $1 \leq k < n$, un champ du 2^e ordre de k-éléments de contact dont les intégrales, si elles existent, sont les sous-variétés totalement géodésiques de dimension k. On se pose depuis longtemps la question suivante : étant donné un champ du 2^e ordre Ξ de k-éléments de contact, existe-t-il des connexions dont le champ géodésique du 2^e ordre en dimension k soit Ξ ? Dans l'affirmative, peut-on distinguer une solution singulière, déterminée par des conditions géométriques intrinsèques. Il s'agit en d'autres mots de l'interprétation géométrique d'un champ ou d'un feuilletage du 2^e ordre. Le problème le plus simple de ce type consiste à construire une connexion dont les courbes géodésiques forment un feuilletage du 2^e ordre donné à priori.

Douglas et E. Cartan entre autres avaient abordé ces questions et reconnu la nécessité d'élargir la notion ordinaire de connexion affine au moyen des connexions d'éléments de contact [4,5] .Ces auteurs adoptaient une forme privilégiée pour les équations du champ en coordonnées locales et calculaient les Γ^k_{ij} d'une connexion spéciale d'éléments de contact à partir des coefficients du champ donné. Ces artifices algébriques procurent une solution singulière dont le sens géométrique est caché. De plus cette analyse n'explique pas la raison profonde de l' existence des solutions, en particulier lorsqu'on en restreint la classe, soit qu'on impose la torsion ou la compatibilité avec une G-structure. En effet ces questions ne peuvent être traitées de manière satisfaisante que dans le cadre de certains espaces fibrés dont les sections constituent les structures géométriques globales en question, à savoir les connexions et les champs du 2^e ordre. C'est ainsi que j'ai été amené à reprendre le problème de la géométrisation des champs

---

* Ce travail a été préparé alors que l'auteur bénéficiait d'un mandat d'Aspirant du Fonds National Belge de la Recherche Scientifique.

du 2^e ordre dans le langage le plus approprié en géométrie différentielle globale : celui des jets infinitésimaux et des espaces fibrés au sens d'Ehresmann, qui sont des variétés munies de groupoïdes différentiables d'opérateurs [12,b] .

Il fallait d'abord exposer une théorie adéquate des connexions ponctuelles due à Ehresmann [11] ; c'est l'objet du premier chapitre. Soient V une variété paracompacte de dimension n et Φ un groupoïde différentiable sur V. On définit la sous-variété $Q(\Phi)$ de l'espace $J(\Phi, V)$ des jets de V dans Φ. La variété $Q(\Phi)$ des éléments de Φ-connexion (définition I,1,1) est munie d'une projection naturelle $q : Q(\Phi) \to V$. Une Φ-connexion est une section de q (définition I,1,2). Il existe des Φ-connexions car $Q(\Phi)$ est une variété fibrée dont la fibre est un espace numérique. En effet un groupoïde différentiable transitif et localement trivial, opérant sur $Q(\Phi)$, se présente d'une manière naturelle (proposition I,1,3).

Une variété E de dimension $2n$ soudée à V, sur laquelle Φ opère transitivement, permet de définir la sous-variété $Q(E)$ de $Q(\Phi)$ formée des éléments de Φ-connexion dans E c'est-à-dire compatibles avec la soudure (définition I,2,1). $Q(E)$ est un sous-fibré de $Q(\Phi)$ admettant des sections; il existe donc des connexions dans E (corollaire I,2,2).

La soudure Σ de E à V permet de définir en termes de jets la torsion d'un élément de connexion dans E. On a en effet une sous-variété $\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$ de la variété $\overline{\Pi}^2(E', V)$ des jets inversibles semi-holonomes du 2^e ordre de V dans une fibre de E; on a une application $\xi : Q(E) \to \overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$. Le sous-groupoïde $\Pi^2_o(V)$ de $\Pi^2(V)$ définit sur $\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$ une relation d'équivalence; l'application ξ induit $\theta : Q(E) \to \overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)/\Pi^2_o(V)$ qui à chaque élément de connexion fait correspondre sa torsion. La torsion de la connexion $X : V \to Q(E)$ est la section $\theta \circ X : V \to \overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)/\Pi^2_o(V)$ (définition I,3,2). On a une condition très simple sous laquelle toute section de $\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)/\Pi^2_o(V)$ est la torsion d'une connexion (corollaire I,3,4).

Le deuxième chapitre traite de l'aspect géodésique des connexions. Il s'agit d'abord d'introduire sur E des données supplémentaires adéquates qui confèrent un sens à la notion de champ du 2^e ordre géodésique d'une connexion dans E. Cette théorie géodésique est à faire de manière à éclaircir le problème de la géométrisation d'un champ du 2^e ordre. Cette question ne peut être traitée qu'au moyen de connexions généralisées; faire la théorie géodésique des connexions pour la dimension k consiste à établir une application d'une variété d'éléments de connexion généralisés dans la variété des k-éléments de contact du 2^e ordre sur V; montrer que tout champ de k-éléments de contact du 2^e ordre est géométrisable revient à s'assurer que cette application est inversible à droite, ou encore qu'il s'agit d'une fibration admettant des sections.

On définit la sous-variété $Q_k(E)$ de $Q(E) \times T_k(V)$ formée des éléments de connexion de k-vitesses; on définit de même la variété $Q_{k,c}(E)$ des éléments de connexion de k-éléments de contact. Une connexion généralisée s'identifie à une application de $T_k(V)$ (de $T_{k,c}(V)$) dans $Q(E)$ qui à chaque k-vitesse (k-élément de contact) fait correspondre un élément de connexion au point de contact (définition II,2,1). La donnée d'un champ Λ_k de k-vitesses semi-holonomes du 2^e ordre sur les fibrés de E, invariant par Φ (définitions II,1,4 et II,3,1), induit une application Λ_k^* de $Q_k(E)$ dans la variété $\overline{T}_k^2(V)$ des k-vitesses régulières semi-holonomes du 2^e ordre sur V. Un champ analogue d'éléments de contact $\Lambda_{k,c}$ sur les fibres de E induit l'application correspondante : $\Lambda_{k,c}^* : Q_{k,c}(E) \to \overline{T}_{k,c}^2(V)$. On peut appeler $\Lambda_k^*(X, \lambda)$ la k-vitesse géodésique de (X, λ) correspondant à la donnée Λ_k sur E. Le champ géodésique de k-vitesses du 2^e ordre de la connexion généralisée $X : T_k(V) \to Q(E)$ n'est autre chose que l'application qui à tout $\lambda \in T_k(V)$ fait correspondre $\Lambda_k^*(X_\lambda, \lambda) \in \overline{T}_k^2(V)$ (définition II,3,2). Le champ géodésique d'une connexion ponctuelle X relatif à un champ Λ_k (ou $\Lambda_{k,c}$) sur les fibrés de E est par définition celui de la connexion de k-vitesses (de k-éléments de contact) naturellement associée à X.

La soudure Σ induit un sous-groupoïde $\Pi(\Sigma, V)$ de $\Pi(V)$; l'application $\Lambda_k^* : Q_k(E) \to \overline{T}_k^2(V)$ (l'application $\Lambda_{k,c}^* : Q_{k,c}(E) \to \overline{T}_{k,c}^2(V)$) déterminée par un champ du 2^e ordre de k-vitesses (de k-éléments de contact) sur les fibrés de E admet des sections si $\Pi(\Sigma, V)$ opère transitivement sur $T_k(V)$ (sur $T_{k,c}(V)$). Cela revient à montrer que Λ_k^* et $\Lambda_{k,c}^*$ sont covariantes relativement à des groupoïdes différentiables opérant transitivement (propositions II,3,2 et II,3,3). Il en résulte que pour tout champ de k-vitesses (de k-éléments de contact) du 2^e ordre Δ, il existe une connexion de k-vitesses (de k-éléments de contact) dont le champ géodésique soit Δ (corollaire II,3,3). Ce résultat central sur la géométrisation des champs du 2^e ordre est aisément complété par un théorème d'existence de connexions généralisées admettant un champ géodésique et une torsion donnés à priori (proposition II,3,5).

Le troisième chapitre applique les méthodes précédentes aux connexions affines et projectives, de façon à donner une présentation plus intrinsèque et un contenu plus précis aux propositions de Douglas. Cet auteur géométrise un champ du 2^e ordre au moyen d'une connexion affine générale sans torsion construite grâce à des artifices algébriques [5]. Il s'agit ici d'obtenir des théorèmes portant sur l'existence de solutions assujetties à des conditions plus strictes, soit qu'on impose la torsion, soit qu'on impose que les connexions soient compatibles avec une G-structure. C'est pourquoi il importait de reconstruire la théorie classique des connexions affines dans le cadre des variétés fibrées soudées à leur base. A la variété E des chapitres précédents correspond l'espace

$\mathcal{T}(V)$ des vecteurs tangents; Φ est ici un groupoïde affine Ω_A construit à partir d'un sous-groupoïde différentiable Ω de $\Pi(V)$. On a une soudure naturelle Σ de $\mathcal{T}(V)$ à V (proposition III,1,1). La variété des éléments de connexion affine dans Ω_A compatibles avec Σ s'identifie à la variété $Q(\Omega)$ des éléments de Ω- connexion (proposition III,1,2). $Q(\Omega)$ est une sous-variété de la catégorie $\bar{J}^2(V)$ des jets non-holonomes du 2^e ordre. Le groupoïde Π_o^2 opère à droite sur $Q = Q(\Pi(V))$; le covariant de torsion des éléments de Ω- connexion affine s'identifie à l'application canonique $Q(\Omega) \to Q/\Pi_o^2$; on a alors des critères très simples pour qu'il existe une Ω- connexion à torsion donnée ou pour qu'une Ω- connexion soit déterminée par sa torsion (proposition III,2,3).

Les connexions affines se prêtent à une théorie géodésique complète au sens du chapitre précédent. En effet pour tout entier k, $1 \leq k < n$, on a des champs holonomesdu 2^e ordre de k- vitesses et de k- éléments de contact sur les fibres de $\mathcal{T}(V)$ invariants par Π_A (proposition III,3,1); à toute connexion affine généralisée est donc attaché un champ géodésique. On savait depuis longtemps qu'il existe des connexions affines généralisées dont le champ géodésique est donné à priori [5]. Les théorèmes généraux du deuxième chapitre appliqués aux Ω- connexions donnent un résultat plus précis : soient Ω un sous-groupoïde différentiable de $\Pi(V)$, Ξ un champ du 2^e ordre de k- vitesses (de k- éléments de contact) sur V; si Ω opère transitivement sur $T_k(V)$ (sur $T_{k,c}(V)$) alors il existe une Ω- connexion de k- vitesses (de k- éléments de contact) dont le champ géodésique soit Ξ (proposition III,3,3). Les théorèmes correspondants du deuxième chapitre fournissent des critères fins pour qu'il existe des Ω- connexions généralisées admettant un champ géodésique et une torsion donnés à priori (proposition III,3,4). En particulier, dans le cas $k = 1$, il existe des connexions affines d'éléments de contact dont la torsion et le feuilletage des courbes géodésiques soient donnés à priori (corollaire III,3,4).

Ces propositions sur les Ω- connexions ont pour corollaires des théorèmes d'existence de connexions affines généralisées compatibles avec une G- structure et un champ géodésique donné. En effet une connexion affine compatible avec une G-structure est une Π_G- connexion où Π_G est défini par la G- structure (définition III,4,3). Si le sous-groupe fermé G de $GL(n)$ opère transitivement sur $L_{n,k}$ (sur la grasmannienne $M_{n,k}$), il existe des connexions affines de k- vitesses (de k- éléments de contact) compatibles avec une G- structure et dont le champ géodésique est donné à priori (proposition III,3,3). En particulier, soit Ξ un champ du 2^e ordre de k- éléments de contact sur un espace de Riemann V; alors il existe des connexions riemanniennes de k- éléments de contact dont le champ géodésique soit Ξ .

Parmi toutes les connexions ponctuelles affines projectivement équivalentes admettant un système de courbes géodésiques donné, on ne peut en distinguer une par des propriétés intrinsèques. Plus généralement, il n'est pas possible de géométriser un champ d'éléments de contact au moyen d'une connexion affine généralisée canonique, à moins de supposer sur V une structure supplémentaire, par exemple une structure unimodulaire, et d'imposer à la connexion d'être compatible avec cette structure; cette question sera traitée dans le chapitre suivant. Certains auteurs [4, 16, 17] se sont alors efforcés de géométriser canoniquement un champ d'éléments de contact au moyen d'une connexion projective «normale». Et ils y réussirent au moyen d'artifices de calcul qui supposaient en fait la donnée supplémentaire d'une structure unimodulaire. Cette étude était d'ailleurs rendue difficile par le pénible appareil analytique de la présentation ancienne des connexions projectives. C'est pourquoi en vue de démystifier la question des connexions projectives normales, il importait de développer une théorie synthétique des connexions projectives selon le modèle des connexions dans une variété fibrée soudée à sa base; l'idée en avait été émise par Ehresmann au Colloque de Topologie de Bruxelles [7].

En vue du résultat cherché, il est commode de définir ici en termes de jets l'espace projectif P tangent à V (définition III, 5, 1) et le groupoïde projectif Π_P opérant transitivement sur P (proposition III,5,1). Comme l'espace vectoriel tangent $\mathfrak{T}$ s'identifie à un ouvert de P, la variété P est soudée à V. Une connexion projective est alors par définition une connexion à valeurs dans Π_P et compatible avec la soudure (définition III,5,2). Cette soudure permet de définir la torsion d'une connexion projective sans recours aux tenseurs projectifs. D'autre part, pour chaque entier k, $1 \leq k < n$, le champ de k-éléments de contact du 2^e ordre sur $\mathfrak{T}$ qui induit une théorie géodésique des connexions affines se prolonge sur P en un champ invariant par Π_P (proposition III,6,2); ce n'est pas le cas pour les champs de k-vitesses. On a donc une théorie géodésique des connexions projectives de k-éléments de contact pour tout k; à fortiori, le k-champ géodésique d'une connexion projective ponctuelle est bien défini. A une connexion projective correspond canoniquement une connexion affine (proposition III,5,2); la torsion et les champs géodésiques d'une connexion projective coïncident avec ceux de la connexion affine associée (corollaire III,6,1 et proposition III,6,3). C'est pourquoi il est impossible de géométriser un champ d'éléments de contact au moyen d'une connexion projective canonique X; car, dans l'affirmative, on pourrait aussi résoudre ce problème au moyen d'une connexion affine canonique, à savoir l'associée de X. Et ceci n'est vrai qu'à condition d'introduire une structure supplémentaire sur la variété; ce qu'on montrera dans le chapitre suivant.

Celui-ci, consacré à la géométrie des «paths», est né de la question suivante : parmi toutes les connexions affines généralisées admettant un système de courbes géodésiques donné, peut-on en distinguer une par des propriétés géométriques intrinsèques ? En d'autres mots, quel est le sens des calculs de Douglas qui permettent de géométriser un champ de vecteurs du 2^e ordre au moyen d'une solution canonique [5]. On définit la variété C des «éléments quadratiques» en termes de vecteurs du 2^e ordre (définition IV,1,1); C est fibrée au-dessus de V. Un «champ quadratique», c'est-à-dire une section de C au-dessus de V, s'identifie à un champ de vecteurs du 2^e ordre dont les intégrales paramétrées sont les géodésiques d'une connexion affine ponctuelle déterminée à sa torsion près (corollaire IV,2,2). C'est la conséquence immédiate d'un difféomorphisme canonique (proposition IV,2,2) qui est à la base d'un théorème de Ambrose-Singer-Palais obtenu par des méthodes plus classiques [1].

La géométrisation d'un champ de vecteurs du 2^e ordre au moyen d'une connexion canonique «normale» repose sur cette propriété, ensuite sur une définition de la normalité liée au transport infinitésimal (définition IV,2,1) et enfin sur la détermination d'un système quadratique «singulier» $\Xi^* : V \to C$ à partir d'un champ de vecteurs «homogène» du 2^e ordre Ξ (définitions IV,1,2 et IV,1,3; proposition IV,1,2). En effet, soient Ξ un champ de vecteurs homogène du 2^e ordre et Γ un champ d'éléments de torsion; il existe une et une seule connexion de vecteurs dont la torsion soit Γ et le champ géodésique Ξ, et dont le système quadratique associé soit singulier (proposition IV,2,3). Cette connexion est normale (proposition IV,2,1). Un champ homogène de vecteurs du 2^e ordre est donc géométrisable au moyen d'une et d'une seule connexion normale à torsion ponctuelle donnée (corollaire IV,2,3).

Le problème devient indéterminé lorsqu'on remplace le champ du 2^e ordre homogène par un feuilletage du 2^e ordre; il existe toute une classe de connexions généralisées normales à torsion donnée et dont les courbes géodésiques non paramétrées soient les intégrales d'un feuilletage du 2^e ordre donné. Comme on l'a remarqué au chapitre précédent, il n'est pas possible non plus de géométriser un feuilletage du 2^e ordre au moyen d'une connexion projective canonique. Il convient d'introduire, en termes de jets, une structure unimodulaire sur V, supposée dès lors orientable. C'est ce que certains auteurs ont fait d'une manière plus ou moins consciente, mais au moyen d'un appareil analytique assez gratuit qui masque les faits géométriques [5, 16, 17]. Le foncteur caractérisant une structure unimodulaire (définition IV,3,1) induit un sous-groupoïde de $\Pi(V)$ et dès lors la notion de connexion affine compatible avec cette structure unimodulaire (définition IV,3,2). Il existe alors une et une seule connexion de vecteurs normale unimodulaire dont la torsion et les courbes géodésiques non paramétrées soient arbitrairement données (corollaire IV,3,2).

Je tiens à exprimer mon grand respect envers mon Maître, Monsieur C. Ehresmann, qui m'a guidé par son inspiration féconde ainsi qu'un intérêt constant pour mon travail. Je dois beaucoup aussi à Monsieur R. Ballieu, professeur à l'Université de Louvain, dont l'enseignement éveilla en moi le désir de la recherche et qui me fit obtenir le loisir et les moyens nécessaires. Je remercie Monsieur J. Dixmier et Monsieur P. Dubreil qui me font l'honneur de faire partie du jury. Il m'est enfin très agréable de pouvoir complimenter Madame Campos, qui, avec des moyens limités mais un art exquis, a réussi une élégante présentation typographique.

CHAPITRE PREMIER

CONNEXIONS PONCTUELLES DANS UN ESPACE FIBRE SOUDE A SA BASE

La théorie géométrique des systèmes différentiels du deuxième ordre qui sera exposée dans ce travail revient à l'étude des connexions d'éléments de contact. Il est indispensable de développer d'abord une théorie des connexions ponctuelles en termes de jets, qu'Ehresmann à créée [11] et diffusée principalement à travers son enseignement.

1. Connexions dans un groupoïde.

Les structures différentiables seront de classe C^∞; par application d'une variété dans une variété on entend une application différentiable; la variété fondamentale V est de dimension n et paracompacte.

Soit Φ un groupoïde différentiable sur V [12] au sens suivant: $(a, b): \Phi \to V \times V$ est une application surjective de rang maximum. V est isomorphe à la sous-variété de Φ formée des unités; on désigne par $\tilde{x}$ l'unité correspondant à $x \in V$.

DEFINITION 1, 1, 1. *Un élément de connexion dans Φ au point $x \in V$ est un jet de $J(\Phi, V)$ satisfaisant aux conditions suivantes [11]:*

a) $\alpha(X) = x$

b) $\beta(X) = \tilde{x}$

c) $\bar{a}\ X = j_x$

d) $\bar{b}\ X = j_x^{\wedge}$

$\bar{a}X$ signifie $j_{\tilde{x}}(a)\,X$; j_x est le jet en x de l'identité sur V; $j_x^{\wedge}$ est le jet en x de la contraction de V en x. Soit $Q(\Phi)$ l'ensemble des éléments de connexion dans Φ.

PROPOSITION 1, 1, 1. *$Q(\Phi)$ est une sous-variété non vide de $J(\Phi, V)$ et la restriction de α à $Q(\Phi)$ est une application de rang maximum sur V.*

Pour démontrer des propositions de ce genre on aura souvent recours au lemme suivant:

LEMME 1, 1, 1. *Soit f une application de rang maximum d'une variété V sur W, V une sous-variété de W; alors $f^{-1}(U)$ est une sous-variété de V et la restriction de f à $f^{-1}(U)$ est une application de rang maximum sur U.*

Soit alors $Q'(\Phi)$ le sous-ensemble de $J(\Phi, V)$ formé des éléments X satisfaisant aux conditions $\bar{a}\,X = j_{\alpha(X)}$, $\bar{b}\,X = j^{\wedge}_{\alpha(X)}$. $Q'(\Phi)$ est une sous-variété et la restriction de α à $Q'(\Phi)$ est de rang maximum sur V.

En effet la surjection de rang maximum $c = (a, b) : \Phi \to V \times V$ se prolonge en une surjection de rang maximum $\bar{c} : J(\Phi, V) \to J(V \times V, V)$; $Q'(\Phi)$ est l'image réciproque par $\bar{c}$ de la sous-variété $\{j_x, j_x^*\}_{x \in V}$, isomorphe à V.

L'on achève la démonstration en montrant que $Q(\Phi)$ est une sous-variété de $Q'(\Phi)$.

Soit (Φ, V) l'image réciproque de la diagonale de V^3 par l'application de rang maximum de $\Phi \times V$ sur V^3 qui à (f, x) fait correspondre $(a(f), b(f), x)$. En vertu du lemme (Φ, V) est une variété et l'application naturelle de (Φ, V) dans V est une surjection de rang maximum. Si l'on démontre que $\gamma = (\beta, \alpha) : Q'(\Phi) \to (\Phi, V)$ est une surjection de rang maximum, la proposition sera établie car $Q(\Phi)$ est l'image réciproque par cette application de la sous-variété $\{\tilde{x}, x\}$ isomorphe à V. γ est surjective: soit $(f_o, x_o) \in (\Phi, V)$; prenons $X_o \in Q'(\Phi)$ quelconque, tel que $\alpha(X_o) = x_o$ (il en existe car on a vu que $\alpha : Q'(\Phi) \to V$ est surjective); soit $g_o = \beta(X_o)$ alors $X'_o = [j_{xo}(\widehat{f_o g_o^{-1}})] \bullet X_o$ est un élément de $Q'(\Phi)$ dont l'image par γ est (f_o, x_o); $j_{xo}(\widehat{f_o g_o^{-1}})$ est le jet en x_o de l'application constante sur $f_o g_o^{-1} \in \Phi$; $\bullet$ désigne le prolongement de la composition $\Phi \underset{V}{\times} \Phi \to \Phi$ à $J(\Phi \underset{V}{\times} \Phi, V) \to J(\Phi, V)$, $\Phi \underset{V}{\times} \Phi$ étant la variété des couples composables.

Il reste à voir que γ est de rang maximum. Soit $X_o \in Q'(\Phi)$, $\alpha(X_o) = x_o$, $\beta(X_o) = f_o$; il suffit de construire une section l de γ autour de (f_o, x_o) dans (Φ, V) telle que $l(f_o, x_o) = X_o$. Puisque $\alpha : Q'(\Phi) \to V$ est surjective de rang maximum, il existe un relèvement de α autour de x_o, qui à x fait correspondre X_x avec $X_{x_o} = X_o$; soit $g_x = \beta(X_x)$; on peut alors poser autour de (f_o, x_o) : $l(f, x) = j_x(\widehat{f\, g_x^{-1}}) \bullet X_x$. $l(f, x)$ est défini, $\gamma(l(f, x)) = (f, x)$ et $l(f_o, x_o) = X_o$.

L'on notera désormais q au lieu de α la projection naturelle de $Q(\Phi)$ sur V. La proposition I. 1. 1. permet de poser [11] :

DEFINITION 1. 1. 2. *Une connexion dans* Φ *est une section de* $q : Q(\Phi) \to V$.

Les considérations qui suivent préparent le théorème d'existence des connexions. L'on établit que $Q(\Phi)$ est un espace fibré au-dessus de V dont la fibre est un espace numérique. Il s'agit donc d'abord d'exhiber un groupoïde différentiable sur V, opérant sur $Q(\Phi)$ [12].

Soit $\tilde{\Phi}$ le sous-ensemble de $J(\Phi, V)$ formé des A satisfaisant aux conditions suivantes:

a) $$\bar{a}A = j_{\alpha(A)}$$

b) $$\bar{b}\,A \in \Pi(V)$$

On définit sur $\tilde{\Phi}$ une loi de groupoïde sur V de la manière suivante:

$B \circ A$ est défini si $\beta(\bar{b}A) = \alpha(B)$ et égale $B\,\bar{b}A \bullet A$. [9, c]

PROPOSITION I, 1, 2. *$\tilde{\Phi}$ est un groupoïde différentiable sur V.*

En effet, $\tilde{\Phi}$ est l'image réciproque par la surjection de rang maximum $(\bar{a}, \bar{b})$: $: J(\Phi, V) \to J(V\times V, V)$ de la sous-variété $\{j_{\alpha(A)}, \dot{A}\}_{A\in\Pi(V)}$ isomorphe à $\Pi(V)$; en vertu du lemme I, 1, 1, $\tilde{\Phi}$ est une variété et $\bar{b} : \tilde{\Phi} \to \Pi(V)$ est surjective de rang maximum. $\tilde{\Phi}$ est différentiable sur V car la projection naturelle $(a_{\tilde{\Phi}}, b_{\tilde{\Phi}})$ de $\tilde{\Phi}$ dans $V\times V$ se factorise en des surjections de rang maximum $\bar{b} : \tilde{\Phi} \to \Pi(V)$ et $(\alpha, \beta) : \Pi(V) \to V\times V$.

DEFINITION I, 1, 3. *Soit Φ un groupoïde différentiable sur V, qui opère sur E; soit $\Phi \underset{V}{\times} E$ le groupoïde sur E formé des couples composables de $\Phi\times E$ [12]; $\Phi \underset{V}{\times} E$ est une variété. On dit que E est homogène relativement à Φ ou encore que Φ opère transitivement sur E si $\Phi \underset{V}{\times} E$ est un groupoïde différentiable.*

PROPOSITION I, 1, 3, [*11*].

a) $q : Q(\Phi) \to V$ est un fibré à groupoïde structural $\tilde{\Phi}$.

b) $\tilde{\Phi}$ opère transitivement sur $Q(\Phi)$.

c) La fibre est un espace numérique.

a) Il s'agit de définir une application d'une sous-variété de $\tilde{\Phi}\times Q(\Phi)$ dans $Q(\Phi)$, pour laquelle $\tilde{\Phi}$ soit un groupoïde d'opérateurs et q la projection associée [12]. Puisque q est surjective de rang maximum (Proposition I, 1, 1) et $\tilde{\Phi}$ un groupoïde différentiable sur V (Proposition I, 1, 2), (α, q) est une application de rang maximum de $\tilde{\Phi}\times Q(\Phi)$ sur $V\times V$ et $\tilde{\Phi}\underset{V}{\times}Q(\Phi)$, l'image réciproque de la diagonale, est une variété. Pour tout $(A, X)\in\tilde{\Phi}\underset{V}{\times} Q(\Phi)$ on pose : $A\circ X = [\, j_x(\hat{f}) \bullet X \bullet \bar{s}A\,](\bar{b}A)^{-1}$ où $x = \alpha(A) = \alpha(X)$, $f = \beta(A)$, s est la symétrie dans Φ. Il est trivial de vérifier que $A\circ X$ est défini, appartient à $Q(\Phi)$ et que l'on a défini ainsi une loi d'opération du groupoïde $\tilde{\Phi}$ sur $Q(\Phi)$, induisant la projection q.

b) Une fois établi que $Q(\Phi)$ est un espace fibré à groupoïde structural $\tilde{\Phi}$, il suffit de vérifier qu'une fibre $Q_x(\Phi)$ quelconque est homogène. Plus précisément, soit $X\in Q_x(\Phi)$; il s'agit de voir que l'application X^* de $\tilde{\Phi}_x$ dans $Q_x(\Phi)$, qui à A fait correspondre $A\circ X$ est de rang maximum et surjective; c'est évident car la restriction de X^* au sous-groupe $\tilde{\Phi}'_x$ formé des A tels que $\beta(A) = \tilde{x}$ et $\bar{b}A = j_x$ est un difféomorphisme sur $Q_x(\Phi)$.

c) Vérifions que $Q_x(\Phi)$ est difféomorphe à un espace numérique. Soit Φ_x^o la sous-variété de $J(\Phi, V)$, formée des jets de V dans Φ_x de source x et but $\tilde{x}$; Φ_x^o est trivialement difféomorphe à un espace numérique. Soit X un élément de $Q_x(\Phi)$; l'application $X^*: Q_x(\Phi) \to \Phi_x^o$ qui à Y associe $Y \dot{.} \bar{s} X$ est un difféomorphisme.

COROLLAIRE. I, 1, 3. Il existe des connexions dans Φ.

En effet $Q(\Phi)$ est un espace fibré à base paracompacte et sa fibre est un espace numérique; il admet donc des sections [15].

2. Connexions dans un espace fibré soudé à sa base.

Dans la suite de ce travail, Φ est un groupoïde différentiable sur V opérant transitivement sur E; $p: E \to V$ est la projection définie par l'action de Φ. [12, a]. On supposera $dim\, E = 2\, dim\, V$. En outre E est soudé à sa base V, au moyen d'une soudure Σ, c'est-à-dire une section de $\alpha: J(E, V) \to V$ satisfaisant aux conditions suivantes [7]: pour tout $x \in V$

a) Σ_x est régulier

b) $\bar{p}\Sigma_x = \hat{j}_x$

L'hypothèse $dim\, E = 2\, dim\, V$ implique: $\Sigma_x \in \Pi(E_x, V)$. On pose $x' = \sigma(x) = \beta(\Sigma_x)$; σ est une section de $p: E \to V$.

DEFINITION. I, 2, 1. (*)

Un élément de connexion dans E, au point $x \in V$ est un élément de connexion X dans Φ satisfaisant à la condition supplémentaire: $X \bullet j_x(\sigma) = \Sigma_x$; $\bullet$ désigne le prolongement [10, b] de l'action de Φ sur E en une application de $J(\Phi \underset{V}{\times} E, V)$ dans $J(E, V)$.

Soit $Q(E)$ l'ensemble des éléments de connexion dans E.

PROPOSITION. I, 2, 1.

$Q(E)$ est une sous-variété de $Q(\Phi)$, et la restriction de q à $Q(E)$ est de rang maximum sur V.

$(\beta, \alpha): J(E, V) \to E \times V$ est surjective de rang maximum; soit $J'(E, V)$ la sous-variété image réciproque de la sous-variété $\{x', x\}, x \in V$. Soit $l: Q(\Phi) \to J'(E, V)$ l'application qui à X fait correspondre $X \bullet j_{\alpha(X)}(\sigma)$. La proposition sera établie en vertu du

(*) Définition posée par Ehresmann dans son cours (1961) lemme (I, 1, 1), si l'on démontre que l est surjective de rang maximum, car $Q(E)$ est l'image réciproque par l de la sous-variété $\{\Sigma_x\}_{x\in V}$ de $J(E,V)$, isomorphe à V. On se sert de la remarque suivante.

REMARQUE. I, 2, 1.

Soit Φ un groupoïde différentiable sur V; il existe au voisinage de (x_o, x_o) un relèvement f de $(b,a): \Phi \to V\times V$ tel que $f(x,x) = \tilde{x}$. En effet soit g un relèvement de $b: a^{-1}(x_o) \to V$ autour de x_o ; on peut poser autour de (x_o, x_o) dans $V\times V$:

$$f(y,x) = g(y)\,g(x)^{-1}$$

Démontrons alors que l est surjective. Soit $S \in J'(E,V)$; il s'agit d'exhiber un $X \in Q(\Phi)$ tel que $X \bullet j_x(\sigma) = S$, où $x = \alpha(S)$. Puisque $\Phi \overset{\times}{_V} E$ est un groupoïde différentiable sur E, il existe, en vertu de la remarque, autour de (x', x') dans $E\times E$ une application g dans Φ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$g(z,u)u \text{ est défini et égale à } z$$

$$g(z,z) = \tilde{p}(z)$$

Il est alors trivial que $\bar{g}(S, j_x(\sigma)) = X$ est défini, appartient à $Q(\Phi)$ et que $X \bullet j_x(\sigma) = S$. Il reste à voir que l est de rang maximum. Soit $X_o \in Q(\Phi)$, $\alpha(X_o) = x_o$, $l(X_o) = S_o$; il s'agit de définir au voisinage de S_o dans $J'(E,V)$ une section k de l telle que $k(S_o) = X_o$. Puisque $q: Q(\Phi) \to V$ est surjective de rang maximum, l'on a autour de x_o une section $x \to X_x$ de q où $X_{x_o} = X_o$. Si g est l'application définie autour de (x'_o, x'_o) dont on s'est servi pour montrer que l est surjective, l'expression $k(S) = (\bar{s}\,\bar{g}(X_{\alpha(S)} \bullet j_{\alpha(S)}(\sigma), S)) \bullet X_{\alpha(S)}$ est définie lorsque S est voisin de S_o dans $J'(E,V)$; on vérifie aisément que k est une section locale de l satisfaisant à la condition $k(X_o) = S_o$. On peut alors poser :

DEFINITION. I, 2, 2.

Une connexion dans E est une section de $q: Q(E) \to V$.

On va s'assurer qu'il existe des connexions (désormais, il s'agit implicitement de connexions dans E, sauf mention contraire), par la même voie que dans le paragraphe précédent.

Il s'agit de montrer que $Q(E)$ est un sous-fibré de $Q(\Phi)$, et que sa fibre est un espace numérique.

Soit Ψ le sous-groupoïde de Φ pour lequel $\sigma(V)$ est stable. C'est un groupoïde différentiable sur V. Comme Φ s'identifie à la sous-variété de $\Phi \overset{\times}{_V} E$ formée des

$\{f, \sigma(a(f))\}_{f \in \Phi}$, Ψ s'identifie à l'image réciproque de $\sigma(V) \times \sigma(V)$ par l'application canonique $c : \Phi \underset{V}{\times} E \to E \times E$, où $c(f, z) = (z, fz)$; on sait que c est surjective de rang maximum car Φ opère transitivement sur E (Définition I, 1, 3). ; Ψ est alors isomorphe à une sous-variété Ψ' de $\Phi \times E$; le fait que la restriction de c à Ψ' est de rang maximum sur $\sigma(V) \times \sigma(V)$, (Lemme I, 1, 1). entraîne que Ψ est un groupoïde différentiable sur V. L'on peut donc considérer son prolongement $\tilde{\Psi}$. Soit $\tilde{\Psi}(\Sigma)$ le sous-groupoïde de $\tilde{\Psi}$, formé des A satisfaisant à la condition : $\Sigma_{\beta(A)} \bar{b} A = \overline{\beta(A)} \Sigma_{\alpha(A)}$.

En vue de la proposition suivante on a un lemme utile.

LEMME I, 2, 1.

Soient Φ, Φ' des groupoïdes différentiables sur V, a, b, a', b', les projections source et but correspondantes; soit φ un foncteur de Φ dans Φ', tel que $a' \circ \varphi = a$ et $b' \circ \varphi = b$. Alors $\varphi(\Phi)$ est un sous-groupoïde différentiable de Φ' sur V et φ est de rang maximum sur $\varphi(\Phi)$.

Une démonstration très détaillée reviendrait à ceci : en bref $\varphi(\Phi)$, qui est évidemment un groupoïde sur V, est une sous-variété en raison des deux faits suivants: Φ est localement isomorphe au groupoïde différentiable trivial $V \times \Phi_x \times V$ où $x \in V$ est arbitraire; d'autre part l'image d'un groupe de Lie par un homomorphisme analytique f est un groupe de Lie, et $f : G \to f(G)$ est de rang maximum. Il en résulte que $\varphi(\Phi)$ est une sous-variété et que φ est de rang maximum sur $\varphi(\Phi)$. Il est alors trivial que $\varphi(\Phi)$ est un groupoïde différentiable sur V, à cause du diagramme:

$$\begin{tikzcd} \Phi \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "(a,b)"'] & & \varphi(\Phi) \arrow[dl, "(a',b')"] \\ & V \times V & \end{tikzcd}$$

où (a,b) est surjective de rang maximum.

PROPOSITION .I, 2, 2.

a) $\tilde{\Psi}(\Sigma)$ est un sous-groupoïde différentiable de $\tilde{\Phi}$ sur V.

b) $Q(E)$ est un sous-fibré homogène de $Q(\Phi)$, à groupoïde structural $\tilde{\Psi}(\Sigma)$.

c) la fibre de $Q(E)$ est un espace numérique.

a) Soit $\varepsilon : \Psi \to \Pi(V)$ le foncteur qui à f fait correspondre $\Sigma^{-1}_{b(f)} \bar{f} \Sigma_{a(f)}$; soit $\Pi(\Sigma, V) = \varepsilon(\Psi)$. En vertu du lemme : $\Pi(\Sigma, V)$ est un sous-groupoïde différentiable de $\Pi(V)$ sur V, et $\varepsilon : \Psi \to \Pi(\Sigma, V)$ est de rang maximum. Soit $\Pi(V) \underset{V}{\times} \Psi$ le groupoïde formé des $(X, f) \in \Pi(V) \times \Psi$ tels que $\alpha(X) = a(f)$, $\beta(X) = b(f)$; au moyen du lemme $(I, 1, 1)$ on voit aisément que $\Pi(V) \underset{V}{\times} \Psi$ est un groupoïde différentiable sur V, car $\Pi(V)$ et Ψ sont différentiables sur V. De même, $\Pi(V) \underset{V}{\times} \Pi(\Sigma, V)$ est un groupoïde différentiable sur V; comme $\varepsilon : \Psi \to \Pi(\Sigma, V)$ est surjective de rang maximum, on a un foncteur surjectif de rang maximum, $\varepsilon' : \Pi(V) \underset{V}{\times} \Psi \to \Pi(V) \underset{V}{\times} \Pi(\Sigma, V)$ formé au moyen de ε et de l'identité sur $\Pi(V)$. En tenant compte du fait que $\bar{b} : \tilde{\Psi} \to \Pi(V)$ est surjective de rang maximum, on démontre facilement, par le procédé utilisé dans la proposition $(I, 1, 1)$ que le foncteur $(\bar{b}, \beta) : \tilde{\Psi} \to \Pi(V) \underset{V}{\times} \Psi$ est surjectif de rang maximum. En vertu du lemme $(I, 1, 1)$, $\tilde{\Psi}(\Sigma)$ est alors manifestement une sous-variété de $\tilde{\Psi}$ et $\bar{b} : \tilde{\Psi}(\Sigma) \to \Pi(\Sigma, V)$ est de rang maximum surjective; en effet, $\tilde{\Psi}(\Sigma)$ est l'image réciproque de la diagonale de $\Pi(\Sigma, V) \times \Pi(\Sigma, V)$ par le foncteur surjectif de rang maximum $\varepsilon' \circ (\bar{b}, \beta)$: $: \tilde{\Psi} \to \Pi(V) \underset{V}{\times} \Pi(\Sigma, V)$; $\tilde{\Psi}(\Sigma)$ est un groupoïde différentiable sur V, car la projection source-but de $\tilde{\Psi}(\Sigma)$ dans $V \times V$ se factorise en deux applications surjectives de rang maximum: $\bar{b} : \tilde{\Psi}(\Sigma) \to \Pi(\Sigma, V)$ et $(\alpha, \beta) : \Pi(\Sigma, V) \to V \times V$.

b) L'on vérifie par un calcul simple que la sous-variété $Q(E)$ de $Q(\Phi)$ est stable pour les opérateurs de $\tilde{\Psi}(\Sigma)$, lorsqu'on considère $\tilde{\Psi}(\Sigma)$ comme un sous-groupoïde de $\tilde{\Phi}$ et l'action de $\tilde{\Phi}$ sur $Q(\Phi)$ définie au paragraphe précédent. D'autre part l'ensemble des couples composables $\tilde{\Psi}(\Sigma) \underset{V}{\times} Q(E)$ est une sous-variété de $\tilde{\Psi}(\Sigma) \times Q(E)$, car $\alpha : \tilde{\Psi}(\Sigma) \to V$ et $q : Q(E) \to V$ sont surjectives de rang maximum, en vertu de a) et de la proposition $(I, 2, 1)$. $Q(E)$ est donc un fibré à groupoïde structural $\tilde{\Psi}(\Sigma)$. Il reste à voir que $\tilde{\Psi}(\Sigma)$ opère transitivement sur $Q(E)$; il suffit de le vérifier sur une fibre. Soit $X \in Q_x(E)$; il s'agit de voir que l'application $X^* : \tilde{\Psi}_x(\Sigma) \to Q_x(E)$ qui à A fait correspondre $A \circ X$ est surjective de rang maximum, cela est évident car l'ensemble des $A \in \tilde{\Psi}$ tels que $\alpha(A) = x$, $\beta(A) = \tilde{x}$, $\bar{b}A = j_x$, est un sous-groupe $\tilde{\Psi}'_x$ de $\tilde{\Psi}_x(\Sigma)$, et la restriction de X^* à $\tilde{\Psi}'_x$ est un difféomorphisme sur $Q_x(E)$.

c) En vertu de ce qui précède, il suffit de vérifier que $\tilde{\Psi}'_x$ est difféomorphe à un espace numérique. Soit $X \in Q_x(\Psi)$. L'application qui à $A \in \tilde{\Psi}'_x$ fait correspondre $X \bullet A \bullet \bar{s} X$ est un difféomorphisme sur la variété Ψ^o_x formée des jets de V dans Ψ_x de source x, de but $\tilde{x}$. Ψ^o_x est évidemment un espace numérique.

COROLLAIRE I, 2, 2.

Il existe des connexions dans E.

En effet, $Q(E)$ est un espace fibré à base paracompacte; sa fibre est un espace numérique; il admet donc des sections [15] .

3. Torsion.

Si V et W sont des variétés feuilletées régulières [13], l'ensemble $\overline{J}^r(W', V')$ des jets semi-holonomes d'ordre r d'une feuille quelconque de V dans une feuille quelconque de W peut être naturellement muni d'une structure de variété satisfaisant aux conditions suivantes :

$(\beta, \alpha) : J(W', V') \to W \times V$ est surjective de rang maximum

$\beta : \overline{J}^r(W', V') \to \overline{J}^{r-1}(W', V')$ où $r > 1$ est surjective de rang maximum.

Si les feuilles de V et de W ont la même dimension, on considère les sous-variétés $\overline{\Pi}^r(W', V')$ formées des jets inversibles; elles satisfont aux mêmes propriétés.

Désormais on note δ l'application qui à un jet semi-holonome du 2[e] ordre fait correspondre son but c'est-à-dire sa composante du 1[er] ordre.

Si on considère sur E le feuilletage régulier défini par sa fibration et sur V le feuilletage trivial, la condition $dim\ E = 2\ dim\ V$ et les considérations précédentes entraînent que $\Pi^2(E', V)$ et $\Pi(E', V)$ ont un sens bien défini. Soit $\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$ l'image réciproque de $\{\Sigma_x\}_{x \in V}$ par $\delta : \overline{\Pi}^2(E', V) \to \Pi(E', V)$; en vertu du lemme(I,1,1) $\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$ est une sous-variété de $\overline{\Pi}^2(E', V)$ et $\alpha : \overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \to V$ est une surjection de rang maximum. Soit $\Pi_0^2(V)$ le sous-groupoïde de $\Pi^2(V)$ formé des X tels que $\delta(X) = j_{\alpha(X)}$; $\Pi_0^2(V)$ opère sur $\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$ par composition de jets semi-holonomes. Les classes de la relation d'équivalence associée, c'est-à-dire les orbites de $\Pi_0^2(V)$, forment un feuilletage régulier. En vertu de la théorie des variétés quotients $S(E) = \overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)/\Pi_0^2(V)$ est naturellement muni d'une structure de variété et l'application canonique $\eta : \overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \to S(E)$ est de rang maximum [13]. La surjection de rang maximum $\alpha : \overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \to V$ se factorise en $t \circ \eta$ et $t : S(E) \to V$ est alors surjective de rang maximum. Pour une raison qui sera bientôt claire, on pose :

DEFINITION I, 3, 1.

Un élément de torsion en $x \in V$ *est une classe de jets* $\Gamma \in S(E)$, *telle que* $t(\Gamma) = x$.

Soit $\Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)$ le sous-groupoïde de $\Psi \underset{V}{\times} \overline{\Pi}^2(V)$ formé des (f, X) tels que $\overline{f}\Sigma_x = \Sigma_y\, \delta(X)$ où $x = a(f)$, $y = b(f)$.

PROPOSITION I, 3, 1.

a) $\Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)$ *est un groupoïde différentiable sur* V.

b) $\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$ *et* $S(E)$ *sont fibrés à groupoïde structural* $\Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)$; *l'application* η *est covariante* [12] *par rapport à* $\Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)$.

a) On a vu dans le paragraphe précédent que $\varepsilon : \Psi \to \Pi(\Sigma, V)$ est un foncteur surjectif de rang maximum. Il en résulte que $(\varepsilon, \delta) : \Psi \underset{V}{\times} \overline{\Pi}^2(V) \to \Pi(\Sigma, V) \underset{V}{\times} \Pi(V)$ est un foncteur surjectif de rang maximum, tous les groupoïdes étant différentiables sur V. En vertu du lemme (I, 1, 1) l'image réciproque de la diagonale de $\Pi(\Sigma, V) \times \Pi(\Sigma, V)$, c'est-à-dire précisément $\Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)$, est une sous-variété et le foncteur $\delta' : \Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V) \to$ $\to \Pi(\Sigma, V)$, qui à (f, X) fait correspondre $\delta(X)$, est surjectif de rang maximum. Puisque $\Pi(\Sigma, V)$ est un groupoïde différentiable sur V, il en résulte que $\Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)$ est un groupoïde différentiable sur V.

b) Comme $\Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)$ est un groupoïde différentiable sur V, et que $\alpha : \overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \to$ $\to V$ est de rang maximum, l'ensemble des $((f, A), Z)$ de $(\Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)) \times \overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$ tels que $a(f) = \alpha(Z)$ est une sous-variété. L'application de cette variété dans $\overline{\Pi}^2(E', V)$ qui à $((f, A), Z)$ fait correspondre $(f, A) \circ Z = \bar{f} Z A^{-1}$, obtenu par les opérations ordinaires sur les jets semi-holonomes [10, a], prend des valeurs dans $\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$ et définit sur cette variété une structure d'espace à groupoïde d'opérateurs, donc d'espace fibré à groupoïde structural $\Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)$. Ce groupoïde opère aussi sur $S(E)$ de manière que η soit covariante; il suffit de remarquer que la relation d'équivalence sur $\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$ définissant $S(E)$ est compatible avec l'action de $\Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)$; plus précisément, soient $(f, A) \in \Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)$, $Z \in \overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$, $H \in \Pi^2_o(V)$ et $\alpha(H) = \alpha(Z) = \alpha(A)$; il s'agit de vérifier qu'il existe $H' \in \Pi^2_o(V)$ tel que $(f, A) \circ Z H = ((f, A) \circ Z) H'$ ou encore $\bar{f} Z H A^{-1} = \bar{f} Z A^{-1} H'$. On peut prendre $H' = A H A^{-1}$; H' est holonome en vertu de la remarque suivante qu'on démontre par un calcul trivial.

REMARQUE I, 3, 1.

Le noyau de $\delta : L^2_n \to L_n$ est distingué dans $\overline{L}^2_n$, lorsque l'on considère L^2_n comme un sous-groupe de $\overline{L}^2_n$.

Soit $j : \Phi \to \Pi(E')$ l'application qui à f fait correspondre $j_{\sigma(a(f))}(f)$. Soit $\bullet$ le prolongement [10, b] de la composition ordinaire des jets : $\Pi(E') \underset{E}{\times} \Pi(E', V) \to \Pi(E', V)$ en : $J(\Pi(E') \underset{E}{\times} \Pi(E', V), V) \to J(\Pi(E', V), V)$. Pour tout $X \in Q(E)$, $\xi(X) = \bar{j} X \bullet \tilde{j}_x(\Sigma)$ où $x = q(X)$, est un élément bien défini de $\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$. Soit χ le foncteur de $\tilde{\Psi}(\Sigma)$ dans $\Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)$ qui à A fait correspondre $(\beta(A), \overline{\tau \Sigma} b A \bullet \bar{j} A \bullet j_{\alpha(A)}(\Sigma))$; la seconde composante est obtenue par prolongement de la composition ordinaire des jets: $\Pi(V, E') \underset{E}{\times} \Pi(E') \underset{E}{\times} \Pi(E', V) \to \Pi(V)$ en $J(\Pi(V, E') \underset{E}{\times} \Pi(E') \underset{E}{\times} \Pi(E', V), V) \to$ $J(\Pi(V), V)$; τ désigne l'inversion des jets appliquant $\Pi(E', V)$ sur $\Pi(V, E')$. On démontre alors par un calcul trivial :

PROPOSITION I, 3, 2.

$\xi : Q(E) \to \overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$ est covariante relativement au foncteur $\chi : \tilde{\Psi}(\Sigma) \to \Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)$

Soit $\theta = \eta \circ \xi$. Il résulte de cette proposition et de la précédente que $\theta : Q(E) \to$ $\to S(E)$ est covariante par rapport au foncteur χ.
On peut poser :

DEFINITION I, 3, 2.

a) Soit $X \in Q(E)$; on appelle $\theta(X)$ la torsion de X. On dit que X est sans torsion, ou à torsion nulle ou encore holonome, si $\theta(X)$ est la classe $\Pi^2(E', V) \cap \overline{\Pi}^2_x(\Sigma, E, V)$ où $x = q(X)$, c'est-à-dire si et seulement si $\xi(X)$ est holonome.

b) La torsion d'une connexion $X : V \to Q(E)$ est la section $\theta \circ X$ de $t : S(E) \to V$.

On se propose d'indiquer le plus grand sous-fibré $S'(E)$ de $S(E)$ tel que toute section de $S'(E)$ au-dessus de V soit la torsion d'une connexion; on verra aussi sous quelle condition on a $S'(E) = S(E)$.

Soit Ω un sous-groupoïde différentiable de $\Pi(V)$, (c'est-à-dire désormais un groupoïde différentiable sur V). Posons $\overline{\Omega}^2 = \overline{\Pi}^2(V) \cap J(\Omega, V)$, $\Omega^2 = J(\Omega, V) \cap \Pi^2(V)$; $\overline{\Omega}^2$ et Ω^2 sont des sous-groupoïdes différentiables de $\overline{\Pi}^2(V)$ et $\Pi^2(V)$. L'image réciproque des unités par le foncteur surjectif de rang maximum $\delta : \overline{\Omega}^2 \to \Omega$ est une sous-variété $\overline{\Omega}^2_o$; on définit de même Ω^2_o. Soit H un repère semi-holonome du 2^e ordre en $x \in V$ [9, a] . H induit l'isomorphisme de groupes $H' : \overline{\Pi}^2_x(V) \to \overline{L}^2_n$ qui à X fait correspondre $H^{-1}XH$. On identifie $\overline{L}^2_n$ à $L_n \times R^{n^3}$ [10, b] et on pose $\tilde{H} = r \circ H'$ où r est la projection de $\overline{L}^2_n$ sur R^{n^3}.

LEMME I, 3, 1.

La restriction de $\tilde{H}$ à $\overline{\Omega}^2_{o,x}$ est un isomorphisme de groupes sur un sous-espace vectoriel M de R^{n^3}; l'image de $\Omega^2_{o,x}$ est le sous-espace N de M formé des $(x^i_{jk})_{i,j,k=1\ldots n}$ symétriques par rapport aux indices inférieurs.

La règle de calcul des jets semi-holonomes du 2^e ordre [10, b] entraîne que le composé de $((\delta^j_i)_{i,j=1\ldots n}, (a^j_{ik})_{i,j,k=1\ldots n})$ et de $((\delta^j_i)_{i,j=1\ldots n}, (b^j_{ik})_{i,j,k=1\ldots n})$ dans $\overline{L}^2_n$ égale $((\delta^j_i)_{i,j=1\ldots n}, (c^j_{ik})_{i,j,k=1\ldots n})$ où $c^j_{ik} = a^j_{ik} + b^j_{ik}$. Il en résulte que $\tilde{H} : \overline{\Pi}^2_{o,x} \to R^{n^3}$ est un isomorphisme de groupes. Démontrons que $\overline{\Omega}^2_{o,x}$ est fermé et connexe dans $\overline{\Pi}^2_{o,x}$; son image par $\tilde{H}$ sera un sous-espace vectoriel de R^{n^3} [3, b] . Soit A un élément de $Q_x(\Omega)$; soit Ω^o_x le sous-espace de $J(\Omega_x, V)$ formé des jets de source x et de but j_x; soit $\tilde{A} : \overline{\Pi}^2_{o,x}(V) \to \Pi^o_x(V)$ la bijection qui à X fait correspondre $A \bullet X \bullet \tau A$ où τ est l'inversion dans $\Pi(V)$; ce jet est obtenu en prolongeant la composition ordinaire $\Pi(V) \underset{V}{\times} \Pi(V) \underset{V}{\times} \Pi(V) \to \Pi(V)$ à $J(\Pi(V) \underset{V}{\times} \Pi(V) \underset{V}{\times} \Pi(V), V) \to J(\Pi(V), V)$. La démonstration de la première partie de l'énoncé est achevée car $\tilde{A}$ transforme l'injection naturelle de $\overline{\Omega}^2_{o,x}$ dans $\overline{\Pi}^2_{o,x}(V)$ en l'injection naturelle de l'espace vectoriel Ω^o_x dans l'espace vectoriel $\Pi^o_x(V)$. Le deuxième énoncé découle de la remarque (I, 3, 1). Le lem-

-me suivant exprime dans le langage des groupoïdes différentiables un théorème classique et plus général de surfibration [15].

LEMME I, 3, 2.

Soit Φ un groupoïde différentiable opérant sur E et E', soit $\varphi: E \to E'$ une application surjective, covariante et de rang maximum. Si Φ opère transitivement sur E, alors le groupoïde des couples composables $\Phi \underset{V}{\times} E'$ est différentiable sur E' et $\varphi: E \to E'$ est une fibration admettant le groupoïde structural $\Phi \underset{V}{\times} E'$.

$\Phi \underset{V}{\times} E'$ est un groupoïde différentiable sur E'. En effet la projection source-but [12, b] $\chi': \Phi \underset{V}{\times} E' \to E' \times E'$, qui à (f, z) fait correspondre (z, fz) est surjective de rang maximum à cause de :

$$\begin{array}{ccc} \Phi \underset{V}{\times} E & \xrightarrow{\chi} & E \times E \\ \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle (\varphi, \varphi)} \\ \Phi \underset{V}{\times} E' & \xrightarrow{\chi'} & E' \times E' \end{array}$$

où (φ, φ) et χ sont par hypothèse surjectives de rang maximum; ψ fait correspondre $(f, \varphi(z))$ à (f, z). Il reste à voir que $\Phi \underset{V}{\times} E'$ opère sur E, de façon que la projection de E sur E' ainsi déterminée soit φ. Puisque φ est surjective de rang maximum et que $\Phi \underset{V}{\times} E'$ est un groupoïde différentiable sur E', l'application $\chi'' : (\Phi \underset{V}{\times} E') \times E \to E' \times E'$ qui à (f, z', z) fait correspondre $(z', \varphi(z))$ est surjective de rang maximum; l'image réciproque de la diagonale est une sous-variété $(\Phi \underset{V}{\times} E') \underset{E}{\times} E$. L'application de $(\Phi \underset{V}{\times} E') \underset{E}{\times} E$ dans E qui à $((f, z'), z)$ fait correspondre fz fait de $\Phi \underset{V}{\times} E$ un groupoï-de d'opérateurs sur E qui induit la projection $\varphi: E \to E'$.

Un théorème classique affirme qu'une variété sur laquelle opère transitivement (au sens ordinaire) un groupe de Lie, dénombrable à l'infini, est un espace homogène de Lie [14]. Si le groupe structural de Φ est dénombrable à l'infini, Φ opère transitivement (au sens défini dans le paragraphe précédent) dès qu'il est transitif au sens ordinaire; le lemme est encore vrai sous la condition que φ soit surjective, covariante. Remarquons que chaque fois qu'on applique ce lemme, il s'agira en fait d'un groupoïde à groupe structural dénombrable à l'infini; ce qui permettra de simplifier formellement quelques démonstrations.

PROPOSITION I, 3, 3.

a) $\xi(Q(E))$ est une sous-variété de $\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$

b) $\xi : Q(E) \to \xi(Q(E))$ admet des sections.

a) On a vu que $\Pi(\Sigma, V)$ est un sous-groupoïde différentiable de $\Pi(V)$; $\overline{\Pi}^2_0(\Sigma, V)$ est une sous-variété de $\overline{\Pi}^2_0(V)$ et $\alpha : \overline{\Pi}^2_o(\Sigma, V) \to V$ est surjective de rang maximum. Par le procédé de la proposition (I, 1, 1) on voit aisément que le sous-ensemble $\tilde{\Psi}_o$ de $J(\Psi, V)$ formé des A tels que $\bar{a}A = \bar{b}A = j_{\alpha(A)}$, $\beta(A) = \widetilde{\alpha(A)}$ est une variété ; $\alpha : \tilde{\Psi}_0 \to V$ est surjective de rang maximum. Soit X une connexion : il en existe en vertu du corollaire (I, 2, 2). Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} Q(E) & \xrightarrow{\quad \xi \quad} & \overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \\ \downarrow {\scriptstyle k_X} & & \downarrow {\scriptstyle l_X} \\ \tilde{\Psi}_o & \xrightarrow{\quad \bar{\varepsilon} \quad} & \overline{\Pi}^2_0(V) \end{array} \qquad (1)$$

où $k_X(A) = \bar{s}X_{q(A)} \bullet A$ et $l_X(Z) = \bar{\tau}(\xi(X_{\alpha(Z)})) \circ (Z)$. Dans la dernière égalité $\circ$ représente le prolongement de la composition ordinaire des jets : $\Pi(V, E') \underset{E}{\times} \Pi(E', V) \to \Pi(V)$ à $J(\Pi(V, E') \underset{E}{\times} \Pi(E', V), V) \to J(\Pi(V), V)$ et τ l'inversion des jets appliquant $\Pi(E', V)$ sur $\Pi(V, E')$. Comme l_X est un difféomorphisme, la première partie de la proposition sera démontrée si l'on établit que $\xi(Q(E))$ correspond par l_X à la sous-variété $\overline{\Pi}^2_o(\Sigma, V)$; comme k_X est aussi un difféomorphisme, cela revient à montrer que $\bar{\varepsilon} : \tilde{\Psi}_o \to \overline{\Pi}^2_o(\Sigma, V)$ est surjective. Soient $A \in \overline{\Pi}^2_o(\Sigma, V)$, $x = \alpha(A)$, χ un relèvement local en j_x de $\varepsilon : \Psi \to \Pi(\Sigma, V)$ qui à j_x fait correspondre $\tilde{x}$. Il est alors évident que l'on a $\bar{\chi}A \in \tilde{\Psi}_o$ et $\overline{\varepsilon\chi}A = A$, en considérant A comme un jet de $J(\Pi(\Sigma, V), V)$.

b) Il suffit de démontrer que la restriction de ξ à une fibre quelconque $\xi : Q_x(E) \to \xi(Q_x(E))$ s'identifie à une application linéaire surjective d'espaces vectoriels. En effet, en vertu de la proposition (I, 3, 2), $\tilde{\Psi}(\Sigma)$, qui opère transitivement sur $Q(E)$, opère naturellement sur $\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$; $\xi(Q(E))$ est stable pour $\tilde{\Psi}(\Sigma)$ et ξ est covariante surjective par rapport à $\tilde{\Psi}(\Sigma)$. Il résulte alors du lemme (I, 3, 2) que $\xi : Q(E) \to \xi(Q(E))$ est une fibration. Cette fibration admet des sections, car $\xi(Q(E))$ est paracompacte comme V. D'autre part la fibre de ξ est un espace numérique, si la restriction de ξ à $Q_x(E)$, $x \in V$, s'identifie à une application linéaire d'espaces vectoriels. Démontrons donc ce détail.

Soient $X \in Q_x(E)$, $Y \in Q_x(\Psi)$; soit Ψ^o_x l'espace vectoriel formé des jets de V dans Ψ_x de source x et de but $\tilde{x}$. De même soit $\Pi^o_x(\Sigma, V)$ l'espace vectoriel des jets de V dans $\Pi_x(\Sigma, V)$ de source x et de but j_x.

L'on prolonge le diagramme trivialement dérivé de (1) par restriction à $Q_x(E)$, dans le diagramme suivant :

$$(2) \qquad \begin{tikzcd}
Q_x(E) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "k_X"'] & \xi(Q_x(E)) \arrow[d, "l_X"] \\
\tilde{\Psi}_{o,x} \arrow[r, "\bar{\varepsilon}"] \arrow[d, "k'_Y"'] & \overline{\Pi}^2_{o,x}(\Sigma, V) \arrow[d, "l'_Y"] \\
\Psi^o_x \arrow[r, "\bar{\varepsilon}"] & \Pi^o_x(\Sigma, V)
\end{tikzcd}$$

où $k'_Y(Z) = Y \circ Z \circ \bar{s} Y$ et $l'_Y(Z) = \bar{\varepsilon} Y \circ Z \circ \overline{\varepsilon s} Y$; k'_Y et l'_Y sont des difféomor-phismes et $\bar{\varepsilon} : \Psi^o_x \to \Pi^o_x(\Sigma, V)$ est évidemment linéaire pour les structures vec-torielles induites.

Désignons désormais $\xi(Q(E))$ par $'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$. Un difféomorphisme $l_X : {}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \to \overline{\Pi}^2_o(\Sigma, V)$ du diagramme (1) montre que $\Pi^2_o(\Sigma, V)$ opère sur $'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$. Les classes de la relation d'équivalence associée forment un feuilletage régulier; on a donc une variété quotient $'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)/\Pi^2_o(\Sigma, V)$ et une application canonique de rang maximum $\eta' = {}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \to {}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)/\Pi^2_o(\Sigma, V)$ [13]. L'in-jection canonique $i : {}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \to \overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$ se projette en une application i^* : $'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)/\Pi^2_o(\Sigma, V) \to S(E)$ en vertu de théorèmes généraux sur les variétés quotients, et on a :

$$(3) \qquad \begin{tikzcd}
{}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\eta'"'] & \overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \arrow[d, "\eta"] \\
{}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)/\Pi^2_o(\Sigma, V) \arrow[r, "i^*"] & S(E)
\end{tikzcd}$$

i^* est injective et régulière comme on peut le voir en coordonnées adaptées [13]. Il en résulte que $S'(E) = i^*({}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)/\Pi^2_o(\Sigma, V))$ est une sous-variété de $S(E)$. Remar-quons enfin que $\tilde{\Psi}(\Sigma)$ opère sur $'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)/\Pi^2_o(\Sigma, V)$ et que (3) est covariant par rapport à $\tilde{\Psi}(\Sigma)$. Il suffit de s'assurer que si $Z \in {}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$, $H \in \Pi^2_o(\Sigma, V)$, $A \in \tilde{\Psi}(\Sigma)$, $\alpha(Z) = \alpha(H) = \alpha(A)$, alors il existe $H' \in \Pi^2_o(\Sigma, V)$ tel que $A \circ (ZH) = (A \circ Z)H'$. La proposition (I, 3, 1) assure qu'il existe un tel $H' \in \Pi^2_o(V)$; puisque $A \circ (ZH)$ et $A \circ Z$ appartiennent à $'\Pi^2(\Sigma, E, V)$ et que i^* est injective, il en résulte que H' appartient à $\Pi^2_o(\Sigma, V)$.

PROPOSITION I,3,4.

Soit Θ une section de $t : S'(E) \to V$. Il existe une connexion ayant pour torsion ϑ.

$\theta : Q(E) \to S(E)$ se factorise en deux applications surjectives $\xi : Q(E) \to {}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$ et $\eta' : {}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \to S'(E, V)$. La première application admet une section ξ^* en vertu de la proposition (I,3,3). Il suffit d'établir que la seconde admet aussi une section η^*; $\xi^* \circ \eta^* \circ \vartheta$ est alors une connexion dont la torsion est ϑ. Il s'agit de démontrer que $\eta' : {}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \to {}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)/\Pi^2_o(\Sigma, V)$ est une fibration dont la fibre est difféomorphe à un espace numérique. Il est évident, à partir de la démonstration de la proposition (I,3,3), que $\tilde{\Psi}(\Sigma)$ opère transitivement sur ${}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$; comme η' est covariante par rapport à $\tilde{\Psi}(\Sigma)$, il résulte du lemme (I,3,2) que η' est une fibration. D'autre part, la fibre est difféomorphe à un espace vectoriel en vertu du lemme (I,3,1).

On a la variété quotient $\overline{\Pi}^2_o(V)/\Pi^2_o(V)$ analogue à celles que l'on a définies plus haut et l'application canonique de rang maximum $\zeta : \overline{\Pi}^2_o(V) \to \overline{\Pi}^2_o(V)/\Pi^2_o(V)$. D'où :

COROLLAIRE I,3,4.

Si $\zeta : \overline{\Pi}^2_o(\Sigma, V) \to \overline{\Pi}^2_o(V)/\Pi^2_o(V)$ est surjective, il existe une connexion ayant pour torsion une section arbitraire de $t : S(E) \to V$.

Soit X une connexion; on a défini dans la proposition (I,3,3) le difféomorphisme $l_X : \overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \to \overline{\Pi}^2_o(V)$ qui à ${}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$ fait correspondre $\overline{\Pi}^2_o(\Sigma, V)$. On a:

$$\begin{tikzcd}
{}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "l_X"] & \overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "l_X"] & S(E) \arrow[d, "l'_X"] \\
\overline{\Pi}^2_o(\Sigma, V) \arrow[r, "i'"] & \overline{\Pi}^2_o(V) \arrow[r, "\zeta"] & \overline{\Pi}^2_o(V)/\Pi^2_o(V)
\end{tikzcd}$$

où i, i' sont les inclusions et l'_X un difféomorphisme naturellement induit par l_X. L'hypothèse entraîne manifestement $S'(E) = S(E)$ puisque $\eta : {}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \to S(E)$ est surjective.

CHAPITRE DEUX

CONNEXIONS GENERALISEES.

Ce chapitre traite l'aspect fondamental du problème de la géométrisation d'un champ du 2^e ordre de manière à embrasser les questions particulières du chapitre suivant. Il s'agi--ra d'introduire sur E et Φ des données supplémentaires qui permettront de donner une dé--finition harmonieuse du point de vue de l'intuition géométrique pour l'élément du 2^e ordre "géodésique" d'un élément de connexion généralisée.

1. Champs du 2^e ordre.

Soient $\overline{\mathfrak{T}}^r_k(V)$ la variété des k-vitesses semi-holonomes d'ordre r [$10, b$], $\mathfrak{T}^r_k(V)$ la sous-variété de $\overline{\mathfrak{T}}^r_k(V)$ formée des vitesses holonomes [$9, a$]. On réser--vera les symboles usuels $\overline{T}^r_k(V)$, $T^r_k(V)$ pour désigner les sous-variétés de $\overline{\mathfrak{T}}^r_k(V)$, $\mathfrak{T}^r_k(V)$ formées d'éléments réguliers. La projection naturelle $\pi^{(r)}: \overline{T}^r_k(V) \to$ $\to V$ est une fibration à groupoïde structural transitif $\overline{\Pi}^r(V)$; $T^r_k(V)$ est un sous--espace fibré à groupoïde structural transitif $\Pi^r(V)$. $\overline{L}^r_k$ et L^r_k opèrent à droite, par composition ordinaire des jets, sur $\overline{T}^r_k(V)$ et $T^r_k(V)$. En raison de théorèmes généraux sur les variétés quotients [13], déjà utilisés dans le premier chapitre, on a les variétés de k-éléments de contact d'ordre r : $\overline{T}^r_{k,c}(V) = \overline{T}^r_k(V)/\overline{L}^r_k$ et $T^r_{k,c}(V) =$ $= T^r_k(V)/L^r_k$ [9, b]. L'action de $\overline{\Pi}^r(V)$ sur $\overline{T}^r_k(V)$ commute avec celle de $\overline{L}^r_k$; il en résulte que $\overline{T}^r_{k,c}(V)$ est un espace fibré sur V à groupoïde structural $\overline{\Pi}^r(V)$. On suppose désormais $r \leq 2$. On a une application naturelle $\pi: \overline{T}^2_k(V) \to T_k(V)$, surjective de rang maximum et covariante par rapport au foncteur $\delta: \overline{\Pi}^2(V) \to \Pi(V)$; comme $\overline{\Pi}^2(V)$ opère transitivement sur $\overline{T}^2_k(V)$, il résulte du lemme (I, 3, 2) que $\pi: \overline{T}^2_k(V) \to T_k(V)$ est une fibration dont le groupoïde structural est $\overline{\Pi}^2_k(V)$, formé des couples $(A, \lambda) \in \overline{\Pi}^2(V) \times T_k(V)$ tels que l'on ait : $\alpha(A) = \pi(\lambda)$. $\pi: \overline{T}^2_k(V) \to T_k(V)$ est compatible avec les relations d'équivalence définissant $\overline{T}^2_{k,c}(V)$ et $T_{k,c}(V)$, et induit donc une projection $\overline{T}^2_{k,c}(V) \to T_{k,c}(V)$, que l'on désigne encore par π, lorsqu'il n'y a pas risque de confusion; cette application est surjective de rang maximum et covariante par rapport à $\delta: \overline{\Pi}^2(V) \to \Pi(V)$; on a donc une fibration $\pi: T^2_{k,c}(V) \to T_{k,c}(V)$ dont le groupoïde structural est $\overline{\Pi}^2_{k,c}(V)$ formé des $(A, \lambda) \in \overline{\Pi}^2(V) \times T_{k,c}(V)$ tels que $\alpha(A) = \pi(\lambda)$.

DEFINITION II,1,1.

a) *Un champ de k-vitesses du* 2^e *ordre est une section de* $\pi : \overline{T}^2_k(V) \to$ $\to T_k(V)$. *Un champ holonome est une section de* $\pi : T^2_k(V) \to T_k(V)$.

b) *Un champ de k-éléments de contact du* 2^e *ordre, ou plus brièvement un k-champ du* 2^e *ordre, est une section de* $\pi : \overline{T}^2_{k,c}(V) \to T_{k,c}(V)$. *Un k-champ holonome est une section de* $\pi : T^2_{k,c}(V) \to T_{k,c}(V)$ [6].

On vérifie aisément que l'image réciproque d'un point par π dans *a)* ou *b)* est difféomorphe à un espace numérique. Il en résulte que les fibrations π admet--tent des sections, c'est-à-dire qu'il existe des champs du 2^e órdre de k-vitesses ou de k-éléments de contact, et même des champs holonomes. Il est utile de re--marquer qu'un champ de k-vitesses du 2^e ordre, s'identifie à un champ ordinaire de k- vitesses "semi-holonomes" sur $T_k(V)$; on a la même chose pour un k-champ du 2^e ordre

En effet soit $A \in J(\Pi(R^k), R^k)$ défini comme suit: $A = j_0(t \to j_0(\theta_t))$, où θ_t est la translation de R^k amenant o en t; pour tout $\Lambda \in \overline{T}^2_k(V)$, $u(\Lambda) = \Lambda \bullet A$ est défini et appartient à $\mathcal{T}_k(T_k(V))$; $\bullet$ est le prolongement de la com--position des jets $J(V, R^k) \underset{R}{\times} k\, \Pi(R^k) \to J(V, R^k)$ en $J(J(V, R^k) \underset{R}{\times} k\, \Pi(R^k), R^k) \to J(J(V, R^k), R^k)$. Soient $\pi' : \mathcal{T}_k(T_k(V)) \to T_k(V)$ et $\pi'' : \mathcal{T}_k(V) \to V$, les ap--plications naturelles qui à une k-vitesse font correspondre son point de contact. On a alors :

$$\begin{tikzcd}
\overline{T}^2_k(V) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{T}_k(T_k(V)) \arrow[d, "\overline{\pi}''"] \arrow[dl, "\pi'"'] \\
T_k(V) \arrow[r, "i"] & \mathcal{T}_k(V)
\end{tikzcd}$$

où i est l'injection naturelle. Il résulte de ce diagramme: $u(\overline{T}^2_k(V)) \subset T_k(T_k(V))$. L'application u est un difféomorphisme de $\overline{T}^2_k(V)$ sur la sous-variété de $T_k(T_k(V))$ formée d'éléments Λ "semi-holonomes" c'est-à-dire dont le point d'appui $\pi'(\Lambda)$ coïncide avec la projection $\overline{\pi}''\Lambda$ suivant $\pi'' : T_k(V) \to V$. Il est alors clair qu'un champ de k-vitesses du 2^e ordre, c'est-à-dire une section de π, s'identifie avec un champ de k-vitesses du 1^{er} ordre sur $T_k(V)$ c'est-à-dire une section de π'. Vérifions sommairement que $T_{k,c}(V)$ s'identifie à une sous--variété de $T_{k,c}(T_{k,c}(V))$. On a :

$$\begin{tikzcd} T_k(V) \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\pi''"'] & & T_{k,c}(V) \arrow[dl, "\pi'''"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

et par prolongement :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_k(T_k(V)) \arrow[rr, "\bar{\rho}"] \arrow[dr, "\bar{\pi}''"'] & & \mathcal{T}_k(T_{k,c}(V)) \arrow[dl, "\bar{\pi}'''"] \\ & \mathcal{T}_k(V) & \end{tikzcd}$$

On remarque : $\bar{\pi}''(\Lambda) \in T_k(V)$, si $\Lambda \in u(\bar{T}^2_k(V))$; et par suite :

$$\begin{tikzcd} u(\bar{T}^2_k(V)) \arrow[rr, "\bar{\rho}"] \arrow[dr, "\bar{\pi}''"'] & & T_k(T_{k,c}(V)) \arrow[dl, "\bar{\pi}'''"] \\ & T_k(V) & \end{tikzcd}$$

Soit $\rho' : T_k(T_{k,c}(V)) \to T_{k,c}(T_{k,c}(V))$ l'application canonique définie par le quotient.. On vérifie que $u : \bar{T}^2_k(V) \to u(\bar{T}^2_k(V))$ est compatible avec la projection na-turelle $\rho'' : \bar{T}^2_k(V) \to \bar{T}^2_{k,c}(V)$ et $\rho' \circ \bar{\rho} : u(\bar{T}^2_k(V)) \to T_{k,c}(T_{k,c}(V))$. D'où le dia-gramme :

$$\begin{tikzcd} \bar{T}^2_k(V) \arrow[rr, "u"] \arrow[d, "\rho''"'] & & u(\bar{T}^2_k(V)) \arrow[d, "\rho' \circ \bar{\rho}"] \\ \bar{T}^2_{k,c}(V) \arrow[rr, "u'"] \arrow[dr, "\pi"'] & & T_{k,c}(T_{k,c}(V)) \arrow[dl, "\pi'"] \\ & T_{k,c}(V) & \end{tikzcd}$$

où π' est la projection d'un élément de contact sur son point d'appui ; $\Lambda \in u'(\bar{T}^2_{k,c}(V))$ entraîne que $\bar{\pi}'''\Lambda$ est un k-élément de contact et égale $\pi'(\Lambda)$. $\bar{T}^2_{k,c}(V)$ s'identifie par u' à une sous-variété de k-éléments de contact " semi-holonomes " à $T_{k,c}(V)$. Il est clair qu'un champ du 2^e ordre c'est-à-dire une section de π s'identifie à une section de π'

c'est-à-dire à un champ ordinaire de k-éléments de contact sur $T_{k,c}(V)$. Dans la suite, il sera parfois utile de généraliser la notion de champ du 2^e ordre [10, a].

DEFINITION II, 1, 2.

Un k-système différentiel du 2^e ordre est un sous-ensemble $\mathfrak{D}$ de $\overline{T}^2_{k,c}(V)$, qui se projette par π sur $T_{k,c}(V)$.

Soit une variété plongée [6] dans V de dimension $k \leq n$ c'est-à-dire un couple (W, f) où f est une application régulière de W dans V. A chaque $x \in W$ correspond un élément de $T_{k,c}(V, f(x))$ représentable par $\bar{f}H$ où H est un repère quelconque en x ; cet élément de contact est indépendant de H ; on le notera $j'_x(f)$. De même à chaque $x \in W$ correspond un élément de $\overline{T}^2_{k,c}(V, j'_x(f))$ que l'on désigne par $j''_x(f)$. Désormais on supposera implicitement que le premier prolongement $(W, j'(f))$ de (W, f) est un plongement propre, c'est-à-dire que l'application régulière $j'(f) : W \to T_{k,c}(V)$ qui à x fait correspondre $j'_x(f)$ est injective.

DEFINITION II, 1, 3.

Une intégrale d'un k-système différentiel $\mathfrak{D}$ du 2^e ordre est une variété plongée (W, f) de dimension k telle que l'image de W par $j''(f)$ soit contenue dans $\mathfrak{D}$.

Une intégrale (W, f) d'un k-champ du 2^e ordre $\Lambda : T_{k,c}(V) \to \overline{T}^2_{k,c}(V)$ est caractérisée par la propriété : $j''_x(f) = \Lambda(j'_x(f))$ pour tout $x \in W$.

Soit E une variété régulièrement feuilletée. Comme on l'a fait remarquer en tête de (I, 3) on peut considérer les variétés $J^r(E', R^k)$, $\overline{J}^r(E', R^k)$, formées des jets de R^k dans une feuille quelconque de E. Si l'on suppose que k est inférieur à la dimension des feuilles, soient $\overline{T}^r_k(E')$, $T^r_k(E')$ les sous-variétés de $\overline{J}^r(E', R^k)$, $J^r(E', R^k)$ formées de jets réguliers de source 0. Ce sont les k-vitesses tangentes aux feuilles. $\overline{T}^r_k(E')$ est un fibré sur E à groupoïde structural $\Pi(E')$. On a de même des variétés d'éléments de contact $\overline{T}^r_{k,c}(E')$, $T^r_{k,c}(E')$. On désigne par π, soit la projection naturelle de $\overline{T}^2_k(E')$ sur $T_k(E')$, soit celle de $\overline{T}^2_{k,c}(E')$ sur $T_{k,c}(E')$.

DEFINITION II, 1, 4.

a) Un champ vertical du 2^e ordre de k-vitesses sur la variété feuilletée E est une section de $\pi : \overline{T}^2_k(E') \to T_k(E')$.

b) Un k-champ vertical du 2^e ordre est une section de $\pi : \overline{T}^2_{k,c}(E') \to T_{k,c}(E')$.

2. Connexions de vitesses et d'éléments de contact.

Les applications $q : Q(E) \to V$ et $\pi : T_k(V) \to V$ sont surjectives de rang maxi-

-mum; il résulte du lemme (I, 1, 1) que l'ensemble $Q_k(E) \subset Q(E) \times T_k(V)$ formé des (X, λ) tels que $q(X) = \pi(\lambda)$ est une sous-variété. On désigne par r la projection naturelle de $Q_k(E)$ sur $T_k(V)$. De même on a une sous-variété $Q_{k,c}(E) \subset Q)E) \times T_{k,c}(V)$ et une projection $r: Q_{k,c}(E) \to T_{k,c}(V)$.

DEFINITION II, 2, 1.

a) Un élément de $Q_k(E)$ (de $Q_{k,c}(E)$) est appelé élément de connexion de k-vitesses (de k-éléments de contact).

b) Une connexion de k-vitesses est une section de $r: Q_k(E) \to T_k(V)$, c'est-à-dire une application $X: T_k(V) \to Q(E)$ satisfaisant à : $q(X(\lambda)) = \pi(\lambda)$ pour tout $\lambda \in T_k(V)$. On définit de même une connexion d'éléments de contact.

On remarque qu'une connexion ponctuelle $X: V \to Q(E)$ induit des connexions généralisées. Il suffit de composer X avec $\pi: T_k(V) \to V$ ou $\pi: T_{k,c}(V) \to V$.

Les énoncés que l'on fera dans la suite sur les connexions de vitesses ont tous leurs correspondants pour les connexions d'éléments de contact; on ne les explicitera pas dans les cas où la transposition est triviale.

On définit de manière évidente les variétés $S'_k(E)$, $S_k(E)$, $S'_{k,c}(E)$, $S_{k,c}(E)$ et leurs projections sur $T_k(V)$, $T_{k,c}(V)$. On a les applications θ_k, $\theta_{k,c}$ de $Q_k(E)$, $Q_{k,c}(E)$ dans $S'_k(E)$, $S'_{k,c}(E)$ qui à (X, λ) font correspondre $(\theta(X), \lambda)$.

DEFINITION II, 2, 2.

La torsion de l'élément de connexion généralisée $(X, \lambda) \in Q_k(E)$ est $\theta_k(X, \lambda)$. La torsion de la connexion généralisée $X: T_k(V) \to Q(E)$ est l'application $\theta \circ X: T_k(V) \to S(E)$.

PROPOSITION II, 2, 1.

Soit une section de la projection naturelle de $S'_k(E)$ sur $T_k(V)$, c'est-à-dire une application $\Gamma: T_k(V) \to S'(E)$ satisfaisant à $t(\Gamma(\lambda)) = \pi(\lambda)$. Il existe une connexion généralisée $X: T_k(V) \to Q(E)$ admettant la torsion Γ.

En vertu de la proposition (I, 3, 4), $\theta: Q(E) \to S'(E)$ admet une section l. $l \circ \Gamma$ est une connexion généralisée ayant pour torsion Γ. Il est utile, en vue de la suite, d'exhiber un groupoïde différentiable adéquat opérant transitivement sur $Q_k(E)$.

DEFINITION II, 2, 3.

a) Appelons C_k (resp. $C_{k,c}$) l'hypothèse suivante : $\Pi(\Sigma, V)$ opère transitive-

-ment sur $T_k(V)$ *(resp.* $T_{k,c}(V)$*).*

On a vu dans la proposition (I, 2, 2) que $\bar{b} : \tilde{\Psi}(\Sigma) \to \Pi(\Sigma, V)$ est surjectif; comme $\bar{b}$ est un foncteur, $\tilde{\Psi}(\Sigma)$ opère transitivement sur $T_k(V)$, sous la condition C_k. Le groupoïde Ψ_k formé des couples composables de $\tilde{\Psi}(\Sigma) \times T_k(V)$ est alors différentiable sur $T_k(V)$. Les éléments (A, λ) de Ψ_k sont caractérisés par $\alpha(A) = \pi(\dot{\lambda})$; l'objet de $T_k(V)$ correspondant à l'unité à gauche de (A, λ) est $\bar{b}A\lambda$. De même sous la condition $C_{k,c}$ on a un groupoïde différentiable $\Psi_{k,c}$ sur $T_{k,c}(V)$.

PROPOSITION II, 2, 2.

$r : Q_k(E) \to T_k(V)$ (resp. $r : Q_{k,c}(E) \to T_{k,c}(V)$) est un fibré à groupoïde structural transitif Ψ_k (resp. $\Psi_{k,c}$) sous la condition C_k (resp. $C_{k,c}$).

Il s'agit de définir une application d'une sous-variété de $\Psi_k \times Q_k(E)$ dans $Q_k(E)$, munissant $Q_k(E)$ du groupoïde d'opérateurs Ψ_k et de façon que la projection associée de $Q_k(E)$ sur $T_k(V)$ soit r[*12*]. La projection $r : Q_k(E) \to T_k(V)$ est de rang maximum; puisque Ψ_k est un groupoïde différentiable sur $T_k(V)$, il résulte aisément du lemme (I, 1, 1) que $\Psi_k \underset{T_k(V)}{\times} Q_k(E)$ formée des $((A, \lambda), (X, \lambda))$ est une sous-variété de $\Psi_k \times Q_k(E)$; $Q_k(E)$ est alors muni du groupoïde d'opérateurs Ψ_k par l'application de $\Psi_k \underset{T_k(V)}{\times} Q_k(E)$ dans $Q_k(E)$ qui à $((A, \lambda), (X, \lambda))$ fait correspondre $(A \circ X, \bar{b}A\lambda)$; $A \circ X$ est le composé défini dans la proposition (I, 1, 3). Il est évident que la projection de $Q_k(E)$ sur $T_k(V)$ définie par l'action de Ψ_k n'est autre que r. Il reste à voir que Ψ_k opère transitivement. Il suffit de le vérifier sur une fibre $r^{-1}(\lambda_o) = Q_{\pi(\lambda_o)}(E) \times \{\lambda_o\}$; soit $X_o \in Q_{x_o}(E)$, où $x_o = \pi(\lambda_o)$. Il s'agit d'établir que l'application $X_o^* : \Psi_{k,\lambda_o} \to r^{-1}(\lambda_o)$ qui à (A, λ_o) fait correspondre $(A, \lambda_o) \circ (X_o, \lambda_o)$ est surjective; ceci est évident car la restriction de X_o^* au sous-groupe $\tilde{\Psi}'_{x_o} \times \{\lambda_o\}$ de Ψ_{k,λ_o} est une bijection sur $r^{-1}(\lambda_o)$; le groupe $\tilde{\Psi}'_{x_o}$ que l'on a déjà utilisé dans la proposition (I, 2, 2) est la sous-variété de $J(\Psi, V)$ formée des A tels que $\beta(A) = \tilde{x}_o$; $\bar{a}A = \bar{b}A = j_{x_o}$.

L'action de $\tilde{\Psi}(\Sigma)$ sur $S(E)$ définie par les propositions (I, 3, 1) et (I, 3, 2) munit de la même façon $S_k(E)$ du groupoïde d'opérateurs Ψ_k; $\theta_k : Q_k(E) \to S_k(E)$ est covariante par rapport à Ψ_k.

3. Champs géodésiques.

DEFINITION II, 3, 1.

a) On désigne par Λ_k la donnée sur E d'un champ vertical du 2^e ordre de k-vitesses $\Lambda : T_k(E') \to \overline{T}{}^2_k(E')$, invariant par Φ; c'est-à-dire que, pour tout $(f, \lambda) \in \Phi \times T_k(E')$ tel que $a(f) = p(\pi(\lambda))$, on a : $\bar{f}\Lambda(\lambda) = \Lambda(\bar{f}\lambda)$.

b) On désigne par $\Lambda_{k,c}$ la donnée sur E d'un k-champ vertical du 2^e ordre invariant par Φ.

Puisque la dimension de la fibre de E égale n, ces données ont un sens pour $k \leq n$ en vertu de la définition (II, 1, 4).

Soit $\overline{\Pi}{}^2_k(\Sigma, E, V)$ la sous-variété de $\overline{\Pi}{}^2(\Sigma, E, V) \times T_k(V)$ formée des (Z, λ) tels que $\alpha(Z) = \pi(\lambda)$. L'application $\xi : Q(E) \to \overline{\Pi}{}^2(\Sigma, E, V)$, qu'on a définie dans la proposition (I, 3, 2), induit $\xi_k : Q_k(E) \to \overline{\Pi}{}^2_k(\Sigma, E, V)$, qui à (X, λ) fait correspondre $(\xi(X), \lambda)$. On a aussi une application $\xi_{k,c} : Q_{k,c}(E) \to \overline{\Pi}{}^2_{k,c}(\Sigma, E, V)$; une donnée Λ_k définit l'application $\zeta_k : \overline{\Pi}{}^2_k(\Sigma, E, V) \to \overline{T}{}^2_k(V)$ qui à (Z, λ) fait correspondre $Z^{-1}\Lambda(\Sigma_x \lambda)$ où $x = \pi(\lambda)$. On remarque : $\pi(\zeta_k(Z, \lambda)) = \lambda$. De même une donnée $\Lambda_{k,c}$ définit une application $\zeta_{k,c} : \overline{\Pi}{}^2_{k,c}(\Sigma, E, V) \to \overline{T}{}^2_{k,c}(V)$. On désigne aussi par Λ_k, $\Lambda_{k,c}$ les applications composées $\zeta_k \circ \xi_k$, $\zeta_{k,c} \circ \xi_{k,c}$.

DEFINITION II, 3, 2.

a) Soit $(X, \lambda) \in Q_k(E)$; on appelle $\Lambda_k(X, \lambda)$ la vitesse géodésique de (X, λ), correspondant à la donnée Λ_k; pour $(X, \lambda) \in Q_{k,c}(E)$ on appelle $\Lambda_{k,c}(X, \lambda)$ l'élément de contact géodésique de (X, λ) correspondant à la donnée $\Lambda_{k,c}$.

b) Le champ géodésique relatif à une donnée Λ_k d'une connexion de k-vitesses $X : T_k(V) \to Q(E)$ est le champ du 2^o ordre de k-vitesses $\Lambda(X) : T_k(V) \to \overline{T}{}^2_k(V)$ qui à λ fait correspondre $\Lambda_k(X_\lambda, \lambda)$. On définit de même le champ géodésique d'une connexion de k-éléments de contact, relatif à une donnée $\Lambda_{k,c}$.

Le champ géodésique d'une connexion ponctuelle relatif à une donnée Λ_k ou $\Lambda_{k,c}$ est celui de la connexion de k-vitesses ou de k-éléments de contact associée.

Une connexion de k-éléments de contact X et une variété (W, l) plongée dans V, de dimension k, définissent sur une fibre E_x le système différentiel du 2^e ordre $\mathfrak{D}(X, x, W, l)$ formé des composés de la forme $\overline{f}(\xi(X_{j'_y(l)}))\, j''_y(l)$, où $y \in W$ et $f \in \Phi_{x, l(y)}$.

DEFINITION II, 3, 3.

Un développement sur E_x de la variété plongée (W, l) de dimension k, par rapport à une connexion de k-éléments de contact X est une intégrale (W, l') de $\mathfrak{D}(X, x, W, l)$.

PROPOSITION II, 3, 1.

Soient une donnée $\Lambda_{k,c}$ et une connexion de k-éléments de contact X. Un développement sur E_x d'une intégrale de $\Lambda(X)$ est une intégrale de la restriction de Λ à E_x.

Soit (W, l) une intégrale de $\Lambda(X)$ et (W, l') un développement de (W, l) sur E_x. En vertu de la définition (II, 1, 3) on a pour tout $y \in W$: $j_y''(l') = \overline{f}_y \xi(X_{j_y'(l)}) j_y''(l)$. Puisque (W, l) est une intégrale de $\Lambda(X)$ on a $j_y''(l) = \Lambda(X)(j_y'(l))$; en substituant cette valeur dans l'égalité précédente, et en tenant compte de la définition de $\Lambda(X)$ on obtient $j_y''(l') = \overline{f}_y \Lambda(\Sigma_{l(y)} j_y'(l))$. Comme Λ est invariant par Φ on a enfin : $j_y''(l') = \Lambda(\overline{f}_y \Sigma_{l(y)} j_y'(l))$ ce qui exprime que (W, l') est une intégrale de la restriction de Λ à E_x. On remarque : $l'(y) = f_y(\sigma(l(y)))$.

On suppose désormais C_k ou $C_{k,c}$ réalisées, selon que la base des groupoïdes et des fibrés considérés est $T_k(V)$ ou $T_{k,c}(V)$. Le foncteur $\varepsilon : \Psi \to \Pi(V)$ que l'on a dé-fini dans la proposition (I, 2, 2) induit le foncteur $\overline{\varepsilon}_k : \Psi_k \to \overline{\Pi}_k^2(V)$, qui à (A, λ) fait correspondre $(\overline{\varepsilon} A, \lambda)$.

PROPOSITION II, 3, 2.

L'application $\Lambda_k : Q_k(E) \to \overline{T}_k^2(V)$ *est covariante par rapport à* $\overline{\varepsilon}_k : \Psi_k \to \overline{\Pi}_k^2(V)$.

L'on a vu dans la proposition (I, 3, 1) que le foncteur $\delta' : \Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V) \to \Pi(\Sigma, V)$ qui à (f, A) fait correspondre $\delta(A) = \varepsilon(f)$ est surjectif de rang maximum ; comme $\Pi(\Sigma, V)$ opère transitivement sur $T_k(V)$, il en va de même pour $\Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)$; le groupoïde $\Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}_k^2(V)$ des couples composables de $(\Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)) \times T_k(V)$ est différentiable sur $T_k(V)$. L'action de $\Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)$ sur $\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$ induit une action de $\Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}_k^2(V)$ sur $\overline{\Pi}_k^2(\Sigma, E, V)$; le composé de (f, A, λ) et de (Z, μ) est défini si $\lambda = \mu$ et égale $((f, A) \circ Z, \ \delta(A)\lambda)$; $(f, A) \circ Z$ est défini par la proposition (I, 3, 1). Le foncteur $\chi : \tilde{\Psi}(\Sigma) \to \Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)$ de la proposition (I, 3, 2) induit le foncteur $\chi_k : \Psi_k \to \Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}_k^2(V)$ qui à (A, λ) fait correspondre $(\chi(A), \lambda)$. On a aussi un foncteur évident : $\chi_k' : \Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}_k^2(V) \to \overline{\Pi}_k^2(V)$. On a $\Lambda_k = \zeta_k \circ \xi_k$, $\overline{\varepsilon}_k = \chi_k' \circ \chi_k$ et ξ_k est covariante par rapport à χ_k, comme on le voit à partir de la proposition (I, 3, 2); il suffit donc d'établir que $\zeta_k : \overline{\Pi}_k^2(\Sigma, E, V) \to \overline{T}_k^2(V)$ est covariante par rapport à χ_k'. Soient $(Z, \lambda) \in \overline{\Pi}_k^2(\Sigma, E, V)$ et $(f, A, \mu) \in \Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}_k^2(V)$ composables, donc $\lambda = \mu$. Il s'agit de vérifier que $(\chi_k'(f, A, \lambda)) \circ (\zeta_k(Z, \lambda))$ est défini et égale $\zeta_k((f, A, \lambda) \circ (Z, \lambda))$ [12]. $\chi_k'(f, A, \lambda) = (A, \lambda)$ et $\pi(\zeta_k(Z, \lambda)) = \lambda$ en-traînent que la première expression est définie et on a :

$$(\chi_k'(f, A, \lambda)) \circ (\zeta_k(Z, \lambda)) = (A, \lambda) \circ (Z^{-1} \Lambda(\Sigma_{\pi(\lambda)} \lambda) = A Z^{-1} \Lambda(\Sigma_{\pi(\lambda)} \lambda)$$

D'autre part, on a :

$$\zeta_k((f, A, \lambda) \circ (Z, \lambda)) = \zeta_k(\overline{f} Z A^{-1}, \ \delta(A)\lambda) = (\overline{f} Z A^{-1})^{-1} \Lambda(\Sigma_{\pi(\mu)} \mu)$$

où $\mu = \delta(A)\lambda$; en vertu de la définition même de $\Psi \underset{\Sigma}{\times} \overline{\Pi}^2(V)$ on a : $\overline{f} \Sigma_{\pi(\lambda)} = \Sigma_{\pi(\mu)} \delta(A)$ Donc :

$$(\bar{f} Z A^{-1})^{-1} \Lambda_{(\Sigma_{\pi(\mu)}\mu)} = A Z^{-1} \bar{f}^{-1} \Lambda_{(\bar{f}\Sigma_{\pi(\lambda)}\lambda)} = A Z^{-1} \Lambda_{(\Sigma_{\pi(\lambda)}\lambda)}$$

car Λ est invariant par Φ.

PROPOSITION II, 3, 3.

Les applications $\Lambda_k : Q_k(E) \to \bar{T}^2_k(V)$ *et* $\Lambda_{k,c} : Q_{k,c}(E) \to \bar{T}^2_{k,c}(V)$ *admettent des sections.*

On a vu dans la proposition (I, 3, 3) que $\xi : Q(E) \to \bar{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$ est une application de rang maximum sur $'\bar{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$, admettant des sections. Il en résulte trivialement que $\xi_k : Q_k(E) \to \bar{\Pi}^2_k(\Sigma, E, V)$ est une application de rang maximum, admettant des sections sur la sous-variété $'\bar{\Pi}^2_k(\Sigma, E, V)$ de $'\bar{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \times T_k(V)$ formée des (Z, λ) tels que $\alpha(Z) = \pi(\lambda)$. Il s'agit donc de vérifier que $\zeta_k : {}'\bar{\Pi}^2_k(\Sigma, E, V) \to \bar{T}^2_k(V)$ admet des sections. En vertu de la proposition précédente ζ_k est une application covariante par rapport à Ψ_k ; ce groupoïde opère transitivement sur $Q_k(E)$ en vertu de la proposition (II, 2, 2), donc aussi sur $'\bar{\Pi}^2_k(\Sigma, E, V)$. Dès lors, il s'agit essentiellement de démontrer que ζ_k est de rang maximum, surjective, et que l'image réciproque d'un élément de $\bar{T}^2_k(V)$ est difféomorphe à un espace numérique. En vertu du lemme (I, 3, 2) $\zeta_k : {}'\bar{\Pi}^2_k(\Sigma, E, V) \to \bar{T}^2_k(V)$ est alors une fibration admettant des sections. Il suffit d'ailleurs de démontrer que la restriction de ζ_k à une fibre $'\bar{\Pi}^2_{k,\lambda}(\Sigma, E, V)$ a pour image $\bar{T}^2_k(V, \lambda)$ et qu'elle s'identifie à une application linéaire d'espaces numériques. Soient X un élément de connexion en $x = \pi(\lambda)$, $l_X : {}'\bar{\Pi}^2_x(\Sigma, E, V) \to \bar{\Pi}^2_{o,x}(\Sigma, V)$ le difféomorphisme considéré dans la proposition (I, 3, 3); soit $X^* : \bar{\Pi}^2_{o,x}(\Sigma, V) \to \bar{T}^2_k(V, \lambda)$ l'application qui à Z fait correspondre $Z\Lambda_k(X, \lambda)$. On a :

$$\begin{array}{ccc}
'\bar{\Pi}^2_x(\Sigma, E, V) & \xrightarrow{\quad \zeta_k \quad} & \bar{T}^2_k(V, \lambda) \\
\Big\downarrow l_X & & \Big\uparrow X^* \\
\bar{\Pi}^2_{o,x}(\Sigma, V) & \xrightarrow{\quad \bar{\tau} \quad} & \bar{\Pi}^2_{o,x}(\Sigma, V)
\end{array}$$

comme $\bar{\tau} \circ l_X$ est un difféomorphisme, il reste à montrer que X^* est surjective et s'identifie à une application linéaire.

Soit H un repère semi-holonome du 2^e ordre en x. En vertu du lemme (I, 3, 1) on a un isomorphisme H_1 de $\bar{\Pi}^2_{o,x}(\Sigma, V)$ sur un sous-espace vectoriel M de R^{n^3}. On a aussi une carte H_2 de $\bar{T}^2_k(V, \lambda)$ sur R^{nk^2}. X^* définit donc $X^*_H : M \to R^{nk^2}$, il s'agit de voir que cette application est linéaire affine.

Puisque $\bar{L}^2_n$ opère transitivement sur $\bar{L}^2_{n,k}$, on peut s'arranger pour que le transformé par

H de $\Lambda_k(X,\lambda)$ soit $((\delta^j_i)_{\substack{i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,n}}, (a^j_{il})_{\substack{i,\,l=1,\dots,k\\ j=1,\dots,n}})$ où les a^j_{il} sont tous nuls ; il est commode de représenter cet élément par $(\delta, 0)$. L'identification de M et de $\overline{\Pi}^2_{o,x}$, de $\overline{T}^2_k(V,\lambda)$ et de R^{nk^2}, le choix particulier de H et enfin les règles de calcul des jets [10, b] impliquent que X^*_H est la restriction à M de la projection de R^{n^3} sur R^{nk^2} qui à $(a^i_{hj})_{h,i,j=1,\dots,n}$ fait correspondre $(a^i_{hj})_{\substack{i=1,\dots,n\\ h,j=1,\dots,k}}$.

Vérifions ce détail également pour la proposition associée, qui concerne des k-éléments de contact. Il s'agit exactement de démontrer que l'application $\Delta^* : \overline{\Pi}^2_{o,x}(\Sigma, V) \to \overline{T}^2_{k,c}(V,\lambda)$ qui à Z fait correspondre $Z\Delta$, où $\Delta \in \overline{T}^2_{k,c}(V,\lambda)$ s'identifie à une application linéaire affine. Soit Δ' une k-vitesse représentant Δ ; $\lambda' = \pi(\Delta')$ est alors un représentant de λ. On a l'application surjective $\varphi : \overline{T}^2_k(V,\lambda') \to \overline{T}^2_{k,c}(V,\lambda)$ et la factorisation :

$$
(1) \qquad
\begin{tikzcd}
\overline{\Pi}^2_{o,x}(\Sigma, V) \arrow[rr, "\Delta'^*"] \arrow[dr, "\Delta^*"'] & & \overline{T}^2_k(V,\lambda') \arrow[dl, "\varphi"] \\
& \overline{T}^2_{k,c}(V,\lambda) &
\end{tikzcd}
$$

Δ'^* est l'application qui à Z fait correspondre $Z\Delta'$; $\overline{T}^2_{k,c}(V,\lambda)$ est l'espace quotient de $\overline{T}^2_k(V,\lambda')$ pour la relation d'équivalence $\rho : \Lambda \sim \Lambda'$ s'il existe $A \in \overline{L}^2_{k,o}$ tel que $\Lambda' = \Lambda A$. Soit P le sous-espace vectoriel de R^{nk^2} formé des systèmes $(a^i_{hj})_{\substack{i=1,\dots,n\\ h,j=1,\dots,k}}$ tels que $i > k$ entraine $a^i_{hj} = 0$. Soit H un repère semi-holonome du 2e ordre en x, qui à Δ' fait correspondre $(\delta, o) \in \overline{L}^2_{n,k}$. On vérifie aisément par les règles du calcul des jets que si l'on identifie $\overline{T}^2_k(V,\lambda')$ à R^{nk^2} par H_2, alors ρ correspond à la relation d'équivalence définie par P, de sorte que $\varphi : \overline{T}^2_k(V,\lambda') \to \overline{T}^2_{k,c}(V,\lambda)$ s'identifie à l'application canonique $\psi : R^{nk^2} \to R^{nk^2}/P$. Le diagramme (1) s'identifie par H à :

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "r"] \arrow[d, "\Delta^*_H"'] & & R^{nk^2} \arrow[dll, "\psi"] \\
R^{nk^2}/P & &
\end{tikzcd}
$$

où r est la projection indiquée ci-dessus.

Il est donc évident que Δ^* s'identifie à une application linéaire Δ^*_H.

Il reste à voir que $X^* : \overline{\Pi}^2_{o,x}(\Sigma, V) \to \overline{T}^2_k(V,\lambda)$ est surjective. On fera une démonstration, qui se transpose aisément au cas des espaces d'éléments de contact. On pose

$\Delta = \Lambda_k(X, \lambda)$; pour $\Xi \in \overline{T}^{\,2}_k(V, \lambda)$ il s'agit de trouver $Z \in \overline{\Pi}^{\,2}_{o,x}(\Sigma, V)$ tel que $Z\Delta = \Xi$. Puisque $\Pi(\Sigma, V)$ opère transitivement sur $T_k(V)$, il existe au voisinage de (λ, λ) dans $T_k(V) \times T_k(V)$ une application L à valeurs dans $\Pi(\Sigma, V)$ telle que $L(\lambda, \lambda) = j_x$ et $L(\nu, \mu)\mu = \nu$. Soit $Y = \overline{L}[u(\Xi), u(\Delta)]$ où $u : \overline{T}^{\,2}_k(V) \to T_k(T_k(V))$ est l'injection canonique, définie dans (II,1). $Y \in T_k(\Pi(\Sigma, V), j_x)$; on constate $\overline{\alpha} Y = \overline{\beta} Y = \lambda$; donc $Y \in T_k(\Pi_o(\Sigma, V))$; comme Y se projette par la surjection de rang maximum $\overline{\xi} : \Pi_o(\Sigma, V) \to$ $\to V$ sur la vitesse régulière λ, il existe $Z \in J(\Pi_o(\Sigma, V), V)$ de source x, de but j_x tel que $Z\lambda = Y$ et $\overline{\xi} Z = j_x$; la dernière condition exprime que Z appartient à $\overline{\Pi}^{\,2}_o(\Sigma, V)$. Il reste à vérifier $Z\Delta = \Xi$. Or on a $Z\pi(\Delta) \bullet u(\Delta) = u(Z\Delta)$ où $\bullet$ est le prolongement de la composition ordinaire $\Pi(V) \underset{V}{\times} T_k(V) \to T_k(V)$ à $J(\Pi(V) \underset{V}{\times} T_k(V), R^k) \to J(T_k(V), R^k)$. Les relations $Z\lambda = \overline{L}(u(\Xi), u(\Delta))$, $\overline{L}(u(\Xi), u(\Delta)) \bullet u(\Delta) = u(\Xi)$ et le fait que u est injective entraînent donc $Z\Delta = \Xi$.

Il convient de modifier légèrement cette démonstration dans le cas des espaces d'éléments de contact. Il s'agit encore de trouver $Z \in \overline{\Pi}^{\,2}_{o,x}(\Sigma, V)$ tel que $Z\Delta = \Xi$ où Δ, Ξ sont des éléments donnés à priori de $\overline{T}^{\,2}_{k,c}(V, \lambda)$. On définit L comme ci-dessus, compte tenu de la condition $C_{k,c}$; pour (μ, ν) suffisamment voisin de (λ, λ) dans $T_{k,c}(V) \times$ $\times T_{k,c}(V)$ on a $L(\nu, \mu)\mu = \nu$, où $L(\nu, \mu) \in \Pi(\Sigma, V)$ et $L(\lambda, \lambda) = j_x$. Soient Δ', Ξ' des représentants de Δ, Ξ dans $\overline{T}^{\,2}_k(V)$ tels que $\pi(\Delta') = \pi(\Xi') = \lambda'$. On se sert du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} T_k(V) & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & T_{k,c}(V) \\ & {\scriptstyle \pi''} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \pi'''} & \\ & V & \end{array}$$

déjà considéré dans (II, 1). Soient $\Delta'' = \overline{\rho} u(\Delta')$ et $\Xi'' = \overline{\rho} u(\Xi')$. Δ'' et Ξ'' appartien-nent à $T_k(T_{k,c}(V), \lambda)$ et se projettent par $\overline{\pi}'''$ sur λ'. Soit $Y = \overline{L}(\Xi'', \Delta'')$; on constate comme ci-dessus que $Y \in T_k(\Pi(\Sigma, V))$ et qu'il existe $Z \in \overline{\Pi}^{\,2}_o(\Sigma, V)$ tel que $Z\lambda' = Y$. On a : $Z\lambda' \bullet \Delta'' = \Xi''$ où $\bullet$ est cette fois le prolongement de $\Pi(V) \underset{V}{\times} T_{k,c}(V) \to T_{k,c}(V)$ à $J(\Pi(V) \underset{V}{\times} T_{k,c}(V), R^k) \to J(T_{k,c}(V), R^k)$. Il s'agit de voir que cette égalité entraîne $Z\Delta = \Xi$. On a $Z\lambda' \bullet \Delta'' = Z\lambda' \bullet \overline{\rho} u(\Delta') = \overline{\rho}(Z\lambda' \bullet u(\Delta')) = \overline{\rho} u(Z\Delta')$. Il en résulte $\overline{\rho} u(Z\Delta') = \overline{\rho} u(\Xi')$. Le diagramme établi dans (II, 1) en vue d'expliciter l'injection de $\overline{T}^{\,2}_{k,c}(V)$ dans $T_{k,c}(T_{k,c}(V))$ montre que $Z\Delta'$ et Ξ' définissent le même élément de contact; on a donc $Z\Delta = \Xi$.

COROLLAIRE II, 3, 3.

a) Soient sur E un champ vertical de k-vitesses Λ du 2^e ordre invariant par Φ et Δ un champ de k-vitesses du 2^e ordre sur V. Si $\Pi(\Sigma, V)$ opère transitivement sur $T_k(V)$, il existe une connexion de k-vitesses X, telle que Δ soit le champ géodésique de X par rapport à Λ.

b) Pour tout k-champ vertical Λ du 2^e ordre sur E, invariant par Φ, et tout k-champ du 2^e ordre Δ sur V, il existe une connexion de k-éléments de contact X ayant Δ pour champ géodésique par rapport à Λ, pourvu que $\Pi(\Sigma, V)$ opère transitivement sur $T_{k,c}(V)$.

Dans chaque cas, X est obtenu en composant Δ avec une section de $\Lambda_k : Q_k(E) \to \overline{T}_k^2(V)$ ou de $\Lambda_{k,c} : Q_{k,c}(E) \to \overline{T}_{k,c}^2(V)$.

On établira enfin un résultat qui renforce à la fois les propositions (II, 2, 1) et (II, 3, 3); à savoir qu'il existe des connexions généralisées dont le champ géodésique et la torsion sont donnés à priori, pourvu qu'ils soient compatibles dans un sens à préciser.

L'application $\eta : {}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V) \to S(E)$ définie dans la proposition (I, 3, 1) induit les applications évidentes $\eta_k : {}'\overline{\Pi}_k^2(\Sigma, E, V) \to S_k(E)$ et $\eta_{k,c} : {}'\overline{\Pi}_{k,c}^2(\Sigma, E, V) \to S_{k,c}(E)$ qui à (Z, λ) font correspondre $(\eta(Z), \lambda)$. Une donnée Λ_k définit $S_k(E) \overset{\times}{\Lambda} \overline{T}_k^2(V)$, l'image de ${}'\overline{\Pi}_k^2(\Sigma, E, V)$ par $(\eta_k, \zeta_k) : {}'\overline{\Pi}_k^2(\Sigma, E, V) \to S_k(E) \times \overline{T}_k^2(V)$. Une donnée $\Lambda_{k,c}$ définit de même l'espace $S_{k,c}(E) \overset{\times}{\Lambda} \overline{T}_{k,c}^2(V)$.

PROPOSITION II, 3, 4.

$S_k(E) \overset{\times}{\Lambda} \overline{T}_k^2(V)$ est une variété et $(\eta_k, \zeta_k) : {}'\overline{\Pi}_k^2(\Sigma, E, V) \to S_k(E) \overset{\times}{\Lambda} \overline{T}_k^2(V)$ admet des sections.

L'action de $\Pi_o^2(\Sigma, V)$ sur ${}'\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$, (voir les considérations qui suivent la proposition (I, 3, 3)), induit une action de $\Pi_o^2(\Sigma, V)$ sur ${}'\overline{\Pi}_k^2(\Sigma, E, V) : (Z, \lambda)A = (ZA, \lambda)$. $\Pi_o^2(\Sigma, V)$ opère par composition à gauche sur $\overline{T}_k^2(V)$. Les relations d'équivalence associées sont compatibles avec ζ_k et leurs classes forment des feuilletages réguliers : les théorèmes généraux sur les variétés quotients [13] entraînent le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
{}'\overline{\Pi}_k^2(\Sigma, E, V) \arrow[r, "\zeta_k"] \arrow[d, "\eta_k"'] & \overline{T}_k^2(V) \arrow[d, "\varphi"] \\
S'_k(E) \arrow[r, "\zeta'_k"] & \overline{T}_k^2(V)/\Pi_o^2(\Sigma, V)
\end{tikzcd}$$

les flèches verticales sont de rang maximum surjectives. ζ_k est surjective de rang maximum, en vertu de la proposition (II, 3, 3) : ζ'_k l'est donc aussi. Il est évident que

$S_k(E) \overset{\times}{\Lambda} \overline{T}{}^2_k(V)$ est l'image réciproque par $(\zeta'_k, \varphi) : S'_k(E) \times \overline{T}{}^2_k(V) \to \overline{T}{}^2_k(V)/\Pi^2_o(\Sigma, V) \times \overline{T}{}^2_k(V)/\overline{\Pi}{}^2(\Sigma, V)$ de la diagonale ; (ζ'_k, φ) est surjective de rang maximum ; le lemme (I, 1, 1) entraîne donc que $S_k(E) \overset{\times}{\Lambda} \overline{T}{}^2_k(V)$ est une sous-variété.

Les propositions (I, 3, 1) et (II, 3, 2) impliquent sur $'\overline{\Pi}{}^2(\Sigma, E, V)$, $S_k(E)$ et sur $\overline{T}{}^2_k(V)$ des structures fibrées à groupoïde structural Ψ_k, telles que η_k, ζ_k soient covariantes. On a donc sur $S_k(E) \overset{\times}{\Lambda} \overline{T}{}^2_k(V)$ une structure fibrée à groupoïde structural Ψ_k ; $(\eta_k, \zeta_k) : {}'\overline{\Pi}{}^2_k(\Sigma, E, V) \to S_k(E) \overset{\times}{\Lambda} \overline{T}{}^2_k(V)$ est covariante par rapport à Ψ_k. Il suffit maintenant de vérifier que la restriction de Ψ_k à chaque fibre s'identifie à une application linéaire affine d'espaces numériques ; puisque (η_k, ζ_k) est surjective, co-variante, cette application est alors de rang maximum ; comme Ψ_k opère transitivement sur $'\overline{\Pi}{}^2_k(\Sigma, E, V)$, il s'agit alors d'une fibration ; cette fibration admet des sections puis-que l'image réciproque d'un point est difféomorphe à un espace numérique.

Au moyen d'un élément de connexion X en $x = \pi(\lambda)$ et d'un repère semi-holono-me du 2^e ordre H en x, on construit des diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
{}'\overline{\Pi}{}^2_x(\Sigma, E, V) \arrow[rrr, "\zeta_k"] \arrow[d, "l_X"] & & & \overline{T}{}^2_k(V, \lambda) \arrow[d, "H_2"] \\
\overline{\Pi}{}^2_o(\Sigma, V) \arrow[r, "H_1"] & M \arrow[r, "\tau"] & M \arrow[r, "X^*_H"'] & R^{nk^2}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{}'\overline{\Pi}{}^2_x(\Sigma, E, V) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "l_X"] & S'_x(E) \arrow[d, "l'_X"] \\
\overline{\Pi}{}^2_o(\Sigma, V) \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "H_1"] & \overline{\Pi}{}^2_o(\Sigma, V)/\Pi^2_o(\Sigma, V) \arrow[d, "H'_1"] \\
M \arrow[r, "\eta''"] & M/_N
\end{tikzcd}$$

les notations sont celles de la proposition (II, 3, 2). τ est la bijection correspondant par H à l'inversion des jets dans $\overline{\Pi}{}^2_o(\Sigma, V)$; au moyen du calcul des jets [10, b], on voit ai-sément que τ est linéaire. Voici comment on construit le deuxième diagramme : $\Pi^2_o(\Sigma, V)$ opère à droite sur $\overline{\Pi}{}^2_o(\Sigma, V)$, définit une variété quotient et une application canonique η' ; l_X se projette suivant η, η' en une bijection l'_X. Les règles du calcul des jets montrent comme dans la proposition (I, 3, 2) que la relation d'équivalence définie par l'action de $\Pi^2_o(\Sigma, V)$ sur $\overline{\Pi}{}^2_o(\Sigma, V)$ est transportée par H_1 en une relation compatible avec la structure vectorielle de M; d'où l'espace vectoriel quotient $M/_N$, l'application linéaire η'' et la bijection H'_1. Ces deux diagrammes montrent que :

$$(\eta_k, \zeta_k) : '\overline{\Pi}^2_{k,\lambda}(\Sigma, E, V) \to S_{k,\lambda}(E) \overset{\times}{\Lambda} \overline{T}^2_k(V, \lambda)$$

s'identifie par H à l'application linéaire affine :

$$(\eta'', X^*_H \circ \tau) : M \to M/_N \times R^{nk^2}$$

COROLLAIRE II,3,4.

a) Soit une donnée Λ_k et supposons la condition C_k réalisée; dans ce cas $(\theta_k, \Lambda_k) : Q_k(E) \to S_k(E) \overset{\times}{\Lambda} \overline{T}^2_k(V)$ admet des sections.

b) Soit une donnée $\Lambda_{k,c}$ et supposons la condition $C_{k,c}$ réalisée; alors $(\theta_{k,c}, \Lambda_{k,c}) : Q_{k,c}(E) \to S_{k,c}(E) \overset{\times}{\Lambda} \overline{T}^2_{k,c}(V)$ admet des sections.

En effet (θ_k, Λ_k) se factorise en deux applications admettant des sections : $\xi_k : Q_k(E) \to '\overline{\Pi}^2_k(\Sigma, E, V)$ et $(\eta_k, \zeta_k) : '\overline{\Pi}^2_k(\Sigma, E, V) \to S_k(E) \overset{\times}{\Lambda} \overline{T}^2_k(V)$. On a des cas particuliers intéressants de la proposition précédente.

PROPOSITION II,3,5.

a) Soient Λ_k (resp. $\Lambda_{k,c}$) holonome, Δ un champ holonome du 2^e ordre de k-vitesses (resp. de k-éléments de contact). On suppose $S'(E) = S(E)$ et que, pour λ quelconque, $\Pi^2_{o,\pi(\lambda)}(\Sigma, V)$ opère transitivement sur $T^2_k(V, \lambda)$ (resp. $T^2_{k,c}(V, \lambda)$); dans ce cas il existe une connexion holonome de k-vitesses (de k-éléments de contact) admettant Δ pour champ géodésique.

b) Soient une donnée Λ_1 (resp. $\Lambda_{1,c}$), Δ un champ du 2^e ordre de vecteurs (resp. de droites de contact) Γ une section de $t_1 : S_1(E) \to T(V)$ (resp. $t_{1,c} : S_{1,c}(E) \to T_c(V)$). Si pour tout λ, $\Pi^2_{o,\pi(\lambda)}(\Sigma, V)$ opère transitivement sur $T^2(V, \lambda)$ (resp. $T^2_c(V, \lambda)$) alors il existe une connexion de vecteurs (resp. de droites de contact) ayant Γ pour torsion et Δ pour champ géodésique.

a) Soit $\Gamma : V \to S(E)$ l'application qui à x associe l'élément de torsion nul en x. Soit χ une section de $(\theta_k, \Lambda_k) : Q_k(E) \to S_k(E) \overset{\times}{\Lambda} \overline{T}^2_k(V)$; χ existe en vertu du corollaire (II, 3, 4). Si on démontre que $(\Gamma \circ \pi, \Delta) : T_k(V) \to S_k(E) \times \overline{T}^2_k(V)$ prend ses valeurs dans $S_k(E) \underset{\Lambda}{\times} \overline{T}^2_k(V)$ alors $\chi \circ (\Gamma \circ \pi, \Delta) : T_k(V) \to Q_k(E)$ est une connexion généralisée holonome dont le champ géodésique est Δ. Soit donc $Z \in '\Pi^2_x(\Sigma, E, V)$ $x = \pi(\lambda)$, c'est-à-dire un élément holonome; Z existe puisque l'on a par hypothèse $S'(E) = S(E)$; puisque Δ_λ et $Z^{-1}\Lambda(\Sigma_x \lambda)$ sont holonomes, il existe par hypothèse $Y \in \Pi^2_{o,x}(\Sigma, V)$ tel que $Y\Delta_\lambda = Z^{-1}\Lambda(\Sigma_x \lambda)$. Il en résulte : $ZY \in '\overline{\Pi}^2_x(\Sigma, E, V)$ et

$\Delta_\lambda = \zeta_k(ZY)$, $\Gamma_{\pi(\lambda)} = \eta_k(ZY)$, ce qui montre bien : $(\Gamma \circ \pi(\lambda), \Delta_\lambda \in S_k(E) \underset{\Lambda}{\times} \overline{T}^2_k(V)$.

b) Il s'agit encore de vérifier que $(\Gamma, \Delta) : T(V) \to S_1(E) \times T^2(V)$ prend ses valeurs dans $S_1(E) \underset{\Lambda}{\times} T^2(V)$ et de la composer avec une section de $(\theta_1, \Lambda_1) : Q_1(E) \to S_1(E) \underset{\Lambda}{\times} T^2(V)$. On se sert essentiellement de : $\overline{T}^2(V) = T^2(V)$; en considérant, pour λ quelconque, $Z \in {}'\overline{\Pi}^2_{\pi(\lambda)}(\Sigma, E, V)$ tel que $\eta(Z) = \Gamma_\lambda$, on achève la démons--tration en calquant celle de a).

CHAPITRE TROIS

CONNEXIONS AFFINES ET PROJECTIVES.

Douglas interprétait géométriquement un champ du 2^{e} ordre au moyen d'une connexion affine, obtenue empiriquement [5]. L'objet principal de ce chapitre est d'assujettir les solutions de ce problème à certaines restrictions, soit par exemple qu'on exige que les connexions soient compatibles avec une G-structure. Il fallait d'abord reconstruire rigoureusement la théorie des connexions affines dans un cadre adapté, celui des chapitres précédents; quelques énoncés inédits d'Ehresmann jalonnaient déjà la voie à suivre. L'analyse critique de la notion de « connexion projective normale» [17] exigeait enfin un bref exposé sur les connexions projectives en vue de rappeler que la théorie géodésique d'une telle connexion se réduit à celle d'une connexion affine associée.

1. Connexions affines.

Soit Π_A la sous-variété de $\Pi(V) \times \mathcal{T}(V)$ formée des (X, λ) tels que $\beta(X) = \pi(\lambda)$. Π_A est munie d'une loi de composition partiellement définie : $(Y, \mu) \circ (X, \lambda)$ a un sens si $\beta(X) = \alpha(Y)$ et égale : $(YX, \mu + Y\lambda)$; la structure vectorielle naturelle sur chaque fibre de $\mathcal{T}(V)$ et la composition des jets justifient bien cette définition. Cette loi de composition munit Π_A d'une structure de groupoïde différentiable sur V. L'unité correspondant à x est $(j_x, \hat{x})$ où $\hat{x}$ désigne le vecteur nul en x. $\Pi(V)$ s'identifie à un sous-groupoïde de Π_A par le foncteur qui à X fait correspondre $(X, \widehat{\beta(X)})$. Un sous-groupoïde différentiable Ω de $\Pi(V)$ induit le sous-groupoïde Ω_A formé des (X, λ) où $X \in \Omega$. Π_A opère sur $\mathcal{T}(V)$ comme groupoïde d'opérateurs : $(X, \mu) \circ \lambda$ est défini si $\alpha(X) = \pi(\lambda)$ et égale $\mu + X\lambda$. L'action de Π_A sur $\mathcal{T}(V)$ prolonge l'action naturelle de $\Pi(V)$. $\mathcal{T}(V)$ s'identifie à un sous-groupoïde de Π_A par l'application qui à λ fait correspondre $(j_{\pi(\lambda)}, \lambda)$; il en résulte que Ω_A opère transitivement sur $\mathcal{T}(V)$ quel que soit le sous-groupoïde différentiable Ω de $\Pi(V)$. Ω est le sous-groupoïde d'isotropie de Ω_A correspondant à la section triviale de $\mathcal{T}(V)$ au-dessus de V.

Il importe de montrer que $\mathcal{T}(V)$ est soudé à V au sens de la définition posée dans (I, 2).

PROPOSITION III, 1, 1.

Il existe une soudure Σ de V à $\mathcal{T}(V)$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

$\beta(\Sigma_x) = \hat{x}$ pour tout $x \in V$; $\Sigma_y X = \overline{X^*\Sigma_x}$ pour tout $X \in \Pi(V)$, où $x = \alpha(X)$, $y = \beta(X)$ et où $X^* : \mathcal{T}_x(V) \to \mathcal{T}_y(V)$ est la bijection induite par X.

Vérifions d'abord la proposition sur R^n; pour $x \in R^n$ on pose $S_x = j_x(y \to j_o(t \to (y-x)t+x))$ dans $J_{\hat{x},x}(\mathcal{T}_x(R^n), R^n)$. On voit aisément que l'application $S : x \to S_x$ est une soudure de R^n à $\mathcal{T}(R^n)$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Soit $\mathcal{H}(V)$ l'espace des repères; on considère l'application $\varphi: \mathcal{H}(V) \to \Pi(\mathcal{T}(V)', V)$ qui à X fait correspondre $\overline{X^*S_o X^{-1}}$ où $X^* : \mathcal{T}_o(R^n) \to \mathcal{T}_x(R^n)$ est la bijection induite par X et où $x = \beta(X)$. Si on vérifie que $X, Y \in \mathcal{H}_x(V)$ entraîne $\varphi(X) = \varphi(Y)$ alors φ se projette en une application $\Sigma : V \to \Pi(\mathcal{T}(V)', V)$ car $\beta : \mathcal{H}(V) \to V$ est de rang maximum. Or cela revient à démontrer $\overline{Z^*S_o} = S_o Z$, où $Z = Y^{-1}X$, ce qui découle des propriétés de la soudure S. Il reste à voir que la soudure Σ satisfait à la deuxième condition de l'énoncé. Soient $X \in \Pi(V)$, Y un repère en $x = \alpha(X)$. On a par définition : $\overline{Y^*S_o} = \Sigma_x Y$ et $\overline{X^*Y^*S_o} = \Sigma_y XY$, où $y = \beta(X)$; il en résulte $\overline{X^*\Sigma_x} = \Sigma_y X$.

On peut alors poser conformément aux définitions (I,1,1) et (I,2,1) :

DEFINITION III, 1, 1.

Soit Ω un sous-groupoïde différentiable de $\Pi(V)$:

a) un élément de Ω-connexion linéaire est un élément de $Q(\Omega)$

b) un élément de Ω-connexion affine est un élément de $Q(\Omega_A)$ compatible avec la soudure Σ.

Soient $Q_A(\Omega)$ l'ensemble des éléments de Ω-connexion affine. Les définitions a) et b) coïncident au sens de la proposition suivante.

PROPOSITION III, 1, 2.

Soit $\chi : J(\Omega, V) \to J(\Omega_A, V)$ l'application qui à X fait correspondre $(X, \Sigma_{\alpha(X)})$. La restriction de χ à $Q(\Omega)$ est un difféomorphisme sur $Q_A(\Omega)$.

Il est évident que $(X, \Sigma_{\alpha(X)})$ appartient à $Q(\Omega_A)$; d'autre part, la condition de soudure et la définition de la composition dans Π_A entraînent qu'un élément (X, Z) de $Q(\Omega_A)$ appartient à $Q_A(\Omega)$ si et seulement si $Z = \Sigma_{\alpha(X)}$.

Désormais un élément de connexion affine désignera, suivant le contexte, soit un élément de $Q(\Omega)$, soit son correspondant dans $Q_A(\Omega)$, sauf lorsqu'il sera utile de faire la distinction formelle.

2. Torsion.

Il est commode d'écrire $(X, \lambda) \in \Pi_A$ sous la forme $\Gamma_\lambda \circ X$; $\circ$ est la loi de composition du groupoïde Π_A, X est identifié à $(X, \widehat{\beta(X)})$, Γ_λ est la translation dans $\mathcal{T}_y(V)$ qui amène $\hat{y} = \widehat{\beta(X)}$ en λ, c'est-à-dire l'élément (j_y, λ) de Π_A. L'élément de Ω-con-

-nexion affine correspondant à $X \in Q(\Omega)$ s'écrit alors $\overline{\Gamma}\Sigma_x \bullet X$, où $x = \alpha(X)$ et où $\bullet$ désigne le prolongement de la loi de composition dans Π_A à : $J(\Pi_A \underset{V}{\times} \Pi_A, V) \to J(\Pi_A, V)$.

La proposition (III, 1, 2) et la suivante permettront de caractériser très simple-ment la torsion d'un élément de connexion affine. Convenons d'écrire Q, Q_A, $\mathcal{T}$ au lieu de $Q(\Pi(V))$, $Q_A(\Pi(V))$, $\mathcal{T}(V)$. On déduit une application $\xi : Q_A \to \overline{\Pi}^2(\Sigma, \mathcal{T}, V)$ comme dans le cas général de la proposition (I, 3, 2).

PROPOSITION III, 2, 1.

L'application $\xi : Q_A \to \overline{\Pi}^2(\Sigma, \mathcal{T}, V)$ *est un difféomorphisme.*

Soit $\overline{\Gamma}\Sigma_x \bullet X$ un élément de connexion affine en x. On a par définition :

(1) $$\xi(\overline{\Gamma}\Sigma_x \bullet X) = \bar{j}(\overline{\Gamma}\Sigma_x \bullet X) \bullet j_x(\Sigma) = \overline{\bar{j}\,\overline{\Gamma}\Sigma_x} \bullet \bar{j}X \bullet j_x(\Sigma)$$

Le dernier terme est obtenu par prolongement de la composition ordinaire des jets: $\Pi(\mathcal{T}') \underset{\mathcal{T}}{\times} \Pi(\mathcal{T}') \underset{\mathcal{T}}{\times} \Pi(\mathcal{T}', V) \to \Pi(\mathcal{T}', V)$ à : $J(\Pi(\mathcal{T}') \underset{\mathcal{T}}{\times} \Pi(\mathcal{T}') \underset{\mathcal{T}}{\times} \Pi(\mathcal{T}', V), V) \to J(\Pi(\mathcal{T}', V), V)$. ξ est injective car $\xi(\overline{\Gamma}\Sigma_x \bullet X) = \xi(\overline{\Gamma}\Sigma_x \bullet Y)$ entraîne à cause de (1) : $\bar{j}X \bullet j_x(\Sigma) = \bar{j}Y \bullet j_x(\Sigma)$; en vertu des propriétés de la soudure Σ, énoncées dans la proposition (III, 1, 1) cette égalité se transforme en : $j_x(\hat{\Sigma}_x) \bullet X = j_x(\hat{\Sigma}_x) \bullet Y$, où $\bullet$ désigne le prolongement de la composition des jets $\Pi(\mathcal{T}', V) \underset{V}{\times} \Pi(V) \to \Pi(\mathcal{T}', V)$ à: $J(\Pi(\mathcal{T}', V) \underset{V}{\times} \Pi(V), V) \to J(\Pi(\mathcal{T}', V), V)$. Il en résulte immédiatement $X = Y$. Il reste à voir que ξ est surjective. Remarquons d'abord que le groupoïde $\Pi(\Sigma, V) = \varepsilon(\Psi)$ défi-ni dans la proposition (I, 2, 2) est exactement Ω, dans le cas où $E = \mathcal{T}$, $\Phi = \Omega_A$, Ω étant un sous-groupoïde différentiable de $\Pi(V)$. Ceci découle des propriétés de la sou-dure Σ, et du fait que Ω est le groupoïde d'isotropie de Ω_A par rapport à la section triviale de $\mathcal{T}$ au-dessus de V. Il en résulte : $\overline{\Pi}^2_o(\Sigma, V) = \overline{\Pi}^2_o(V)$ dans le cas où $\Phi = \Pi_A$. Dans la proposition (I, 3, 3) on a établi une correspondance bijective entre $\overline{\Pi}^2(\Sigma, E, V)$ et $\overline{\Pi}^2_o(V)$ qui applique $\xi(Q(E))$ sur $\overline{\Pi}^2_o(\Sigma, V)$; puisque dans le cas présent : $\overline{\Pi}^2_o(\Sigma, V) = \overline{\Pi}^2_o(V)$, il en résulte : $\xi(Q_A) = \overline{\Pi}^2(\Sigma, \mathcal{T}, V)$. La bijection ξ est un difféomorphisme car elle est de rang maximum, comme on l'a vu dans la proposition (I, 3, 2).

La proposition (III, 1, 2) et la précédente définissent un difféomorphisme $\xi' = \xi \circ \chi$ de Q sur $\overline{\Pi}^2(\Sigma, \mathcal{T}, V)$. A l'action de $\Pi^2_o(V)$ sur $\overline{\Pi}^2(\Sigma, \mathcal{T}, V)$ définie dans (I, 3) correspond par ξ' l'action suivante de $\Pi^2_o(V)$ sur Q : si $Z \in \Pi^2_o(V)$, $X \in Q$ et $\alpha(Z) = q(X)$, alors le transformé de X par Z est le composé XZ dans la catégorie diffé-rentiable $\tilde{J}^2(V)$ des jets non holonomes du 2^e ordre [10, a]; en effet Q est stable pour cette composition avec un élément de $\Pi^2_o(V)$. Soit alors $S = Q/\Pi^2_o(V)$; on a une application canonique $\theta : Q \to S$ et un diagramme obtenu avec les notations de (I, 3):

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
Q \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\theta"'] & Q_A \arrow[r, "\xi"] & \overline{\Pi}^2(\Sigma, \mathcal{T}, V) \arrow[d, "\eta"] \\
S \arrow[rr, "\xi''"'] & & S(\mathcal{T})
\end{tikzcd}$$

ξ'' est la bijection déduite de ξ' par projection suivant θ et η. Compte tenu de la définition (I,3,3), de l'identification de Q et Q_A au moyen de χ, il est légitime d'appeler $\theta(X)$ la torsion de l'élément de connexion affine défini par $X \in Q$. Comme ξ est surjective, la proposition (I,3,4) entraîne trivialement :

PROPOSITION III,2,2.

Il existe des connexions affines à torsion donnée.

Soit Ω un sous-groupoïde différentiable de $\Pi(V)$. Ω^2_o opère sur $Q(\Omega)$, à l'instar de $\Pi^2_o(V)$ sur Q; on a une variété quotient $S(\Omega) = Q(\Omega)/_{\Omega^2_o}$ et une application canonique $\theta : Q(\Omega) \to S(\Omega)$. L'injection $i : \Omega \to \Pi(V)$ induit l'injection $\bar{i} : Q(\Omega) \to Q$, laquelle se projette en une injection $\bar{i}' : S(\Omega) \to S$. Le diagramme précédent est prolongé en :

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
Q_A(\Omega) \arrow[r] & Q_A \arrow[dr, "\xi"] & \\
Q(\Omega) \arrow[u, "\chi"] \arrow[r, "\bar{i}"] \arrow[d, "\theta"] & Q \arrow[u, "\chi"] \arrow[r, "\xi'"'] \arrow[d, "\theta"] & \overline{\Pi}^2(\Sigma, \mathcal{T}, V) \arrow[d, "\eta"] \\
S(\Omega) \arrow[r, "\bar{i}'"] & S \arrow[r, "\xi''"] & S(\mathcal{T})
\end{tikzcd}$$

D'après la définition (I,3,3) il est alors légitime d'appeler $\theta(X)$ la torsion de l'élément de Ω-connexion affine défini par $X \in Q(\Omega)$. Compte tenu du corollaire (I,3,4) et de $\Pi(\Sigma, V) = \Omega$ dans le cas où $\Phi = \Omega_A$, $E = \mathcal{T}$, la proposition (III,2,2) peut alors être trivialement précisée par la suivante.

PROPOSITION III,2,3.

Soit Ω un sous-groupoïde différentiable de $\Pi(V)$.

a) Si Ω^2_o est réduit à l'ensemble de ses unités, alors une Ω-connexion affine est déterminée par sa torsion.

b) Si pour tout $X \in \overline{\Pi}^2_o(V)$ il existe $Z \in \Pi^2_o(V)$ tel que XZ appartienne à $\overline{\Omega}^2_o$ alors il existe des Ω-connexions affines dont la torsion soit donnée à priori.

3. Champs géodésiques.

Il importe d'indiquer des champs verticaux du 2^e ordre sur $\mathcal{T}$, invariants par Π_A, afin d'obtenir la notion de champ géodésique d'une connexion affine généralisée. Il s'agira pour chaque k, $1 \leq k < n$, d'un champ de k-vitesses du 2^e ordre induisant sur chaque espace affine tangent le feuilletage du 2^e ordre [6] formé par les sous-variétés linéaires affines de dimension k. Toutefois, il est nécessaire d'écrire explicitement les applications définissant ces champs verticaux. Soit $\pi' : T_k(\mathcal{T}') \to \mathcal{T}$ la projection naturelle; pour tout $\lambda \in T_k(\mathcal{T}')$ tel que $\pi'(\lambda) = \hat{x}$, où $x \in V$, le jet $\overline{j\Gamma}\lambda \bullet j_o(\hat{\lambda}) \in T_k(T_k(\mathcal{T}_x))$ est bien défini; $j : \Pi_A \to \Pi(\mathcal{T}')$ fait correspondre $j_{\hat{y}}(f)$ à f, y étant la source de f; $\bullet$ désigne le prolongement de la composition ordinaire : $\Pi(\mathcal{T}') \underset{\mathcal{T}}{\times} T_k(\mathcal{T}') \to T_k(\mathcal{T}')$ à : $J(\Pi(\mathcal{T}') \underset{\mathcal{T}}{\times} T_k(\mathcal{T}'), R^k) \to J(T_k(\mathcal{T}'), R^k)$; $\overline{j\Gamma}\lambda \bullet j_o(\hat{\lambda})$ appartient à $u(\overline{T}_k^2(\mathcal{T}'))$, où $u : \overline{T}_k^2(V) \to T_k(T_k(V))$ est l'injection naturelle définie dans (II, 1). On désignera souvent un élément de $\overline{L}_{n,p}^2$ par un couple (a', a''); a' représente le système $(a_i^j)_{\substack{i=1,..p\\ j=1,..n}}$ des composantes canoniques premières; a'' représente le système $(a_{ik}^j)_{\substack{i,k=1,..p\\ j=1,..n}}$ des composantes canoniques secondes [10]. On notera $(a, 0)$ le jet dont les composantes secondes sont nulles.

PROPOSITION III, 3, 1.

A chaque k, $1 \leq k < n$, correspond un champ vertical de k-vitesses du 2^e ordre $\Lambda_k : T_k(\mathcal{T}') \to \overline{T}_k^2(\mathcal{T}')$ invariant par Π_A et satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Si $\pi'(\lambda) = \hat{x}$, on a $u(\Lambda_k(\lambda)) = \overline{j\Gamma}\lambda \bullet j_o(\hat{\lambda})$,

b) Λ_k est holonome,

c) Pour tout $\lambda \in T_k(\mathcal{T}')$ et $a \in L_k$ on a : $\Lambda_k(\lambda a) = \Lambda_k(\lambda)(a, 0)$.

a) Soit $\hat{T}_k(\mathcal{T}')$ la sous-variété de $T_k(\mathcal{T}')$ formée des λ tels que $\pi'(\lambda)$ soit de la forme $\hat{x}$. Un champ de k-vitesses vertical du 2^e ordre sur $\mathcal{T}$ est une section de $\pi'' : \overline{T}_k^2(\mathcal{T}') \to T_k(\mathcal{T}')$. Puisque $\Pi(V)$ opère transitivement sur $\hat{T}_k(\mathcal{T}')$, toute section de π'' au-dessus de $\hat{T}_k(\mathcal{T}')$, invariante par $\Pi(V)$ se prolonge en un champ de k-vitesses vertical du 2^e ordre, invariant par Π_A. Il s'agit donc de vérifier que l'application de $\hat{T}_k(\mathcal{T}')$ dans $\overline{T}_k^2(\mathcal{T}')$ qui à λ fait correspondre $u^{-1}(\overline{j\Gamma}\lambda \bullet j_o(\hat{\lambda}))$ est invariante par $\Pi(V)$. Soient $X \in \Pi(V)$, $x = \alpha(X)$, $\lambda \in T_k(\mathcal{T}_x, \hat{x})$; il faut démontrer :

(1) $\quad \overline{X}(u^{-1}(\overline{j\Gamma}\lambda \bullet j_o(\hat{\lambda}))) = u^{-1}(\overline{j\Gamma X}\lambda \bullet j_o(\widehat{\overline{X}\lambda}))$; $\overline{X}$ désigne, suivant le contexte, un jet du 1^{er} ou du 2^e ordre de $X : \mathcal{T}_{\alpha(X)} \to \mathcal{T}_{\beta(X)}$. On a :

(2) $\quad X(\Gamma_{z'}(z)) = \Gamma_{Xz'}(Xz)$; où $z, z' \in \mathcal{T}$ et $\pi(z) = \pi(z') = \alpha(X)$. Soit A_t le jet en t de la translation dans R^k amenant t en 0; soit $\lambda = j_o(t \to z(t))$ une repré-

-sentation de λ. On en dérive des représentations pour chaque membre de (1) :

(3) $\overline{X}(u^{-1}(\overline{j\Gamma}\lambda \bullet j_o(\hat{\lambda})))=j_o(t \to \overline{X\Gamma_{z(t)}}\lambda A_t)=j_o(t \to j_t(t' \to X(\Gamma_{z(t)}z(t'-t)))$.

(4) $u^{-1}(\overline{j\Gamma X}\lambda \bullet j_o(\widehat{\overline{X}\lambda}))=j_o(t \to \overline{\Gamma_{Xz(t)}X}\lambda A_t)=j_o(t \to j_t(t' \to \Gamma_{Xz(t)}(Xz(t'-t))))$.

On voit que (1) est la conséquence de (2) en comparant (3) et (4).

b) Un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{T}_x$ sur l'espace vectoriel R^n trans-forme $\Lambda_k : T_{k,\hat{x}}(\mathcal{T}_x) \to \overline{T}^2_{k,\hat{x}}(\mathcal{T}_k)$ en l'application $\Lambda^*_k : L_{n,k} \to \overline{L}^2_{n,k}$ qui à λ fait correspondre $(\lambda, 0)$. Ceci signifie que Λ_k est holonome car le sous-espace $L^2_{n,k}$ de $\overline{L}^2_{n,k}$ est caractérisé par le fait que ses composantes canoniques secondes sont symétri-ques par rapport aux indices inférieurs [10, b].

c) Il découle trivialement de b) que l'on a : $\Lambda_k(\lambda a) = \Lambda_k(\lambda)(a, 0)$ lorsque $\lambda \in \hat{T}(\mathcal{T}')$; par translation l'égalité vaut pour tout λ.

Il résulte de c) que Λ_k est compatible avec les relations d'équivalence définis-sant les quotients $T_{k,c}(\mathcal{T}'), T^2_{k,c}(\mathcal{T}')$ de $T_k(\mathcal{T}'), T^2_k(\mathcal{T}')$; Λ_k induit par passage au quotient $\Lambda_{k,c} : T_{k,c}(\mathcal{T}') \to T^2_{k,c}(\mathcal{T}')$, c'est-à-dire un k-champ vertical du 2^e ordre holonome et invariant par Π_A. Quand il sera question d'éléments géodésiques d'une connexion affine ce sera en référence aux données $\Lambda_k, \Lambda_{k,c}$ qu'on vient de construire. Soient $X \in Q$, $\lambda \in T_k(V)$, $q(X) = \pi(\lambda)$; on a le jet bien défini : $\overline{\tau X}\lambda \bullet j_o(\hat{\lambda}) \in T_k(T_k(V))$, où τ est l'inversion dans $\Pi(V)$ et $\bullet$ le prolongement de la composition ordinaire : $\Pi(V) \underset{V}{\times} T_k(V) \to T_k(V)$ à : $J(\Pi(V) \underset{V}{\times} T_k(V), R^k) \to J(T_k(V), R^k)$; on constate que ce jet appartient d'ailleurs à la sous-variété $u(\overline{T}^2_k(V))$. Conformément à la convention découlant de la proposition (III, 1, 2) on identifie Q_A et Q, $Q_{A,k}$ et la sous-variété Q_k de $Q \times T_k(V)$ formée des (X, λ) tels que $q(X) = \pi(\lambda)$; on identifie de même $Q_{A,k,c}$ avec une sous-variété $Q_{k,c}$ de $Q \times T_{k,c}(V)$. La définition (II, 3, 2) induit pour chaque k des applications $\Lambda_k : Q_k \to \overline{T}^2_k(V)$ et $\Lambda_{k,c} : Q_{k,c} \to \overline{T}^2_{k,c}(V)$.

PROPOSITION III, 3, 2.

a) $\Lambda_k : Q_k \to \overline{T}^2_k(V)$ *fait correspondre* $u^{-1}(\overline{\tau X}\lambda \bullet j_o(\hat{\lambda}))$ *à* (X, λ).

b) $\Lambda_k(X, \lambda a) = \Lambda_k(X, \lambda)(a, 0)$ *pour tout* $(X, \lambda) \in Q_k$ *et tout* $a \in L_k$.

c) On a :

$$\begin{array}{ccc} Q_k & \xrightarrow{\Lambda_k} & \overline{T}^2_k(V) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ Q_{k,c} & \xrightarrow{\Lambda_{k,c}} & \overline{T}^2_{k,c}(V) \end{array}$$

où φ *est formée de l'identité sur* Q *et de l'application canonique de* $T_k(V)$ *sur son* *quotient* $T_{k,c}(V)$; ψ *est l'application canonique de* $\overline{T}{}^2_k(V)$ *sur son quotient.*

a) Compte tenu de la définition (II, 3, 2) et de la proposition (III, 3, 1), il s'agit de vérifier :

$$(1)\qquad \xi(X)(u^{-1}(\bar{\tau}X\lambda\bullet j_o(\hat{\lambda}))) = u^{-1}(\overline{j\Gamma}\Sigma_x\lambda\bullet j_o(\widehat{\Sigma_x\lambda}))$$

où $x=\pi(\lambda)=q(X)$. On a obtenu dans la proposition (III, 2, 1) :

$$(2)\qquad \xi(X) = \overline{j\Gamma}\Sigma_x \bullet \bar{j}X \bullet j_x(\Sigma)$$

En vertu d'une identité qui a déjà servi dans la proposition (II, 3, 3), on a :

$$(3)\qquad \xi(X)(u^{-1}(\bar{\tau}X\lambda)\bullet j_o(\hat{\lambda})) = u^{-1}(\xi(X)\lambda\bullet(\bar{\tau}X\lambda\bullet j_o(\hat{\lambda})))$$

où le premier $\bullet$ du second membre désigne le prolongement de la composition ordinaire $\Pi(\mathcal{T}',V)\underset{V}{\times} T_k(V)\to T_k(\mathcal{T}')$ à $J(\Pi(\mathcal{T}',V)\underset{V}{\times} T_k(V),R^k)\to J(T_k(\mathcal{T}'),R^k)$. (2) entraîne alors :

$$(4)\qquad \xi(X)\lambda = \overline{j\Gamma}\Sigma_x\lambda\bullet\bar{j}X\lambda\bullet\bar{\Sigma}\lambda$$

A cause de (3) et (4), la démonstration de (1) revient donc à vérifier :

$$(5)\qquad \bar{j}X\lambda\bullet\bar{\Sigma}\lambda\bullet\bar{\tau}X\lambda\bullet j_o(\hat{\lambda}) = j_o(\widehat{\Sigma_x\lambda})$$

Or les propriétés de la soudure Σ, énoncées dans la proposition (III, 1, 1) entraînent : $\bar{j}X\bullet j_x(\Sigma)\bullet\bar{\tau}X = j_x(\hat{\Sigma}_x)$; et ceci implique (5).

b) Désignons momentanément par Λ'_k et $\Lambda'_{k,c}$ les applications de la proposition (III, 3, 1) définissant les champs verticaux du 2^e ordre dans $\mathcal{T}$. On a par définition : $\Lambda'_k(\Sigma_x\lambda)=\xi(X)\Lambda_k(X,\lambda)$ pour $(X,\lambda)\in Q_k$ et $x=q(X)=\pi(\lambda)$. La relation $\Lambda'_k(\Sigma_x\lambda a) = \Lambda'_k(\Sigma_x\lambda)(a,0)$ démontrée dans la proposition (III, 3, 1, c) entraîne par composition avec $\xi(X)^{-1}$: $\Lambda_k(X,\lambda a)=\Lambda_k(X,\lambda)(a,0)$.

c) L'élément $X\in Q$ détermine le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
T_k(V,x) \arrow[r, "\tilde{\Sigma}_x"] \arrow[d] & T_k(\mathcal{T}_x,\hat{x}) \arrow[r, "\Lambda'_k"] \arrow[d] & T^2_k(\mathcal{T}_x,\hat{x}) \arrow[r, "\widetilde{\xi(X)}^{-1}"] \arrow[d] & \overline{T}{}^2_k(V,x) \arrow[d] \\
T_{k,c}(V,x) \arrow[r, "\tilde{\Sigma}_x"] & T_{k,c}(\mathcal{T}_x,\hat{x}) \arrow[r, "\Lambda'_{k,c}"] & T^2_{k,c}(\mathcal{T}_x,\hat{x}) \arrow[r, "\widetilde{\xi(X)}^{-1}"] & \overline{T}{}^2_{k,c}(V,x)
\end{tikzcd}$$

où $x=q(X)$ et $\tilde{\Sigma}_x$, $\widetilde{\xi(X)}^{-1}$ sont les applications obtenues par la composition à gauche avec Σ_x, $\xi(X)^{-1}$; les flèches verticales sont des applications canoniques sur des va--riétés quotients. La troisième partie de l'énoncé est alors démontrée car on a par hypo--thèse :

$\Lambda_k(X, \lambda) = \xi(X)^{-1}\Lambda'_k(\Sigma_x\lambda)$, pour $\lambda \in T_k(V, x)$ et $\Lambda_{k,c}(X, \lambda) = \xi(X)^{-1}\Lambda'_{k,c}(\Sigma_x\lambda)$, pour $\lambda \in T_{k,c}(V, x)$.

On sait depuis longtemps qu'il existe des connexions affines généralisées, dont le champ géodésique est donné à priori [5]. C'est un cas particulier du corollaire (II, 3, 3) appliqué aux connexions affines :

PROPOSITION III, 3, 3.

Soient Ω un sous-groupoïde différentiable de $\Pi(V)$, Ξ un champ du 2^e ordre de k-vitesses (de k-éléments de contact) sur V. Si Ω opère transitivement sur $T_k(V)$ (sur $T_{k,c}(V)$), il existe une Ω-connexion de k-éléments (de k-éléments de contact) dont le champ géodésique soit Ξ.

C'est une conséquence immédiate du corollaire (II, 3, 3); parce que l'on a $\Pi(\Sigma, V) = \Omega$ dans le cas où $E = \mathfrak{T}$, $\Phi = \Omega_A$, comme cela a été remarqué en démontrant la proposition (III, 2, 1). Cet énoncé peut être précisé grâce à la proposition (II, 3, 5) :

PROPOSITION III, 3, 4.

Soit Ω un sous-groupoïde différentiable de $\Pi(V)$.
a) Soit Ξ un champ holonome du 2^e ordre de k-vitesses (de k-éléments de contact) sur V. Supposons que Ω opère transitivement sur $T_k(V)$ (sur $T_{k,c}(V)$), que pour tout λ de $T_k(V)$ (de $T_{k,c}(V)$), $\Omega^2_{o,\pi(\lambda)}$ opère transitivement sur $T^2_k(V, \lambda)$ (sur $T^2_{k,c}(V, \lambda)$); on suppose enfin que la restriction à $\overline{\Omega}^2_o$ de l'application canonique $\overline{\Pi}^2_o(V) \to \overline{\Pi}^2_o(V)/\Pi^2_o(V)$ est surjective : il existe alors une Ω-connexion affine holonome de k-vitesses (de k-éléments de contact) dont le champ géodésique est Ξ.
b) Soient Ξ un champ de vecteurs (de droites de contact) du 2^e ordre, Θ une section de $S_1(\Omega)$ au-dessus de $T(V)$ (de $S_{1,c}(\Omega)$ au-dessus de $T_c(V)$). Supposons réalisées les deux premières conditions de a). Il existe alors une Ω-connexion affine de vecteurs (de droites de contact) dont la torsion est Θ et le champ géodésique Ξ.

Ces énoncés sont la conséquence immédiate de la proposition (II, 3, 5); en effet les champs verticaux sur $\mathfrak{T}$ sont holonomes d'après la proposition (III, 3, 1); d'autre part l'on a $\Omega = \Pi(\Sigma, V)$ dans le cas présent où $E = \mathfrak{T}$, $\Phi = \Omega_A$.

COROLLAIRE III, 3, 4.

a) Soit Ξ un champ holonome de k-vitesses (de k-éléments de contact) sur V; il existe une connexion affine holonome de k-vitesses (de k-éléments de contact) dont le champ géodésique est Ξ.

b) Soient Ξ un champ de vecteurs (de droites de contact) du 2^e ordre sur V, Θ un champ généralisé d'éléments de torsion. Il existe des connexions affinesde vecteurs (de droites de contact) dont la torsion est Θ et le champ géodésique Ξ.

a) La première et la troisième hypothèse de la proposition (III, 3, 4, a) sont satis--faites trivialement. Il s'agit de vérifier la deuxième; c'est-à-dire que $L^2_{n,o}$ opère transi--tivement sur $L^2_{n,k}(\lambda)$, où $\lambda \in L^2_{n,k}$ est fixe; ou encore que l'application $\tilde{\Lambda} : L^2_{n,o} \to L^2_{n,k}(\lambda)$ qui à X fait correspondre $X\Lambda$ est surjective avec $\Lambda \in L^2_{n,k}(\lambda)$; on peut supposer $\lambda = (\delta^j_i)_{\substack{i=1\dots k\\ j=1\dots n}}$ et $\Lambda = (\lambda, 0)$. Soient M le sous-espace vectoriel de $R^{n^3} = \{x^i_{jl}\}_{i,j,l=1,\dots n}$ formé des systèmes symétriques par rapport aux indices inférieurs, N le sous-espace analogue de $R^{nk^2} = \{x^i_{hj}\}_{\substack{i=1,\dots n\\ h,j=1,\dots k}}$. Au moyen du raisonnement du lemme (I, 3, 1) on voit que $\tilde{\Lambda} : L^2_{n,o} \to L^2_{n,k}(\lambda)$ s'identifie à la projection de M sur N qui à $\{x^i_{hj}\}_{i,h,j=1,\dots n}$ fait correspondre $\{x^i_{hj}\}_{\substack{i=1,n\\ h,j=1,\dots k}}$. Si $\lambda \in T_{k,c}(V,x)$, il est vrai a fortiori que $\Pi^2_{o,x}(V)$ opère transitivement sur $T^2_{k,c}(V,\lambda)$; en effet si $\lambda' \in T_k(V)$ est un représentant de λ, on a une application surjective : $T^2_k(V,\lambda') \to T^2_{k,c}(V,\lambda)$ compatible avec les opérateurs de $\Pi^2_{o,x}(V)$.

b) Compte tenu de a), il suffit de vérifier que tout champ généralisé d'éléments de torsion prend ses valeurs dans $S(\Pi(V))$; or on a vu dans la proposition (III, 2, 2) : $S(\Pi(V)) = S(\mathfrak{T})$.

4. Connexions compatibles avec une G-structure.

Soit G un sous-groupe fermé de $\overline{L}^r_n$. G opère sur $\overline{\mathcal{H}}^r(V)$ par composition des jets; les classes de la relation d'équivalence ainsi définie forment un feuilletage régulier; on a donc une variété quotient $\overline{\mathcal{H}}^r(V)/_G$ et une application canonique de rang maximum $\eta : \overline{\mathcal{H}}^r(V) \to \overline{\mathcal{H}}^r(V)/_G$ [13]. Convenons d'écrire désormais $\overline{\Pi}^r, \overline{\mathcal{H}}^r$, etc au lieu de $\overline{\Pi}^r(V)$, $\overline{\mathcal{H}}^r(V)$, etc. $\pi : \overline{\mathcal{H}}^r \to V$ induit une applicatiom de rang maximum de $\overline{\mathcal{H}}^r/_G$ sur V, qui se--ra encore désignée par π, s'il n'y a pas risque de confusion.

DEFINITION III, 4, 1.

Une G-structure d'ordre r est une section de $\pi : \overline{\mathcal{H}}^r/_G \to V$ [8].

Le lemme suivant permet d'énoncer rigoureusement quelques préliminaires.

LEMME III, 4, 1.

Soient R la relation d'équivalence définie sur V par un feuilletage régulier, Wune *sous-variété propre de* V, *saturée par* R. *L'application* $i : W/_R \to V/_R$ *induite par l'in--jection canonique de* W *dans* V *est un difféomorphisme sur une variété propre de* $V/_R$.

W est fermée ou ouverte; donc i est un homéomorphisme sur un sous-espace de $V/_R$ [3, a]; i est régulière en vertu des remarques générales sur les variétés quotients [13].

$\overline{\Pi}^r$ opère comme groupoïde d'opérateurs sur $\mathcal{H}^r$; voyons que ce groupoïde opère aussi sur $\mathcal{H}^r/_G$. Soient $\overline{\Pi}^r \underset{V}{\times} \mathcal{H}^r/_G$ la sous-variété de $\overline{\Pi}^r \times \mathcal{H}^r/_G$ formée des (X, Y) tels que $\alpha(X) = \pi(Y)$, I l'identité sur $\overline{\Pi}^r$. L'application $\varphi : \overline{\Pi}^r \underset{V}{\times} \mathcal{H}^r \to \mathcal{H}^r \times \mathcal{H}^r$ qui à (X, Y) fait correspondre (Y, XY) induit l'application surjective de rang maximum φ' : $: \overline{\Pi}^r \underset{V}{\times} \mathcal{H}^r/_{I \times G} \to \mathcal{H}^r \times \mathcal{H}^r/_{G \times G}$. $\mathcal{H}^r \times \mathcal{H}^r/_{G \times G}$ est difféomorphe à $\mathcal{H}^r/_G \times \mathcal{H}^r/_G$ et $\overline{\Pi}^r \times \mathcal{H}^r/_{I \times G}$ à $\overline{\Pi}^r \times \mathcal{H}^r/_G$. En vertu du lemme (III, 4, 1), $\overline{\Pi}^r \underset{V}{\times} \mathcal{H}^r/_G$ correspond par ce difféomorphisme à une sous-variété de $\overline{\Pi}^r \times \mathcal{H}^r/_{I \times G}$ difféomorphe à $\overline{\Pi}^r \underset{V}{\times} \mathcal{H}^r/_{I \times G}$. Il en résulte que φ' s'identifie à une application surjective de rang maximum φ'' : $: \overline{\Pi}^r \underset{V}{\times} \mathcal{H}^r/_G \to \mathcal{H}^r/_G \times \mathcal{H}^r/_G$ dont la deuxième composante fait de $\overline{\Pi}^r$ un groupoïde d'opérateurs transitif sur $\mathcal{H}^r/_G$. Le groupoïde d'isotropie Π_G par rapport à une section $\sigma : V \to \mathcal{H}^r/_G$ est un sous-groupoide différentiable de $\overline{\Pi}^r$, comme on l'a vu incidemment dans le contexte plus général de (I, 2). On appellera Π_G le groupoïde distingué de la G-structure. Π_G opère transitivement sur la variété des repères distingués, c'est-à-dire l'image réciproque $\mathcal{H}_G$ de $\sigma(V)$ par $\eta : \mathcal{H}^r \to \mathcal{H}^r/_G$. [8].

Comme il ne s'agit pas de faire ici une théorie autonome des G-structures, on suppose désormais que G est un sous-groupe fermé de Lie; les remarques qui suivent ont toutefois une portée plus générale. G définit un sous-groupoïde différentiable trivial Π^*_G de $\Pi(R^n)$ à groupe structural G; $G' = \overline{L}^2_n \cap J(\Pi^*_G, R^n)$ est un sous-groupe fermé de $\overline{L}^2_n$. Soit dans $J(\mathcal{H}, V)$ la sous-variété $\tilde{J}(\mathcal{H}, V)$ des X tels que $\overline{\pi} X = j_{\alpha(X)}$; $\tilde{J}(\mathcal{H}/_G, V)$ désigne la sous-variété analogue de $J(\mathcal{H}/_G, V)$. On a la bijection $v : J(\mathcal{H}, V) \to \overline{\mathcal{H}}^2$ qui à X fait correspondre $X \beta(X) \bullet A$; $A \in J^2(R^n)$ est défini par $A = j_o(t \to j_t(t' \to \to (t' - t)))$; $\bullet$ désigne le prolongement de la composition ordinaire des jets $(\Pi(V, R^n) \underset{R^n}{\times} \Pi(R^n) \to \Pi(V, R^n)$ à : $J(\Pi(V, R^n) \underset{R^n}{\times} \Pi(R^n), R^n) \to J(\Pi(V, R^n), R^n)$. L'application $\eta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}/_G$ se prolonge en $\overline{\eta} : \tilde{J}(\mathcal{H}, V) \to \tilde{J}(\mathcal{H}/_G, V)$; d'autre part on a une applica--tion canonique $\eta' : \overline{\mathcal{H}}^2 \to \overline{\mathcal{H}}^2/_{G'}$; v est compatible avec $\overline{\eta}$ et η' et se projette en un difféomorphisme $v' : \tilde{J}(\mathcal{H}/_G, V) \to \overline{\mathcal{H}}^2/_{G'}$. $\overline{\Pi}^2_o$ opère sur $\overline{\mathcal{H}}^2$ et commute avec G'; Π^2_o opère donc sur $\overline{\mathcal{H}}^2/_{G'}$ et définit la variété $\overline{P}_G = (\overline{H}^2/_{G'})/_{\Pi^2_o}$ ainsi que l'application canonique $\zeta : \overline{\mathcal{H}}^2/_{G'} \to \overline{P}_G$. L'image de $\mathcal{H}^2$ par $\zeta \circ \eta'$ est une sous-variété P_G de $\overline{P}_G$. Une G-structure $\sigma : V \to \mathcal{H}/_G$ définit la G'-structure du 2^e ordre $\sigma' : V \to \overline{\mathcal{H}}^2/_G$ qui à x fait correspondre $v'(j_x(\sigma))$; σ' est le prolongement de σ [8]. L'élément $\zeta(\sigma'(x)) \in \overline{P}_G$ peut être appelé le tenseur de structure en x de la G-structure σ; si le tenseur de struc--ture prend ses valeurs dans P_G on peut dire qu'il est nul [8].

DEFINITION III, 4, 2.

Un repère distingué du 2^e *ordre d'une G-structure est un repère distingué de son prolongement.*

La variété des repères distingués du 2^e ordre d'une G-structure est l'image par $v : \tilde{J}(\mathcal{H}, V) \to \overline{\mathcal{H}}^2$ de la sous-variété $\tilde{J}(\mathcal{H}_G, V)$. Le groupe $\overline{G}^2 = \overline{L}^2_{n,o} \cap J(\Pi^*_G, R^n)$ est le sous-ensemble de $L_n \times R^{n^3}$ formé des systèmes $((\delta^j_i)_{i,j=1\dots n}; (a^j_{ik})_{i,j,k=1,n})$, où pour k fixé $(a^j_{i,k})_{i,j=1\dots n}$ appartient à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G; ceci découle de la définition de Π^*_G. $\overline{G}^2$ s'identifie donc comme groupe à l'espace vectoriel $\mathfrak{g}^n$; $G^2 = L^2_n \cap \overline{G}^2$ s'identifie au sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}^n_s$ formé des $(a^i_{jk})_{i,j,k=1\dots n}$ symétriques par rapport aux indices inférieurs. Il est utile de préciser le lemme (I, 3, 1) par la remarque suivante.

REMARQUE III, 4, 1.

L'isomorphisme de groupe $\tilde{H} : \overline{\Pi}^2_{o,x} \to \overline{L}^2_{n,o}$ déterminé par un repère distingué du 2^e ordre H applique $(\overline{\Pi}_G)^2_{x,o}$ sur $\overline{G}^2$ et $(\Pi_G)^2_{x,o}$ sur G^2.

En effet $\overline{\Pi}^2_G$ coïncide avec le groupoïde distingué $\Pi_{G'}$ défini par le prolongement de la G-structure. Si $H \in \mathcal{H}_{G'}, Z \in \overline{\Pi}^2_G$, alors $H^{-1} Z H \in G'$; l'énoncé est alors évident puisque $\overline{G}^2$ est le noyau de $\delta : G' \to G$ et $\tilde{H}$ applique $\Pi^2_{x,o}$ sur $L^2_{n,o}$ en conséquence de la remarque (I, 3, 1).

Il résulte de cet énoncé que $(\overline{\Pi}_G)^2_{x,o}$ s'identifie à $\mathfrak{g}^n$, et $(\Pi^2_G)_{x,o}$ à $\mathfrak{g}^n_s$ au moyen d'un repère distingué du 2^e ordre en x.

DEFINITION III, 4, 3.

Un élément de connexion affine compatible avec une G-structure est un élément de Π_G*-connexion* [2].

On adapte trivialement une série de propositions des paragraphes précédents au cas des connexions compatibles avec une G-structure, grâce à la remarque précédente. Tout d'abord la proposition (III, 2, 3) entraîne le résultat connu [2] :

PROPOSITION III, 4, 1.

Soit V *munie d'une G-structure.*

a) La condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément de connexion compatible avec la G-structure soit déterminé par sa torsion est que le groupe G^2 *soit réduit à l'élément unité.*

b) Si la restriction à $\overline{G}^2$ *de l'application canonique* $\overline{L}^2_{n,o} \to \overline{L}^2_{n,o} / L^2_{n,o}$ *est surjective, alors il existe des connexions affines compatibles avec la G-structure et dont la torsion est donnée à priori.*

On déduit de la proposition (III, 3, 3) :

PROPOSITION III, 4, 2.

a) Si $L_{n,k}$ est un espace homogène de G, alors il existe des connexions affines de k-vitesses compatibles avec une G-structure et dont le champ géodésique est un champ de k-vitesses du 2^e ordre donné à priori.

b) Si la grasmannienne $M_{n,k}$ est un espace homogène de G, alors il existe des connexions affines de k-éléments de contact compatibles avec une G-structure et dont le champ géodésique est un k-champ donné à priori.

Il s'agit de remarquer que si G opère transitivement sur $L_{n,k}$ (sur $M_{n,k}$) alors Π_G opère transitivement sur T_k (sur $T_{k,c}$). Ceci est évident car un repère distingué en x de la G-structure transforme l'action de G sur $L_{n,k}$ (sur $M_{n,k}$) en l'action de $(\Pi_G)_x$ sur $T_{k,x}$ (sur $T_{k,c;x}$).

Soient par exemple V un espace de Riemann, Ξ un champ du 2^e ordre de k-éléments de contact sur V. Il existe une connexion riemannienne de k-éléments de contact dont le champ géodésique soit Ξ; en effet pour tout k, $1 \leq k < n$, $M_{n,k}$ est un espace homogène de $O(n)$. La remarque (III, 4, 1) permet enfin d'exprimer sous une forme très pratique les hypothèses de la proposition (III, 3, 4), dans le cas des connexions compatibles avec une G-structure. Soit N_k le sous-espace vectoriel de R^{nk^2} formé des $(x^i_{hj})_{\substack{i=1,\dots n\\ h,j=1,\dots k}}$ symétriques par rapport aux indices inferieurs; Soit $l_k : \mathfrak{g}^n_s \to N_k$ l'application induite par la projection de R^{n^3} sur R^{nk^2} qui à $(x^i_{hj})_{h,i,j=1,\dots n}$ fait correspondre $(x^i_{hj})_{\substack{i=1,\dots n\\ h,j=1,\dots k}}$. Désignons par N'_k le sous-espace de $R^{(n-k)k^2}$ formé des systèmes $(x^i_{hj})_{\substack{i=1,\dots n-k\\ h,j=1,\dots k}}$ symétriques par rapport aux indices inférieurs; soit l'_k la restriction à $\mathfrak{g}^n_s$ de la projection de R^{n^3} sur $R^{(n-k)k^2}$ qui à $(x^i_{hj})_{i,h,j=1,\dots n}$ fait correspondre $(y^i_{hj})_{\substack{i=1,\dots n-k\\ h,j=1,\dots k}}$ où $y^i_{hj} = x^{k+i}_{hj}$.

PROPOSITION III, 4, 3.

Soit V munie d'une G-structure.

a) Supposons que G opère transitivement sur $L_{n,k}$ (resp. $M_{n,k}$), que $l_k : \mathfrak{g}^n_s \to N_k$ (resp. $l'_k : \mathfrak{g}^n_s \to N'_k$) et $\varphi : \overline{G}^2 \to \overline{L}^2_{n,o}/L^2_{n,o}$ soient surjectives. Il existe alors une connexion affine holonome de k-vitesses (de k-éléments de contact), compatible avec la G-structure et dont le champ géodésique soit un champ holonome de k-vitesses (resp. k-éléments de contact) donné à priori.

b) Soient Ξ un champ du 2^e ordre de vecteurs (resp. droites de contact) Θ une *section de $S_1(\Pi_G)$ au-dessus de T (resp. $S_{1,c}(\Pi_G)$ au-dessus de T_c). Supposons réalisées les deux premières conditions de a). Il existe alors des connexions affines de vecteurs (de droites de contact) compatibles avec la G-structure dont la torsion soit Θ, et le champ géodésique Ξ.*

Il résulte des propositions précédentes que la première et la troisième condition sont équivalentes à celles qui leur correspondent dans la proposition (III, 3, 4, a). Il reste à vérifier que si $l_k : \mathfrak{g}^n_s \to N_k$ est surjective, alors $(\Pi_G)^2_{o,x}$ opère transitivement sur $T^2_k(\lambda)$ où $\lambda \in T_k, x = \pi(\lambda)$. Soit H un repère distingué du 2^e ordre en x; puisque G opère transitivement sur $L_{n,k}$, on peut supposer que le repère du 1^e ordre défini par H transforme λ en $\delta = (\delta^j_i)_{\substack{i=1,k\\ j=1,\dots n}}$. En vertu de la remarque (III, 4, 2), H transforme l'action de $(\Pi_G)^2_{o,x}$ sur $T^2_k(\lambda)$ en l'action de G^2 sur $L^2_{n,k}(\delta)$. Désignons par Δ l'élément $(\delta, o) \in L^2_{n,k}(\delta)$. Il s'agit de voir que l'application $\tilde{\Delta} : G^2 \to L^2_{n,k}(\delta)$ qui à X fait correspondre $X\Delta$ est surjective. Or cette application s'identifie à $l_k : \mathfrak{g}^n_s \to N_k$ à cause du choix de Δ. Il s'agit aussi de vérifier que $(\Pi^2_G)_{o,x}$ opère transitivement sur $T^2_{k,c}(\lambda)$, où $x = \pi(\lambda)$, $\lambda \in T_{k,c}$, si $l'_k : \mathfrak{g}^n_s \to N'_k$ est surjective. Puisque G opère transitivement sur $M_{n,k}$ il existe un repère distingué du 2^e ordre H en x, tel que le repère du 1^e ordre associé transforme λ en l'élément δ^* de $M_{n,k}$ admettant pour représentant δ. Soit $\Delta^* \in T^2_{k,c}(R^n, \delta^*)$ l'élément de contact défini par Δ. En vertu de la remarque (III, 4, 1), il s'agit de vérifier que l'application $\tilde{\Delta}^* : G^2 \to T^2_k(R^n, \delta^*)$ qui à X fait correspondre $X\Delta^*$ est surjective. Or on a :

$$\begin{tikzcd} G^2 \arrow[rr, "\tilde{\Delta}"] \arrow[dr, "\tilde{\Delta}^*"'] & & L^2_{n,k}(\delta) \arrow[dl, "\rho"] \\ & T^2_{k,c}(R^n, \delta^*) & \end{tikzcd}$$

où ρ est l'application canonique sur le quotient défini par l'action de $L^2_{k,o}$. Soit P_k le sous-espace vectoriel de N_k formé des $(x^i_{hj})_{\substack{i=1,\dots n\\ h,j=1,\dots k}}$ tels que $i > k$ entraine $x^i_{hj}=0$. Si l'on identifie $L^2_{n,k}(\delta)$ à N_k, la relation d'équivalence définie par l'action de $L^2_{k,o}$ correspond à celle qui détermine P_k; ρ s'identifie à l'application canonique de N_k sur N_k/P_k. Puisque N_k/P_k s'identifie à N'_k, il en résulte que $\tilde{\Delta}^* = \rho \circ \tilde{\Delta}$ s'identifie à l'application surjective $l'_k : \mathfrak{g}^n_s \to N'_k$. La deuxième partie de l'énoncé découle trivialement de ce qui précède et de la proposition (III, 3, 4, b).

Si V est munie, par exemple, d'une SL_n-structure, c'est-à-dire d'un champ d'éléments de volume, il existe des connexions de vecteurs, compatibles avec la structure dont la torsion et le champ géodésique sont arbitraires.

5. Connexions projectives.

Soit P la sous-variété image réciproque de $V' = V \times \{o\}$ par l'application $\pi: T_c(V\times R) \to V \times R$.

DEFINITION III, 5, 1.

P est l'espace fibré projectif tangent à V.

La restriction de $\pi: T_c(V \times R) \to V \times R$ et l'identification de V et V' définissent une projection de P sur V qu'on désigne encore par π. $T(V \times R, V')$ est la réunion disjointe de $\mathfrak{T} \times T_o(R)$ et de $T \times \{\hat{o}\}$, où $\hat{o}$ désigne l'élément trivial de $\mathfrak{T}_o(R)$. L'application canonique $\varphi: T(V\times R) \to T_c(V \times R)$ fournit par restriction une application de rang maximum de $T(V \times R, V')$ sur P. Soient $P_A = \varphi(\mathfrak{T} \times T_o(R))$, $P_I = \varphi(T \times \{\hat{o}\})$. P_A est ouvert et disjoint de P_I; la sous-variété fermée P_I, difféomorphe à T_c, peut être appelée la variété des points projectifs à l'infini; quand on aura montré que la variété P_A des points projectifs " à distance finie" s'identifie canoniquement à $\mathfrak{T}$, on pourra dire que le fibré projectif tangent est obtenu en complètant le fibré affine tangent par la famille P_I des hyperplans à l'infini [4].

Les éléments de $\Pi = \Pi(V)$ correspondent aux applications linéaires biunivoques entre fibres de $\mathfrak{T}$. L'ensemble des homothéties sur les espaces vectoriels tangents à V est une sous-variété de Π, difféomorphe à $V \times R^*$; R^* opère sur Π : le composé de $a \in R^*$ et de $X \in \Pi$ est $X\Theta_{(a,x)} = \Theta_{(a,y)}X$ où $x = \alpha(X)$, $y = \beta(X)$ et où $\Theta_{(a,x)}$ est l'homothétie d'amplitude a sur $\mathfrak{T}_x$. L'action de R^* définit la variété quotient $\Pi/_{R^*}$ et l'application canonique $\rho: \Pi \to \Pi/_{R^*}$. $(\alpha, \beta) : \Pi \to V \times V$ se projette en une application de rang maximum $(\alpha', \beta') : \Pi/_{R^*} \to V\times V$, en vertu de théorèmes généraux sur les variétés quotients [13]. Le sous-espace $\Pi/_{R^*} \underset{V}{\times} \Pi/_{R^*}$ de $\Pi/_{R^*}\times \Pi/_{R^*}$ formé des (Y, X) tels que $\alpha'(Y) = \beta'(X)$ est donc une sous-variété. L'application $\psi : \Pi \underset{V}{\times} \Pi \to \Pi$ définissant la loi de composition des jets, se projette en $\psi' : \Pi \underset{V}{\times} \Pi/_{R^*\times R^*} \to \Pi/_{R^*}$; cela a un sens car $\Pi \underset{V}{\times} \Pi$ est saturé pour la relation définie par $R^*\times R^*$ sur $\Pi \times \Pi$. On a un difféomorphisme canonique $\Pi/_{R^*}\times \Pi/_{R^*} \to \Pi \times \Pi/_{R^* \times R^*}$ qui, en vertu du lemme (III, 4, 1) applique $\Pi/_{R^*}\underset{V}{\times} \Pi/_{R^*}$ sur une sous-variété difféomorphe à $\Pi \underset{V}{\times} \Pi/_{R^* \times R^*}$. Il en résulte que ψ' s'identifie à une application $\psi'' : \Pi/_{R^*}\underset{V}{\times} \Pi/_{R^*} \to \Pi/_{R^*}$; ψ'', α', β' munissent $\Pi/_{R^*}$ d'une structure de groupoïde différentiable sur V. Il en résulte que le sous-groupoïde Π_P de $\Pi(V\times R)/_{R^*}$ formé des éléments ayant leur source et leur but dans V' est un groupoïde différentiable sur V. Ceci découle du lemme (I, 1, 1) car Π_P est l'image réciproque de $V'\times V'$ par l'application surjective de rang maximum (α', β'): $\Pi(V\times R)/_{R^*} \to (V\times R) \times (V\times R)$. On peut appeler Π_P le groupoïde projectif de V; on désignera encore par (α, β) les projections source et but sur V.

Soit $\mathfrak{T}^*$ l'espace des covecteurs et $\pi : \mathfrak{T}^* \to V$ la projection associée. Avec la convention $J(V) = J$, on désigne par $J \underset{V}{\times} \mathfrak{T} \underset{V}{\times} \mathfrak{T}^*$ la sous-variété de $J \times \mathfrak{T} \times \mathfrak{T}^*$ formée des (X, Y, Z) tels que $\pi(Y) = \beta(X)$, $\pi(Z) = \alpha(X)$; soit J^* la sous-variété de $J(V \times R)$ formée des éléments ayant leur source et leur but dans V'; posons pour tout $x \in V : I_x = j_o(t \to (x, t))$ dans $T_{x'}(V \times R)$, où $x' = (x, 0)$; soit enfin $l : V \to V \times R$ l'application qui à x fait correspondre x'. On a un difféomorphisme naturel $u : J^* \to J \underset{V}{\times} \mathfrak{T} \underset{V}{\times} \mathfrak{T}^* \underset{V}{\times} \mathfrak{T}_o(R)$; si on caractérise un élément de $J(V \times R)$ par les deux composantes de son représentant dans $J(V, V \times R) \times J(R, V \times R)$, alors $u(X, Y)$ est le système : $(X j_x(l), X I_x, Y j_x(l), Y I_x)$, où $x' = \alpha(X) = \alpha(Y)$. Soit $u' : \Pi_A \to J \underset{V}{\times} \mathfrak{T} \underset{V}{\times} \mathfrak{T}^* \times \mathfrak{T}_o(R)$ l'injection qui à (X, λ) fait correspondre $(X, \lambda, \hat{x}^*, e)$, où $\hat{x}^*$ est le covecteur trivial en $x = \alpha(X)$ et e le vecteur unitaire de $\mathfrak{T}_o(R)$, Désignons par Π^* la sous-variété de $\Pi(V \times R)$ dont les éléments ont leur source et leur but dans V'; il résulte de la définition de Π_P que l'on a un foncteur $\rho : \Pi^* \to \Pi_P$. Soit $\theta : \Pi_A \to \Pi_P$ l'application composée $\rho \circ u^{-1} \circ u'$; le foncteur θ a un sens car $u^{-1} \circ u'$ prend ses valeurs dans la sous-variété ouverte Π^* de J^*; θ est un isomorphisme de Π_A sur un sous-groupoïde différentiable Π'_A de Π'_P. L'application $\varphi : T(V \times R, V') \to P$ induit $v : \mathfrak{T} \to P$ qui à λ fait correspondre $\varphi(\lambda, e)$; v est un difféomorphisme de $\mathfrak{T}$ sur P_A. On peut maintenant affirmer que le fibré projectif tangent est le complété du fibré affine tangent dans un sens très précis [4,7] .

PROPOSITION III, 5, 1.

a) Π_P *opère transitivement sur* P.

b) Π'_A *est le sous-groupoïde de* Π_P *qui laisse* P_A *et* P_I *invariants.*

c) $v : \mathfrak{T} \to P$ *est covariante par rapport à* $\theta : \Pi_A \to \Pi_P$.

Le sous-ensemble $\Pi_P \underset{V}{\times} P$ de $\Pi_P \times P$ formé des (X, Y) tels que $\alpha(X) = \pi(Y)$ est une sous-variété. Il s'agit de définir une application de $\Pi_P \underset{V}{\times} P$ dans P qui fasse de Π_P un groupoïde d'opérateurs transitif sur P[12]. Soit $\psi : \Pi(V \times R) \underset{V \times R}{\times} T_c(V \times R) \to T_c(V \times R) \times T_c(V \times R)$ l'application qui à (X, Y) fait correspondre (Y, XY) et soit $\Pi(V \times R)/_{R^*} \underset{V \times R}{\times} T_c(V \times R)$ la sous-variété de $\Pi(V \times R)/_{R^*} \times T_c(V \times R)$ formée des (X, Y) tels que $\alpha'(X) = \pi(Y)$. Désignons par I l'identité sur $T_c(V \times R)$; ψ se projette en une application surjective de rang maximum :

$$\psi' : \Pi(V \times R) \underset{V \times R}{\times} T_c(V \times R)/_{R^* \times I} \to T_c(V \times R) \times T_c(V \times R).$$

Le lemme (III, 4, 1) entraîne que $\Pi(V \times R) \underset{V \times R}{\times} T_c(V \times R)/_{R^* \times I}$ est canoniquement difféomorphe à $\Pi(V \times R)/_{R^*} \underset{V \times R}{\times} T_c(V \times R)$; d'où une application surjective de rang maximum: $\psi'' : \Pi(V \times R)/_{R^*} \underset{V \times R}{\times} T_c(V \times R) \to T_c(V \times R) \times T_c(V \times R)$. La sous-variété image réciproque par ψ'' de $P \times P$ est précisément $\Pi_P \underset{V}{\times} P$; on voit aisément que la seconde composante de $\psi'' : \Pi_P \underset{V}{\times} P \to P \times P$ fait de Π_P un groupoïde d'opéra-

-teurs sur P ; ce groupoïde est transitif car ψ'' est surjective. On vérifie aisément les énoncés b) et c) à partir de a) et des définitions précédentes.

Posons pour tout $x \in V : \Sigma'_x = \bar{v}\Sigma_x$, où Σ est la soudure de $\mathcal{T}$ à V, définie dans la proposition (III, 1, 1). L'application $\Sigma' : x \to \Sigma'_x$ est une soudure de P à V compte tenu de la proposition précédente. On peut alors, conformément à l'idée d'Ehresmann[7], développer une théorie des connexions projectives dans le cadre général des connexions dans un espace fibré soudé à sa base. Posons donc dans l'esprit de la définition (I, 2, 1)

DEFINITION III, 5, 2.

Un élément de connexion projective est un élément de connexion dans Π_P, *com-patible avec* Σ'.

On désignera l'ensemble des éléments de connexion projective par Q_P ; une con-nexion projective est une section de la projection naturelle $q : Q_P \to V$. On va montrer qu'une connexion projective est caractérisée par les données d'une connexion affine et d'un champ de covecteurs semi-holonomes du 2^e ordre, triviaux au 1^{er} ordre. Posons $\Sigma''_x = (\Sigma_x, j_x(\hat{e}))$ dans $J(T_{x'}(V \times R), V)$; cette définition a un sens car $T_{x'}(V \times R)$ contient $\mathcal{T}_x \times T_o(R)$; soit $\sigma''(x) = \beta(\Sigma''_x) = (\hat{x}, e)$ et soit $Q'(\Pi^*)$ le sous-ensemble de $Q(\Pi^*)$ formé des X satisfaisant à la condition supplémentaire : $X \bullet j_x(\sigma'') = \Sigma''_x$ où $x = q(X)$ et où $\bullet$ désigne le prolongement de : $\Pi^* \underset{V}{\times} T(V \times R, V') \to T(V \times R, V')$ à $J(\Pi^* \underset{V}{\times} T(V \times R, V'), V) \to J(T(V \times R, V'), V)$. On démontre que $Q'(\Pi^*)$ est une variété par le procédé de la proposition (I, 2, 1). Soit $\mathcal{T}^{*2}$ la variété des covecteurs semi-holonomes du 2^e ordre [9, a]; on a les projections naturelles $\delta : \mathcal{T}^{*2} \to \mathcal{T}^*$ et $\pi : \mathcal{T}^{*2} \to V$; désignons par $\mathcal{T}^{*2}_o$ la sous-variété image réciproque par δ de $\{\hat{x}^*\}_{x \in V}$. Soit $\tilde{J}(\mathcal{T}^*, V)$ la sous-variété de $J(\mathcal{T}^*, V)$ formée des X tels que $\bar{\pi}X = j_{\alpha(X)}$ et dont le but est trivial; soit $A = j_o(t \to j_t(t' \to (t'-t)))$ dans $\tilde{J}^2(R^n)$. L'application $\tilde{A} : \mathcal{T}^{*2}_o \to \tilde{J}^2(R^n, V)$ qui à X fait correspondre le produit AX, au sens de la composition des jets non holonomes [10], est un difféomorphisme sur $\tilde{J}(\mathcal{T}^*, V)$. Soit $Q_A \underset{V}{\times} \mathcal{T}^{*2}_o$ la sous-variété de $Q_A \times \mathcal{T}^{*2}_o$ formée des (X, Y) tels que $q(X) = \pi(Y)$. On a établi ci-dessus la bijection $u : J^* \to J \underset{V}{\times} \mathcal{T} \underset{V}{\times} \mathcal{T}^* \times \mathcal{T}_o(R)$; soit Ω la sous-variété de $u(\Pi^*)$ formée des (X, Y, Z, U) tels que $Z \in \Pi$, $U = e$; soit $\Omega_1 = u^{-1}(\Omega)$. La restriction de $\rho : \Pi^* \to \Pi_P$ à Ω_1 est un difféomorphisme sur un ouvert Ω_2 de Π_P contenant les unités. Désignons par r la restriction à Ω de la projection naturelle de $J \underset{V}{\times} \mathcal{T} \underset{V}{\times} \mathcal{T}^* \times \mathcal{T}_o(R)$ dans $J \times \mathcal{T}$. L'injection $u' : \Pi_A \to J \underset{V}{\times} \mathcal{T} \underset{V}{\times} \mathcal{T}^* \times \mathcal{T}_o(R)$ prend ses valeurs dans Ω. On a :

(1)
$$\begin{tikzcd}
\Pi_A \arrow[rr, bend left, "i"] \arrow[r, "u'"] \arrow[dr, "\theta"'] & \Omega \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\rho'"] & \Pi_A \\
& \Omega_2 \arrow[ur, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

i est l'identité, θ est le foncteur défini plus haut; η est déterminé par la bijection $\rho' = \rho \circ u^{-1}$. Lorsqu'on identifie Π_A à un sous-groupoïde de Π_P, tout $f \in \Omega_2$ se factorise canoniquement dans Π_P en $f = f_1 \circ f_2$, en imposant $f_1 = \eta(f)$.

PROPOSITION III, 5, 2.

a) $\theta : \Pi_A \to \Pi_P$ *induit une injection* $\overline{\theta} : Q_A \to Q_P$.

b) Il existe une bijection $\omega : Q_P \to Q_A \underset{V}{\times} \mathcal{T}_o^{*2}$ *dont la premiere composante est la restriction de* $\overline{\eta} : J(\Omega_2, V) \to J(\Pi_A, V)$.

a) La restriction de $\overline{\theta} : J(\Pi_A, V) \to J(\Pi_P, V)$ applique $Q(\Pi_A)$ dans $Q(\Pi_P)$ puisque θ est un foncteur. Il reste à voir que $X \bullet j_x(\sigma) = \Sigma_x$ entraine $\overline{\theta}X \bullet j_x(\sigma') = \Sigma'_x$ où $X \in Q(\Pi_A)$, $x = q(X)$, $\sigma' = \beta \circ \Sigma'$. Or on a par définition $\Sigma'_x = \overline{v}\Sigma_x$, donc $\sigma' = v \circ \sigma$. Puisque $v : \mathcal{T} \to P$ est covariante par rapport à θ il en résulte par prolongement $\overline{v}(X \bullet j_x(\sigma)) = \overline{\theta}X \bullet j_x(\sigma)$, c'est-à-dire $\overline{v}\Sigma_x = \overline{\theta}X \bullet j_x(\sigma')$, ou encore $\Sigma'_x = \overline{\theta}X \bullet j_x(\sigma')$.

b) On établit des bijections $\chi : Q'(\Pi^*) \to Q_A \underset{V}{\times} \mathcal{T}_o^{*2}$ et $\chi' : Q_P \to Q'(\Pi^*)$ et l'on posera $\omega = \chi \circ \chi'$. Puisque $\eta : \Omega_2 \to \Pi_A$ est compatible avec les projections source et but et que Ω_2 est un voisinage ouvert des unités de Π_P, Q_P est contenu dans $J(\Omega_2, V)$ et appliqué dans $Q(\Pi_A)$ par $\overline{\eta} : J(\Omega_2, V) \to J(\Pi_A, V)$. Lorsqu'on construit la bijection ω on vérifiera trivialement, grâce au diagramme (1), que sa première composante est $\overline{\eta}$. Soit Ω' l'ouvert de $J \underset{V}{\times} \mathcal{T} \underset{V}{\times} \mathcal{T}^* \times \mathcal{T}_o(R)$ formé des (X, Y, Z, U) tels que $X \in \Pi$; posons $\Omega'' = \Pi^* \cap \omega^{-1}(\Omega')$. Ω'' est un voisinage ouvert de l'espace des unités dans Π^*. Il en résulte que $\overline{u} : J(I^*, V) \to J(J \underset{V}{\times} \mathcal{T} \underset{V}{\times} \mathcal{T}^* \times \mathcal{T}_o(R), V)$ induit par restriction une injection $\overline{u} : Q'(\Pi^*) \to J(\Omega', V)$. $J(\Omega', V)$ s'identifie à la variété $J(\Pi, V) \underset{V}{\times} J(\mathcal{T}, V) \underset{V}{\times} J(\mathcal{T}^*, V) \times J(\mathcal{T}_o(R), V)$ formé des systèmes (X, Y, Z, U) tels que $\overline{\beta}X = \overline{\pi}Y$, $\overline{\alpha}X = \overline{\pi}Z$. Si on caractérise un élément de $Q(\Pi^*)$ par son correspondant naturel dans $J(J(V, V \times R), V) \times J(J(R, V \times R), V)$ et que l'on pose $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, on obtient : $\overline{u}_1(X, Y) = X \bullet j_x^2(l)$, $\overline{u}_2(X, Y) = X \bullet j_x(I)$, $\overline{u}_3(X, Y) = Y \bullet j_x^2(l)$, $\overline{u}_4(X, Y) = Y \bullet j_x(I)$, où $x' = \alpha(X) = \alpha(Y)$ et où les $\bullet$ désignent des prolongements infinitésimaux appropriés des lois de composition entre jets. On voit que $\overline{u}_1$ prend ses valeurs dans Q et $\overline{u}_3$ dans la sous-variété que l'on a identifiée ci-dessus à $\mathcal{T}_o^{*2}$. La condition $\Sigma''_x = (X, Y) \bullet j_x(\sigma'')$ qui caractérise un élément (X, Y) de la sous-variété $Q'(\Pi^*)$ de $Q(\Pi^*)$ entraine que $\overline{u}_2$, $\overline{u}_4$ sont constantes sur chaque fibre de $Q'(\Pi^*)$. En effet $(X, Y) \bullet j_x(y \to (\hat{y}, e)) = (\Sigma_x, j_x(\hat{e}))$ et $I_y = (\hat{y}, e)$ entraînent $\overline{u}_2(X, Y) = \Sigma_x$, $\overline{u}_4(X, Y) = j_x(\hat{e})$. On a donc l'application $l : Q'(\Pi^*) \to Q_A$ qui à (X, Y) fait correspondre $(\overline{u}_1(X, Y), \overline{u}_2(X, Y))$ et par suite $\chi : Q'(\Pi^*) \to Q_A \underset{V}{\times} \mathcal{T}_o^{*2}$ formée au moyen de l et de $\overline{u}_3$. On vérifie aisément que χ est une bijection. La bijection $\rho : \Omega_1 \to \Omega_2$ induit $\overline{\rho} : J(\Omega_1, V) \to J(\Omega_2, V)$. Puisque Ω_2 est un voisinage des unités de Π_P, $J(\Omega_2, V)$ contient Q_P. La condition

$\bar{u}_\psi(Z) = j_x(\hat{e})$, où $Z \in Q'(\Pi^*)$, $x = \alpha(Z)$ entraîne que $J(\Omega_1, V)$ contient $Q'(\Pi^*)$. Si l'on démontre que $\bar{\rho}$ applique $Q'(\Pi^*)$ sur Q_P, on prendra pour χ' la restriction de $\bar{\rho}^{-1}$ à Q_P. Puisque ρ est un foncteur il s'agit seulement de s'assurer que $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}^{-1}$ conservent les conditions de soudure. Vérifions cela pour $\bar{\rho}$. $\mathfrak{J} \times \{e\}$ est par hypothèse stable pour l'action de Ω_1; la restriction de $\varphi : T(V \times R, V') \to P$ à $\mathfrak{J} \times \{e\}$ est un difféomorphisme sur P_A. On a :

$$\begin{tikzcd}
\Omega_1 \underset{V}{\times} (\mathfrak{J} \times \{e\}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi_1"] & \mathfrak{J} \times \{e\} \arrow[d, "\varphi"] \\
\Omega_2 \underset{V}{\times} P_A \arrow[r, "\psi'"] & P_A
\end{tikzcd}$$

φ_1 est formé au moyen de ρ et de φ; ψ et ψ' définissent la composition naturelle sur des espaces de couples composables; les flèches verticales sont bijectives. Soient $X \in Q'(\Pi^*)$, $x = q(X)$; on a successivement $\overline{\psi(X, j_x(\sigma'')) = \Sigma''_x}$, $\psi'\varphi_1(X, j_x(\sigma'')) =$ $= \bar{\varphi}\Sigma''_x$, $\bar{\psi}'(\bar{\rho}X, j_x(\sigma')) = \Sigma'_x$, ce qui montre que $\bar{\rho}X$ est un élément de connexion pro- -jective.

Il résulte de cette proposition que si l'on plonge Q_A dans Q_P par $\bar{\theta}$, alors $\bar{\eta}$ est une projection de Q_P sur Q_A, induisant par restriction l'identité sur Q_A. On a aussi :

$$\begin{tikzcd}
Q_A \arrow[rr, "\bar{\theta}"] \arrow[dr, "\zeta"'] & & Q_P \arrow[dl, "\omega"] \\
& Q_A \underset{V}{\times} \mathfrak{J}^{*2}_o &
\end{tikzcd}$$

l'injection ζ fait correspondre à X le couple formé de X et du covecteur trivial en $q(X)$. Un élément de connexion affine correspond à un élément de connexion projective particulier, caractérisé par le fait que son covecteur associé est trivial. Une connexion projective X équivaut à la donnée d'un champ de covecteurs semi-holonomes du 2^e ordre, triviaux au 1^{er} ordre, et de sa connexion affine associée $\bar{\eta} \circ X$.

6. Torsion et champs géodésiques des connexions projectives.

On a des applications $\xi : Q_A \to \bar{\Pi}^2(\Sigma, \mathfrak{J}, V)$ et $\xi' : Q_P \to \bar{\Pi}^2(\Sigma', P, V)$ en vertu de la proposition (I, 3, 2). L'injection $v : \mathfrak{J} \to P$ et la relation $\Sigma' = \bar{v}\Sigma$ induisent une bijection canonique $v^* : \bar{\Pi}^2(\Sigma, \mathfrak{J}, V) \to \bar{\Pi}^2(\Sigma', P, V)$. Soit Π'_P le sous-groupoïde d'isotropie de Π_P par rapport à la section $\sigma' : V \to P$ et soit Π^o_P la sous-variété de Π'_P formée des éléments dont le but coïncide avec la source; soit enfin $\tilde{\Pi}^o_P$ la sous-variété de Π'_P formée des X tels que $\overline{\beta}X = j_{\alpha(X)}$ et tels que $\beta(X)$ soit l'unité correspondant à $\alpha(X)$. L'application $\eta : \Omega_2 \to \Pi_A$ qu'on a définie dans le paragraphe précédent induit la factorisation $\eta^* : \Omega_2 \to \Pi_A \times \Pi_P^o$ qui à f fait correspondre $(\eta(f), \eta(f)^{-1} \circ f)$, $\Pi_{\tilde{A}}$ étant identifié à un sous-groupoide de Π_P ; η^* induit une application $\overline{\eta}^* : Q_P \to Q_A \underset{V}{\times} \Pi_P^o$ en vertu de la proposition (III, 5, 2). Bien que cette présentation concrétise le difféomorphisme $\omega : Q_P \to Q_A \underset{V}{\times} \overline{\mathfrak{T}}{}_o^{*\,2}$, il faut remarquer que les éléments de la forme $\eta(f)^{-1} \circ f$, où $f \in \Omega_2$ ne sont pas particulièrement simples; on n'a pas intérêt à les caractériser. La torsion et les champs géodésiques d'éléments de contact d'une connexion projective sont ceux de la connexion affine associée; ceci résultera de la proposition suivante.

PROPOSITION III, 6, 1.

$\xi' : Q_P \to \overline{\Pi}^2(\Sigma, P, V)$ se décompose en : $Q_P \xrightarrow{\overline{\eta}} Q_A \xrightarrow{\xi} \overline{\Pi}^2(\Sigma, \mathfrak{T}, V) \xrightarrow{v^*} \overline{\Pi}^2(\Sigma', P, V)$.

On a un foncteur $\varepsilon : \Pi'_P \to \Pi$ défini comme dans la proposition (I,2,2), par rapport à la soudure $\tilde{\Sigma}'$. La proposition revient à montrer que l'application $\eta_1 : Q_P \to \tilde{\Pi}_P^o$ déduite de $\overline{\eta}^*$ possède la propriété suivante : $\overline{\varepsilon}(\eta_1(X)) = j_{\hat{x}}^2$ où $X \in Q_P$, $\hat{x} = q(X)$ et où $\overline{\varepsilon} : \tilde{\Pi}'_P \to \tilde{\Pi}^2$ est le prolongement naturel de ε. Soit $\eta_2 : \Omega_2 \to \Pi_P$ l'application qui à f fait correspondre $f \circ \eta(f)^{-1}$; η_2 se prolonge en $\overline{\eta}_2 : Q_P \to J(\Pi_P, V)$; on a pour $X \in Q_P$, $x = q(X)$: $\overline{\alpha\eta}_2 X = \overline{\beta\eta}_2 X = \hat{j}_x$, $\beta(\overline{\eta}_2 X) = \tilde{x}$. Soit $l : \Pi_P \underset{V}{\times} P \to \Pi(P')$ l'application qui à un couple composable (f, z) fait correspondre $j_z(f)$ et désignons par L_x le jet en $\sigma'(x)$ de l'injection de P_x dans P. La proposition revient alors à vérifier pour tout élément de connexion X en x la relation suivante dans $\overline{\Pi}^2(P_x)$:

$$(1) \qquad \bar{l}(L_x, \overline{\eta}_2 X \Sigma_x'^{-1}) = j^2_{\sigma'(x)}$$

où $\overline{l} : J(P \underset{V}{\times} \Pi_P, P_x) \to J(\Pi(P'), P_x)$ est le prolongement de l. Soit $X = j_x(y \to f_y)$; on peut supposer $f_y \in \Omega_2$; on a vu que $f_y \in \Omega_2$ est caractérisé par un système (A_y, λ_y, c_y); λ_y est un vecteur tangent en x, A_y un élément de Π de source y de but x, c_y un covecteur en y. Si l'on identifie $\mathfrak{T}_x$ à un ouvert de P_x, alors $\eta_2(f_y)$ est une trans-formation projective de P_x qui au voisinage de $\hat{x}$ est définie en notations traditionnelles par $\eta_2(f_y) : \lambda \to (1 + c'_y(\lambda - \lambda_y))^{-1}\lambda$; $c'_y(\lambda - \lambda_y)$ est la valeur en $\lambda - \lambda_y$ du covecteur image de c_y par A_y^{-1}; la condition de soudure implique $\Sigma_x = j_x(y \to \lambda_y)$. La démonstration de (1) revient alors à vérifier dans $\overline{\Pi}^2(\mathfrak{T}_x)$:

$$(2) \qquad j_{\hat{x}}(\lambda \to j_\lambda(\mu \to (c''(\mu)(\lambda - \mu) + 1)^{-1}\mu)) = j^2_{\hat{x}}$$

où le covecteur $c''(\lambda)$ dépendant de λ est déterminé par : $c''(\lambda_y) = c'_y$; cette définition a un sens car $\Sigma_x = j_x(y \to \lambda_y)$ est un jet inversible; on remarque que $c''(\hat{x})$ est trivial. On vérifie aisément (2) par le calcul des jets en se plaçant dans R^n au moyen d'une base de $\mathfrak{T}_x$.

L'espace des éléments de torsion de Q_P est un quotient $S(P)$ de $\overline{\Pi}^2(\Sigma', \mathfrak{T}, V)$ conformément à la définition (I, 3, 1). La bijection $v^* : \overline{\Pi}^2(\Sigma, \mathfrak{T}, V) \to \overline{\Pi}^2(\Sigma', P, V)$ induit une bijection canonique $v^{**} : S(\mathfrak{T}) \to S(P)$. La proposition précédente entraîne alors :

$$
(3) \qquad \begin{array}{ccc} Q_P & \xrightarrow{\quad\theta\quad} & S(P) \\ \downarrow{\scriptstyle\bar{\eta}} & & \uparrow{\scriptstyle v^{**}} \\ Q_A & \xrightarrow{\quad\theta\quad} & S(\mathfrak{T}) \end{array}
$$

où θ désigne les applications qui à un élément de connexion font correspondre sa torsion, conformément à la définition (I, 3, 3). L'énoncé suivant a alors un sens très précis.

COROLLAIRE III, 6, 1.

La torsion d'un élément de connexion projective est celle de l'élément de connexion affine associé.

Il existe donc des connexions projectives dont la torsion Θ soit donnée a priori. En effet, en vertu de la proposition (III, 2, 2) il existe une connexion affine X dont la torsion soit Θ, compte tenu de la bijection $v^{**} : S(P) \to S(\mathfrak{T})$. X s'identifie à une connexion projective dont la torsion est Θ en vertu de la proposition (III, 5, 2) et de (3). On peut s'assurer que la torsion projective, qu'on vient de définir correspond bien à la notion que Cartan a élaborée au moyen des tenseurs projectifs [4].

Afin de faire une étude géodésique des connexions projectives, dans le cadre de (II, 3), il faut définir des champs verticaux du 2^e ordre sur P, invariants par Π_P.

PROPOSITION III, 6, 2.

Il existe pour chaque k, $1 \leq k < n$, un champ vertical holonome du 2^e ordre de k-éléments de contact sur P, invariant par Π_P, dont la restriction à $\mathfrak{T}$ soit le champ $\Lambda_{k,c}$ déduit de la proposition (III, 3, 1).

La proposition (III, 6, 1) implique que Π_P opère transitivement sur $T_{k,c}(P')$; si le champ de l'énoncé existe, il est donc unique. Soit $\hat{T}_{k,c}(\mathfrak{T}')$ la sous-variété de $T_{k,c}(\mathfrak{T}')$ formée des λ tels que $\pi(\lambda)$ soit de la forme $\hat{x}$. Il s'agit simplement de vérifier que la restriction de $\Lambda_{k,c}$ à $\hat{T}_{k,c}(P')$ est invariante par le groupoïde Π'_P défini plus haut. Or $\Lambda_{k,c}$ est déduit d'un champ de k-vitesses Λ_k par passage au quotient, comme on l'a précisé dans la proposition (III, 3, 1). Soient $\lambda \in \hat{T}_k(\mathfrak{T}', \hat{x})$ et $f : P_x \to P_y$

un élément de Π_P ; il s'agit de vérifier que $\Lambda_k(\bar{f}\lambda)$ et $\bar{f}\Lambda_k(\lambda)$ définissent le même élément de contact. Or Π'_P est contenu dans Ω_2 qu'on a défini dans les préliminaires de la proposition (III, 5, 2). Il en résulte que f se factorise en $f = f_2 \circ f_1$, où $f_1 = \eta(f)$ appartient à Π_A. Puisque Λ_k est invariant par rapport à Π_A, l'on est amené à vérifier qu'il existe $A \in \bar{L}^2_k$ tel que $\Lambda_k(\mu)A = \bar{f}_2\Lambda_k(\mu)$, où $\mu = \bar{f}_1\lambda$. Or on voit, comme dans la proposition (III, 6, 1), que f_2 est une transformation projective de P_y qui au voisinage de $\hat{y}$ s'écrit de la manière suivante dans $\mathfrak{T}_y$: $f_2(\lambda) = (c(\lambda)+1)^{-1}\lambda$, où c est un covecteur ; cette expression est plus simple que dans le cas général, évoqué dans la proposition (III, 6, 1), car un élément de Π'_P est caractérisé par le fait que son vecteur associé est nul. En transportant le problème dans R^n au moyen d'une base de $\mathfrak{T}_y$, on constate que la solution est donnée par :

$$A = ((\delta^j_i)_{i,j=1,\dots k}, (-\delta^j_i c(\mu_h) - \delta^j_h c(\mu_i))_{h,i,j=1,\dots k}),$$

où $\mu_1, \dots \mu_k$ sont les vecteurs constituant la k-vitesse μ.

Remarquons qu'il n'y a pas de champs verticaux de k-vitesses, invariants par Π_P et prolongeant les données Λ_k de la proposition (III, 3, 1). C'est pourquoi il n'est pas interessant de faire une théorie géodésique des connexions projectives de k-vitesses, en particulier de considérer les géodésiques paramétrées d'une connexion projective ponctuelle. Si on rapporte l'étude géodésique des connexions projectives d'éléments de contact aux champs du 2^e ordre définis par la proposition précédente, alors celle-ci jointe à la proposition (III, 6, 1) et à la définition (II, 3, 2) entraîne :

PROPOSITION III, 6, 3.

Soit (X, λ) un élément de connexion projective de k-éléments de contact ; le k-élément de contact géodésique de (X, λ) coïncide avec celui de $(\bar{\eta}X, \lambda)$.

Il en résulte que si un k-champ du 2^e ordre Ξ est le champ géodésique d'une connexion projective de k-éléments de contact X, alors Ξ est aussi le champ géodésique de la connexion affine canoniquement associée à X par $\bar{\eta} : Q_P \to Q_A$. En particulier le feuilletage du 2^e ordre formé par les géodésiques d'une connexion projective ponctuelle, coïncide avec celui de la connexion affine associée. Ceci éclaire le problème ancien de la recherche de connexions projectives normales [4, 16, 17], qui consiste à associer à un k-champ du 2^e ordre Ξ une connexion projective canonique de k-éléments de contact dont le champ géodésique soit Ξ. Or, si ce problème était résoluble il existerait, d'après la proposition précédente, une connexion affine canonique dont le champ géodésique soit Ξ. Cela n'est vrai que si l'on introduit une structure supplémentaire sur la variété, comme on le montrera au chapitre suivant. Les auteurs qui ont cherché des connexions projectives normales exigeaient implicitement que la connexion affine associée fût compatible avec une structure unimodulaire ; conformément à la proposition (III, 5, 2) le problème se ramenait alors à chercher des applications dans $\overline{\mathfrak{T}}_o^{*2}$, déterminées par des conditions algébriques sur la courbure projective, dont aucun auteur n'explique la signification géométrique [4, 16].

CHAPITRE QUATRE

CONNEXIONS AFFINES NORMALES

Dans ce chapitre, il s'agira de géométriser des champs de vecteurs et de droites de contact du 2^e ordre au moyen de connexions affines canoniques. On est amené à introduire des objets géométriques du 2^e ordre, qui éclairent le sens intrinsèque des calculs de Douglas [5] .

1. Systèmes quadratiques.

Soient Ξ un champ de vecteurs du 2^e ordre en $x \in V$, c'est-à-dire une section de $\pi : T_x^2 \to T_x$, H un corepère en x semi-holonome du 2^e ordre (on dira désormais corepère du 2^{e}ordre), H_1 le corepère du 1erordre défini par H. On déduit une application $\Xi' : T_x \to L^2_{n,1}$ qui à λ fait correspondre $H\Xi(\lambda) = ((H_1\lambda)^i, \Xi^i_H(\lambda))_{i=1,..n}$. Si pour le repère particulier H, chaque fonction Ξ^i_H est la restriction d'une forme quadratique sur $\mathcal{T}_x$ (ou, par abus de langage,une forme quadratique sur T_x), cette propriété est vraie pour tout autre corepère du 2^e ordre H' en x. On a en effet : $H'\Xi(\lambda) = (H'H^{-1})H\Xi(\lambda)$; $H'H^{-1} \in \overline{L}^2_n$ a des coordonnées $((z^i_j)_{i,j=1,..n}, (z^i_{j,k})_{i,j,k=1,..n})$; au moyen du calcul des jets on obtient : $\Xi^i_{H'}(\lambda) = z^i_{rs}(H_1\lambda)^r(H_1\lambda)^s + z^i_r\Xi^r_H(\lambda)$, $i = 1,..n$. Puisque $\lambda \to ((H_1\lambda)^i)_{i=1,..n}$ est linéaire, chaque fonction $\Xi^i_{H'}$ est une forme quadratique. On peut alors poser :

DEFINITION IV, 1, 1.

Un élément quadratique Ξ en x est un champ de vecteurs du 2^e ordre en x tel que, pour tout corepère du 2^e ordre H en x, chaque coordonnée canonique seconde de $H\Xi(\lambda) \in L^2_{n,1}$ soit une forme quadratique en λ.

Remarquons qu'un élément quadratique est un objet géométrique du 2^e ordre [12,c] . Soient $X \in \overline{\Pi}^2_{y,x}(W,V)$, $X_1 = \delta(X)$, Ξ un élément quadratique en x ; on a :

$$\begin{array}{ccc} T_x(V) & \xrightarrow{\ \Xi\ } & T^2_x(V) \\ \big\downarrow \tilde{X}_1 & & \big\downarrow \tilde{X} \\ T_y(W) & \xrightarrow{\ \Xi_X\ } & T^2_y(W) \end{array}$$

les bijections $\tilde{X}_1$ et $\tilde{X}$ formées par composition à gauche avec X_1 et X transforment l'élément quadratique Ξ en un élément quadratique Ξ_X. Dans le cas où $W = R^n$ et où X est un corepère du 2^e ordre, $\Xi_X : L_{n,1} \to L^2_{n,1}$ détermine un système $(\xi^i_{jk})_{i,j,k=1,..n}$ symétrique par rapport aux indices inférieurs, tel que l'on ait : $\Xi_X(\lambda) = (\lambda^i, \xi^i_{rs}\lambda^r\lambda^s)_{i=1}$ On dira que les ξ^i_{jk} sont les coordonnées canoniques de Ξ_X ou les composantes de Ξ par rapport à X.

Désignons par $C(V)$ ou simplement par C l'ensemble des éléments quadratiques sur V et montrons que C est munie d'une structure de variété telle que toutes les applications dans lesquelles C interviendra dans la suite soient différentiables. Soient $p : C \to V$ la projection naturelle, $\mathfrak{A}$ un atlas de V, $\varphi : U \to R^n$ une carte de $\mathfrak{A}$; φ détermine en chaque $x \in U$ un corepère du 2^e ordre $j^2_x(\varphi)$; d'où la bijection $\varphi^* : p^{-1}(U) \to \varphi(U) \times R^{\frac{n^3+n^2}{2}}$ qui à Ξ fait correspondre $\Xi_{j^2_x(\varphi)}$, où $x = p(\Xi)$. On voit que $\{\varphi^*\}_{\varphi \in \mathfrak{A}}$ engendre l'atlas d'une structure différentiable sur C. Soient $\Xi \in C$, $Z \in \overline{\Pi}^2_o$, $p(\Xi) = \alpha(Z) = x$; l'application $Z\Xi : T_x \to T^2_x$ qui à λ fait correspondre $Z\Xi(\lambda)$ est un champ de vecteurs du 2^e ordre en x; c'est même un élément quadratique à cause de la propriété d'invariance. En vue de la suite il est utile d'établir que Π^2_o opère d'une manière simplement transitive sur chaque fibre de C. Soit $C \underset{V}{\times} C$ la sous-variété de $C \times C$ formée des (Ξ, Ξ') tels que $p(\Xi) = p(\Xi')$.

PROPOSITION IV, 1, 1.

a) $Z\Xi = \Xi$, *où* $Z \in \Pi^2_{o,x}$, $\Xi \in C_x$ *entraine* $Z = j^2_x$.

b) Il existe une application $\zeta : C \underset{V}{\times} C \to \Pi^2_o$ *telle que l'on ait* $\zeta(\Xi', \Xi)\Xi = \Xi'$ *pour tout* (Ξ, Ξ').

Posons $C_n = C_o(R^n)$ et construisons une application $\zeta_1 : C_n \times C_n \to L^2_{n,o}$ satisfaisant à b). Soient $\Xi = (\xi^k_{ij})_{i,j,k=1,..n}$ et $\Xi' = (\xi'^k_{ij})_{i,j,k=1,..n}$ des éléments de C_n; il est évident que $\zeta_1(\Xi', \Xi) = ((\delta^j_i)_{i,j=1,..n}, (\xi'^j_{ik} - \xi^j_{ik})_{i,j,k=1,..n})$ vérifie $\zeta_1(\Xi', \Xi)\Xi = \Xi'$. La propriété a) est évidente sur C_n. On la transporte aisément à $\Xi \in C_x$ au moyen d'un corepère du 2^e ordre H en x. En effet, soit $Z \in \Pi^2_{o,x}$; $Z\Xi = \Xi$ dans C_x est équivalent à $(HZH^{-1})\Xi_H = \Xi_H$ dans C_n; $HZH^{-1} \in L^2_{n,o}$ en vertu de la remarque (I, 3, 1) donc HZH^{-1} et par suite Z sont des éléments unités. Soit $\mathfrak{H}^{*2} \underset{V}{\times} C \underset{V}{\times} C$ la sous-variété de $\mathfrak{H}^{*2} \times C \times C$ formée des (H, Ξ, Ξ') tels que $\pi(H) = p(\Xi) = p(\Xi')$. L'application $\zeta_2 : \mathfrak{H}^{*2} \underset{V}{\times} C \underset{V}{\times} C \to \Pi^2_o$ qui à (H, Ξ', Ξ) fait correspondre $H^{-1}\zeta_1(\Xi'_H, \Xi_H)H$ vérifie $\zeta_2(H, \Xi', \Xi)\Xi = \Xi'$; il résulte de a) que ζ_2 est indépendante de H et induit une application $\zeta : C \underset{V}{\times} C \to \Pi^2_o$ satisfaisant à b).

Appelons système quadratique en x, une application de T_x dans C_x; un système quadratique sur V est une application de T dans C, compatible avec les projections naturelles sur V.

DEFINITION IV, 1, 2.

Un système quadratique Ξ en x est singulier s'il vérifie les conditions suivantes.

a) Ξ_λ ne dépend que de l'élément de contact défini par $\lambda \in T_x$.

b) Dans $J^2(T_x^2, T_x)$ on a identiquement en $\lambda \in T_x$: $j_\lambda^2(\mu \to \Xi_\mu(\mu)) = j_\lambda^2(\mu \to \Xi_\lambda(\mu))$.

Un système quadratique sur V singulier en chaque point est un système quadratique singulier sur V. Un système quadratique singulier en un point conserve cette propriété si on le transforme par un jet inversible semi-holonome du 2^e ordre. On aura donc un critère utile pour reconnaître au moyen d'un corepère du 2^e ordre H en x si un système quadratique Ξ en x est singulier. En effet H et son corepère associé du 1^{er} ordre H_1 introduisent une transformation de Ξ en Ξ_H déterminée par :

$$\begin{array}{ccc} T_x & \xrightarrow{\Xi} & C_x \\ {\scriptstyle \tilde{H}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{H}} \\ L_{n,1} & \xrightarrow[\Xi_H]{} & C_n \end{array}$$

Si Ξ est singulier alors $\Xi_H : (\lambda^i)_{i=1,..n} \to (\xi^i_{jk}(\lambda))_{i,j,k=1,..n}$ l'est aussi; cela signifie que les fonctions ξ^i_{jk} sont homogènes de degré 0 et vérifient :

$$\frac{\partial \xi^i_{jr}}{\partial \lambda^k}(\lambda)\lambda^r = 0, \qquad i,j,k = 1,..n;\ \lambda \in L_{n,1}.$$

DEFINITION IV, 1, 3.

Un champ de vecteurs du 2^e ordre (en x) Ξ est homogène si on a pour $a \in L_1$, $\lambda \in T(\lambda \in T_x)$: $\Xi(\lambda a) = \Xi(\lambda)(a, 0)$.

Un champ de vecteurs du 2^e ordre homogène en un point conserve cette propriété lorsqu'on le transforme au moyen d'un jet inversible du 2^e ordre semi-holonome. Cette propriété d'invariance entraîne le critère suivant : soient Ξ un champ de vecteurs du 2^e ordre en x, H un corepère du 2^e ordre en x; Ξ est homogène si et seulement si les composantes secondes Ξ^i_H du transformé $\Xi_H : L_{n,1} \to L^2_{n,1}$ sont des fonctions homogènes de degré 2 en $(\lambda^i)_{i=1,..n}$. Il en résulte qu'un élément quadratique en x est un champ de vecteurs du 2^e ordre homogène en ce point. Un champ quadratique, c'est-à-dire une section de $p : C \to V$, s'identifie au champ homogène de vecteurs du 2^e ordre qui à $\lambda \in T$ fait correspondre $\Xi_{\pi(\lambda)}(\lambda)$. Plus généralement, un système quadratique $\Xi : T_x \to C_x$ qui ne dépend que de l'élément de contact, définit le champ homogène en x : $\lambda \to \Xi_\lambda(\lambda)$; la proposition suivante donne en un certain sens une réciproque qui justifie les notions introduites.

PROPOSITION IV, 1, 2.

Soit Ξ *un champ de vecteurs du* 2^e *ordre homogène (en* x*); il existe un et un seul système singulier* Ξ^**(en* x*) tel que l'on ait* $\Xi^*_\lambda(\lambda) = \Xi(\lambda)$ *pour tout* $\lambda \in T$ *(*$\lambda \in T_x$*).*

On se servira dans la suite de l'énoncé global; la démonstration ci-dessous indique clairement la nature locale de la solution. Vérifions d'abord l'unicité. Soient Λ, Λ' des systèmes quadratiques singuliers en x qui engendrent le champ homogène Ξ en x. On a par hypothèse : $j^2_\lambda(\mu \to \Lambda_\lambda(\mu)) = j^2_\lambda(\mu \to \Xi(\mu)) = j^2_\lambda(\mu \to \Lambda'_\lambda(\mu))$ dans $J^2(T^2_x, T_x)$ pour tout $\lambda \in T_x$. Il en résulte $\Lambda_\lambda = \Lambda'_\lambda$ pour tout λ; en effet, pour que deux éléments quadratiques en x coïncident il suffit qu'ils aient en un seul point le même jet du 2^e ordre; c'est trivial dans C_n et on le vérifie par conséquent dans C_x au moyen de la transformation naturelle de C_n sur C_x opérée par un corepère du 2^e ordre en x. Soit maintenant Ξ un champ homogène du 2^e ordre sur V. Pour tout $H \in \mathcal{H}^{*2}$ nous désignons par $\Xi_H : L_{n,1} \to L^2_{n,1}$ le champ homogène obtenu en transformant au moyen de H la restriction de Ξ à $T_{\pi(H)}$. Soit $\Xi_H : (\lambda^i) \to (\lambda^i, \xi^i_H(\lambda))_{i=1,..n}$. Définissons $\Xi_{H,\lambda} \in C_n$ par $\Xi_{H,\lambda} = \left(\dfrac{\frac{1}{2}\partial^2 \xi^i_H(\lambda)}{\partial\lambda^j \partial\lambda^k}\right)_{i,j,k=1,..n}$ et soit $\Xi''_H : T_{\pi(H)} \to C_{\pi(H)}$ le système quadratique obtenu en transformant au moyen de H^{-1} le système $\Xi'_H : L_{n,1} \to C_n$ qui à λ fait correspondre $\Xi_{H,\lambda}$. Les fonctions ξ^i_H sont homogènes de degré 2; il en résulte que, pour tout H, Ξ'_H est un système quadratique singulier engendrant Ξ_H. Par transformation au moyen de H^{-1} on voit alors que Ξ''_H est un système quadratique singulier en $x = \pi(H)$ tel que l'on ait $\Xi''_{H,\lambda}(\lambda) = \Xi(\lambda)$ pour tout $\lambda \in T_x$. A cause de l'unicité démontrée plus haut, Ξ''_H ne dépend pas de H lorsque H parcourt l'ensemble des corepères du 2^e ordre en x. Il en résulte que l'application $\chi : \mathcal{H}^{*2} \times_V T \to C$ qui à chaque (H, λ) tel que $\pi(H) = \pi(\lambda)$ fait correspondre $\Xi''_{H,\lambda}$ induit l'application cherchée $\Xi^* : T \to C$.

DEFINITION IV, 1, 4.

Un système singulier de covecteurs en $x \in V$ *est une application* $A : T_x \to \mathcal{T}^*_x$ *vérifiant :*

a) A *ne dépend que de l'élément de contact.*

b) On a dans $J(R, T_x)$ *l'identité en* $\lambda \in T_x$ *:*

$$j_\lambda(\mu \to A(\lambda)\mu) = j_\lambda(\mu \to A(\mu)\mu).$$

Un système singulier de covecteurs sur V est une application $A : T \to \mathcal{T}^*$ compatible avec les projections naturelles sur V et qui induit un système singulier en chaque point. Désignons par $\mathfrak{L}_{m,n}$ l'ensemble des $X \in J(R_m, R_n)$ de source et de but 0. Un repère H en x transforme d'une manière naturelle une application $A : T_x \to \mathcal{T}^*_x$ en

$A_H : L_{n,1} \to \mathfrak{L}_{1,n}$ déterminée par :

$$\begin{tikzcd} T_x \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\tilde{H}"'] & \mathfrak{T}^*_x \arrow[d, "\tilde{H}"] \\ L_{n,1} \arrow[r, "A_H"] & \mathfrak{L}_{1,n} \end{tikzcd}$$

Un jet inversible du 1er ordre transforme un système singulier de covecteurs en un système singulier. En particulier $A_H : (\lambda^i)_{i=1,..n} \to (a_i(\lambda))_{i=1,..n}$ est singulier, ce qui s'exprime par : $\dfrac{\partial a_r}{\partial \lambda^i}(\lambda)\lambda^r = 0$, $i = 1,..n$, $\lambda \in L_{n,1}$. On déduit de la forme de A_H que la propriété b) de la définition (IV,1,4) équivaut à affirmer que $j_\lambda(\mu \to A(\mu)\lambda)$ est trivial dans $J(R, T_x)$ pour tout λ. Remarquons que $\lambda \to A(\lambda)\lambda$ est une fonction numérique homogène sur T_x.

PROPOSITION IV, 1, 3.

Soit f une fonction numérique homogène de degré 1 sur T (sur T_x). Il existe un et un seul système singulier de covecteurs A (en x) tel que l'on ait $A(\lambda)\lambda = f(\lambda)$ pour tout $\lambda \in T$ (pour tout $\lambda \in T_x$).

L'énoncé global est un corollaire de l'énoncé local. Vérifions d'abord l'unicité. Soient f une fonction numérique homogène sur T_x et A, A' deux systèmes singuliers de covecteurs en x vérifiant l'énoncé. On a dans $J(R, T_x)$ pour tout $\lambda \in T_x$: $j_\lambda(\mu \to A(\lambda)\mu) = j_\lambda(\mu \to f(\mu)) = j_\lambda(\mu \to A'(\lambda)\mu)$. Il en résulte que les covecteurs $A(\lambda)$ et $A'(\lambda)$ coïncident parce qu'ils ont le même jet en λ lorsqu'on les considère comme des applications linéaires. Soit maintenant f une fonction numérique homogène de degré 1 sur T. Un repère H transforme la restriction de f à $T_{\pi(H)}$ en une fonction f^H sur $L_{n,1}$ homogène de degré 1. Définissons $A_H : L_{n,1} \to \mathfrak{L}_{1,n}$ en posant $A_H(\lambda) = \left(\dfrac{\partial f^H}{\partial \lambda^i}(\lambda)\right)_{i=1,..n}$; A_H est un système singulier de covecteurs qui engendre f^H et est transformé par H^{-1} en un système singulier de covecteurs A'_H en $\pi(H)$ tel que l'on ait : $A'_H(\lambda)\lambda = f(\lambda)$ pour tout $\lambda \in T_{\pi(H)}$. A cause de l'unicité démontrée ci-dessus A'_H ne dépend que de $\pi(H)$; l'application $\chi : \mathcal{H} \underset{V}{\times} T \to \mathfrak{T}^*$ qui à (H, λ) tel que $\pi(H) = \pi(\lambda)$ fait correspondre $A'_H(\lambda)$ se projette en une application $A : T \to \mathfrak{T}^*$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Désignons par Π_o la sous-variété de Π formée des X vérifiant : $\alpha(X) = \beta(X)$. L'application $\varphi : \mathcal{H} \underset{V}{\times} \Pi_o \to R^*$ qui à un couple composable (Y, X) fait correspondre le déterminant de $Y^{-1}XY \in L_n$ se projette en une application $D : \Pi_o \to R^*$. Soit $\mathfrak{T}^*_1$ la sous-variété de $J(R, V)$ formée des éléments dont le but est 1. Puisque $\overline{\Pi}^2_o$ est une sous-variété de $J(\Pi_o, V)$, D définit par prolongement l'application $\overline{D} : \overline{\Pi}^2_o \to \mathfrak{T}^*_1$ qui à Z fait correspondre $\overline{D}Z$.

Un champ de vecteurs en x du 2^e ordre $\Xi : T_x \to T_x^2$ compatible avec les relations d'équivalence définissant $T_{c,x}$ et $T^2_{c,x}$ induit par passage au quotient un champ d'éléments de contact en x du 2^e ordre $\check{\Xi} : T_{c,x} \to T^2_{c,x}$. Désormais on appelle feuilletage du 2^e ordre (en x) un champ du 2^e ordre de droites de contact (en x). Si deux champs de vecteurs du 2^e ordre Ξ et Ξ' (en x) induisent le même feuilletage du 2^e ordre, on a une fonction numérique f sur T (sur T_x) déterminée par : $\Xi'(\lambda) = \Xi(\lambda)(1, f(\lambda))$; si Ξ et Ξ' sont homogènes, alors f est homogène de degré 1. Un système quadratique (en x) qui ne dépend que de l'élément de contact définit un champ de vecteurs du 2^e ordre homogène (en x) et donc un feuilletage du 2^e ordre (en x). L'identification naturelle de $\mathcal{T}^*$ et de $\mathcal{T}^*_1$ confère un sens précis à l'énoncé suivant :

PROPOSITION IV, 1, 4.

Soit A *un système singulier de covecteurs en* x. *Il existe une et une seule application* $Z : T_x \to \Pi^2_{o,x}$ *ne dépendant que de l'élément de contact et vérifiant les conditions suivantes :*

a) $\overline{D} Z_\lambda = A(\lambda)$ *pour tout* $\lambda \in T_x$.

b) Si Ξ *est un système quadratique singulier quelconque en* x, *alors le système quadratique* $Z\Xi$ *qui à* $\lambda \in T_x$ *fait correspondre* $Z_\lambda \Xi_\lambda$ *est singulier et définit le même feuilletage du* 2^e *ordre en* x *que* Ξ.

On a alors : $Z_\lambda \Xi_\lambda(\lambda) = \Xi_\lambda(\lambda)\left(1, \frac{2}{n+1} A(\lambda)\lambda\right)$ *pour tout* $\lambda \in T_x$ *et tout système quadratique singulier* Ξ *en* x. *Dans le cas où* A *est un système singulier de covecteurs sur* V, *on a un énoncé global correspondant.*

Voyons d'abord qu'une solution Z en x est entièrement déterminée par le système singulier de covecteurs A en x. Un repère du 2^e ordre H et son repère associé du 1^{er} ordre H_1 définissent :

(1)
$$\begin{tikzcd}
T_x \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "Z"] \arrow[ddd, "H'_1"'] & \mathcal{T}^*_x \arrow[r, "u"] & \mathcal{T}^*_{1,x} \arrow[ddd, "H''_1"] \\
 & \overline{\Pi}^2_{o,x} \arrow[ur, "\overline{D}"'] \arrow[d, "H'"] & \\
 & \overline{L}^2_{n,o} \arrow[dr, "\chi"] & \\
L_n \arrow[ur, "Z_H"] \arrow[rr, "A_{H_1}"'] & & \mathfrak{L}_{1,n}
\end{tikzcd}$$

Le sens des flèches verticales est évident; u est l'identification naturelle. La transformée naturelle χ de $\overline{D}$ est de la forme : $(z^i_{jk})_{i,j,k=1,..n} \to (z^r_{ri})_{i=1,..n}$ (on représente un élément de $\overline{L}^2_{n,o}$ par ses composantes secondes dans $\overline{L}^2_n$). Soient $Z_H : (\lambda^i)_{i=1,..n} \to (z^i_{jk}(\lambda))_{i,j,k=1,..n}$ et $A_{H_1} : (\lambda^i)_{i=1,..n} \to (a_i(\lambda))_{i=1,..n}$. La condition a) s'exprime au moyen de H par :

$$(2) \qquad z^r_{ri}(\lambda) = a_i(\lambda), \qquad \lambda \in L_{n,1}, \qquad i = 1, \ldots n.$$

Soient Ξ un système quadratique singulier en x et $\Xi_H : L_{n,1} \to C_n$ son transformé par H. Exprimons que $Z\Xi$ est singulier ou encore que $(Z\Xi)_H = Z_H \Xi_H$ est un système quadratique singulier. Soit $\Xi_H : (\lambda^i)_{i=1,..n} \to (\xi^i_{jk}(\lambda))_{i,j,k=1,..n}$. On a alors $Z_H \Xi_H$: $(\lambda^i)_{i=1,..n} \to (z^i_{jk}(\lambda) + \xi^i_{jk}(\lambda))_{i,j,k=1,..n}$. Puisque Ξ_H et $Z_H\Xi_H$ sont des systèmes quadratiques singuliers, on a : $\dfrac{\partial \xi^i_{jr}}{\partial \lambda^k}(\lambda)\lambda^r = 0$ et $\dfrac{\partial}{\partial \lambda^k}(z^i_{jr} + \xi^i_{jr})(\lambda)\lambda^r = 0$, $\lambda \in L_{n,1}$ et $i, j, k = 1, \ldots n$; d'où

$$(3) \qquad \frac{\partial z^i_{jr}}{\partial \lambda^k}(\lambda)\lambda^r = 0, \qquad \lambda \in L_{n,1}, \qquad i,j,k = 1,..n.$$

Exprimons enfin au moyen de H que Ξ et $Z\Xi$ définissent le même feuilletage en x. Il existe sur T_x une fonction numérique homogène de degré 1 vérifiant :

$$(4) \qquad Z_\lambda \Xi_\lambda = \Xi_\lambda(\lambda)(1, f(\lambda)), \qquad \lambda \in T_x.$$

Cette relation équivaut à :

$$(5) \qquad Z_{H,\lambda}\Xi_{H,\lambda}(\lambda) = \Xi_{H,\lambda}(\lambda)(1, f^*(\lambda)), \qquad \lambda \in L_{n,1}.$$

où $f^* : L_{n,1} \to R$ est la transformée naturelle de f par H_1. On traduit (5) par :

$$(6) \qquad z^i_{rs}(\lambda)\lambda^r\lambda^s = \lambda^i f^*(\lambda), \qquad \lambda \in L_{n,1}, \quad i,j,k = 1,..n.$$

En dérivant (6) deux fois par rapport à λ^j, λ^k et en tenant compte de (3), on obtient :

$$(7) \qquad 2 z^i_{jk} = \delta^i_j \frac{\partial f^*}{\partial \lambda^k}(\lambda) + \delta^i_k \frac{\partial f^*}{\partial \lambda^j}(\lambda) + \frac{\lambda^i \partial^2 f^*}{\partial \lambda^j \partial \lambda^k}(\lambda), \qquad i,j,k = 1,..n.$$

Puisque f^* est homogène de degré 1, on a :

$$(8) \qquad 2 z^r_{ri} = (n+1)\frac{\partial f^*}{\partial \lambda^i}, \qquad i = 1,..n.$$

L'identité d'Euler $f^*_\lambda = \dfrac{\partial f^*}{\partial \lambda^r}(\lambda)\lambda^r$ et (2) entraînent alors :

$$(9) \qquad f^*(\lambda) = \frac{2}{n+1} a_r(\lambda)\lambda^r$$

en appliquant la proposition précédente on trouve :

$$(10) \qquad \frac{\partial f^*}{\partial \lambda^i} = \frac{2}{n+1} a_i, \qquad i = 1,..n.$$

d'où en transportant (9) et (10) dans (7) :

$$(11) \qquad z^i_{jk} = \frac{1}{n+1}\left(\delta^i_j a_k(\lambda) + \delta^i_k a_j(\lambda) + \lambda^i \frac{\partial^2 (a_r(\lambda)\lambda^r)}{\partial \lambda^j \partial \lambda^k}\right)$$

ce qui montre que Z est univoquement déterminé par A et par les conditions de l'énoncé. Les relations (4), (5), (9) entraînent alors: $Z_\lambda \Xi_\lambda(\lambda) = \Xi_\lambda(\lambda)\left(1, \frac{2}{n+1} A(\lambda)\lambda\right)$ pour tout système quadratique singulier Ξ en x. Il reste à établir le théorème d'existence, lequel est de nature locale. Soit A un système singulier de covecteurs sur V. Pour tout repère du 2^e ordre H on désigne par $z'^i_{jk} : L_{n,1} \to R$ le deuxième membre de (11) où $(a_i)_{i=1,..n}$ représente le transformé A_{H_1} de la restriction de A à $T_{\pi(H)}$; H_1 est le repère ordinaire déterminé par H. Soit $Z'_H : L_{n,1} \to \overline{L}^2_{n,o}$ obtenue en posant $Z'_H(\lambda) = (z'^i_{jk}(\lambda))_{i,j,k=1,..n}$. On remarque que les z'^i_{jk} sont homogènes de degré 0 et symétriques par rapport aux indices inférieurs; les z'^i_{jk} vérifient aussi (2), (3) et (6) où f^* est déterminée par (9). Il en résulte que $Z'_H : L_{n,1} \to L^2_{n,o}$ est la transformée par H d'une application $Z''_H : T_x \to \Pi^2_{o,x}$, où $x = \pi(H)$, vérifiant l'énoncé local pour la restriction de A à T_x. A cause de l'unicité Z''_H est indépendant de $H \in \mathcal{H}^2_x$; il en résulte que l'application $\psi : \mathcal{H}^2 \underset{V}{\times} T \to \Pi^2_o$ qui à (H, λ) tel que $\pi(H) = \pi(\lambda)$ fait correspondre $Z''_{H,\lambda}$ induit une application $Z : T \to \Pi^2_o$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

2. Connexions normales.

Un élément de connexion affine (on dira désormais simplement : élément de connexion) X en x induit en vertu de la définition (II, 3, 2) et de la proposition (III,3,2) l'application $\Lambda^\#(X) : T_x \to T^2_x$ qui à λ fait correspondre $\Lambda_1(X, \lambda)$. Les champs verticaux $\Lambda_1 : T(\mathcal{T}_x) \to T^2(\mathcal{T}_x)$ définis dans la proposition (III,3,1) sont quadratiques. $\Lambda^\#(X)$ est donc un élément quadratique parce que transformé de l'élément quadratique $\Lambda_1 : T_{\hat{x}}(\mathcal{T}_x) \to T^2_{\hat{x}}(\mathcal{T}_x)$ au moyen de $\xi(X) \in \overline{\Pi}^2(\mathcal{T}_x, V)$. On a donc une application $\Lambda^\# : Q \to C$; une connexion $X : V \to Q$ définit le champ quadratique $\Lambda^\# \circ X$; une connexion de vecteurs en x, c'est-à-dire une application $X : T_x \to Q_x$ induit en x le système quadratique $\Lambda^\# \circ X : T_x \to C_x$.

Soit $\tilde{T}^2$ l'espace des vecteurs du 2^e ordre non holonomes [10, b] réguliers, c'est-à-dire le sous-espace de $\tilde{J}^2(V,R)$ formé des Z tels que $\alpha(Z) = 0$ et $\beta(Z)$, $\overline{\beta}Z \in T$. On remarque que l'injection $u : \overline{T}^2 \to T(T)$ considérée dans (II, 1) se prolonge en une bijection $u : \tilde{T}^2 \to T(T)$. Désignons par $Q \underset{V}{\times} T \underset{V}{\times} T$ la sous-variété de $Q \times T \times T$ formée des (X, λ, μ) tels que $q(X) = \pi(\lambda) = \pi(\mu)$. On a l'application $\Delta : Q \underset{V}{\times} T \underset{V}{\times} T \to \tilde{T}^2$ qui à (X, λ, μ) fait correspondre $u^{-1}(\overline{\tau} X \lambda \bullet j_o(\hat{\mu}))$; $\bullet$ est le prolongement de $\Pi \underset{V}{\times} T \to T$ à $J(\Pi \underset{V}{\times} T, R) \to J(T, R)$. On a au moyen de la proposition (IV, 3, 2) : $\Delta(X, \lambda, \lambda) = \Lambda(X, \lambda)$.

DEFINITION IV, 2, 1.

a) $\Delta(X, \lambda, \mu)$ *est le déplacement infinitésimal de* μ *opéré par* X *le long de* λ.

b) Une connexion de vecteurs locale $X : T_x \to Q_x$ *est normale si* $j_\lambda(\nu \to \Delta(X_\nu, \lambda, \mu))$ *est trivial dans* $J(\tilde{T}^2_x, T_x)$ *pour tout* $\lambda, \mu \in T_x$. *Une connexion de vecteurs est normale si elle l'est en chaque point.*

D'une manière intuitive on peut dire qu'une connexion de vecteurs $X : T \to Q$ est normale si, pour λ, $\mu \in T_x$, le déplacement infinitésimal de μ opéré par X_ν le long de λ est indépendant de ν au 1$^{\text{er}}$ ordre lorsque ν est voisin de λ dans T_x. Convenons qu'un système quadratique est singulier au sens large s'il satisfait à l'axiome b) de la définition (IV, 1, 2). On dira qu'une connexion de vecteurs X est à torsion constante ou ponctuelle si $\theta \circ X : T \to S$ est constante sur chaque fibre de T.

PROPOSITION IV, 2, 1.

Pour qu'une connexion de vecteurs en un point à torsion constante soit normale, il faut et il suffit que son système quadratique soit singulier au sens large.

Soit $\tilde{\mathfrak{L}}^2_{n,m}$ la sous-variété de $\tilde{J}^2(R^n, R^m)$ formée des Z tels que $\alpha(Z) = \beta(\beta(Z)) = 0$; on écrit $\tilde{\mathfrak{L}}^2_n = \tilde{\mathfrak{L}}^2_{n,n}$. On peut représenter $Z \in \tilde{\mathfrak{L}}^2_{n,m}$ par un systèmetriple de coordonnées canoniques :

$$((z^j_i)_{\substack{i=1,..m\\ j=1,..n}}, (z'^j_i)_{\substack{i=1,..m\\ j=1,..n}}, (z^j_{ik})_{\substack{i,k=1,..m\\ j=1,..n}}) ; (z'^j_i)_{\substack{i=1,..m\\ j=1,..n}} = \beta(Z),$$

$(z'^j_i)_{i=1,..m} = \overline{\beta} Z$; les composantes troisièmes sont définies comme pour les jets semi-holonomes [10, b]. L'espace $Q^{(n)}$ des éléments de connexion sur R^n en 0 est une sous-variété de $\tilde{\mathfrak{L}}^2_n$; les coordonnées canoniques de $Z \in Q^{(n)}$ satisfont aux conditions caractéristiques suivantes : $(z^j_i)_{i=1,..n}$ est la matrice unité, $(z'^j_i)_{i,j=1,..n}$ est la matrice nulle. Les coordonnées canoniques d'un élément de $Q^{(n)}$ sont par définition ses composantes troisièmes dans $\tilde{\mathfrak{L}}^2_n$. Posons enfin $\tilde{L}^2_{n,k} = \tilde{T}^2_k(R^n, 0)$.

Soient $A : T_x \to Q_x$ une connexion de vecteurs, H un corepère du 2$^{\text{e}}$ ordre en x, H_1 le corepère ordinaire associé. On a :

$$\text{(1)} \qquad \begin{array}{ccccc} T_x \times T_x \times T_x & \xrightarrow{\varphi} & Q_x \times T_x \times T_x & \xrightarrow{\Delta} & \tilde{T}^2 \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{H}_1} & & \downarrow{\scriptstyle H^*} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{H}} \\ L_{n,1} \times L_{n,1} \times L_{n,1} & \xrightarrow{\varphi'} & Q^{(n)} \times L_{n,1} \times L_{n,1} & \xrightarrow{\Delta_n} & \tilde{L}^2_{n,1} \end{array}$$

$\tilde{H}_1$ transforme (λ, μ, ν) en $(H_1\lambda, H_1\mu, H_1\nu)$; $\tilde{H}(Z) = HZ$ est bien défini par la composition des jets du 2$^{\text{e}}$ ordre non holonomes [10] ; $H^*(X, \lambda, \mu) = j_o(\tilde{H}_1) \bullet XH^{-1}, H_1\lambda, H_1\mu)$ où $XH^{-1} \in \tilde{J}^2(V, R^n)$ est obtenu par composition de jets du 2$^{\text{e}}$ ordre non holonomes et où $\bullet$ désigne le prolongement de $J(R^n, V) \underset{V}{\times} J(V, R^n) \to J(R^n)$ à $J(J(R^n, V) \underset{V}{\times} J(V, R^n), R^n) \to J(J(R^n), R^n)$. On a désigné par φ l'application qui à (λ, μ, ν) fait correspondre (A_ν, λ, μ) ; les bijections $\tilde{H}_1$, H^* transforment φ en $\varphi' : ((\lambda^i), (\mu^i), (\nu^i))_{i=1,..n} \to ((a^i_{jk}(\nu)_{i,j,k=1,..n}, (\lambda^i)_{i=1,..n}, (\mu^i)_{i=1,..n})$. Δ_n est l'application Δ dans le cas des connexions affines sur R^n. En tenant compte de la signification des coordonnées canoniques des jets du 2$^{\text{e}}$ ordre non holonomes on voit que

Δ_n fait correspondre $((\mu^i),(\lambda^i),(-x^i_{rs}\,\mu^r\lambda^s))_{i=1,..n}$ à $((a^i_{jk})_{i,j,k=1,..n},(\lambda^i)_{i=1,..n},(\mu^i)_{i=1,..n})$. Posons $A^i(\lambda,\mu,\nu) = -a^i_{rs}(\nu)\mu^r\lambda^s$, $i=1,..n$. En vertu de la définition (IV, 2, 1) et de (1), A est normale si $j_\lambda(\nu \to \Delta_n(\varphi'(\lambda,\mu,\nu)))$ est trivial pour tout λ, $\mu \in L_{n,1}$. Cette condition équivaut aux identités en λ, μ: $\dfrac{\partial A^i}{\partial \nu^j}(\lambda,\mu,\lambda)=0$, $i,j=1,..n$ ou encore aux identités en λ :

(2) $$\frac{\partial a^i_{jr}}{\partial \lambda^k}(\lambda)\lambda^r = 0 \qquad i,j,k=1,..n.$$

Il s'agit ensuite d'exprimer au moyen des fonctions a^i_{jk} que le système quadratique de A est singulier au sens large. Compte tenu de l'identité $\Delta(X,\lambda,\lambda)=\Lambda(X,\lambda)$, de la définition (IV, 1, 2) et du diagramme (1), le système quadratique de A est singulier au sens large si on a les identités en λ: $j^2_\lambda(\nu \to A^i(\lambda,\lambda,\nu)) = j^2_\lambda(\nu\to A^i(\nu,\nu,\nu))$, $i=1,..n$ c'est-à-dire :

(3) $$\Big(\frac{\partial a^i_{jr}}{\partial \lambda^k}(\lambda) + \frac{\partial a^i_{rj}}{\partial \lambda^k}(\lambda)\Big)\lambda^r = 0; \qquad i,j,k=1,..n.$$

Il reste à voir que (2) équivaut à (3) si la torsion de A est constante. On a vu dans (III, 2) que la torsion d'un élément de connexion est son image par l'application canonique $\theta: Q \to Q/\Pi^2_o$. Soit M le sous-espace vectoriel de $R^{n^3} = \{x^i_{jk}\}_{i,j,k=1,..n}$ formé des éléments symétriques par rapport aux indices inférieurs. A l'action de Π^2_o sur Q correspond par H^* celle de M comme groupe de translations sur $Q^{(n)}$ identifié à R^{n^3}. Il en résulte que les fonctions $a^i_{jk}-a^i_{kj}$ sont indépendantes de $\lambda \in L_{n,1}$. On a donc: $\dfrac{\partial a^i_{jk}}{\partial\lambda^l} = \dfrac{\partial a^i_{kj}}{\partial\lambda^l}$; $i,j,k=1,..n$ et ceci entraîne que (2) équivaut à (3).

Soit Q^* l'image de Q par l'application $\bar\tau' : J(\Pi,V) \to J(\Pi,V)$ qui à X fait correspondre $\bar\tau X$. La variété Π^2_o opère à gauche sur Q^*; si on a $X \in Q^*, Z \in \Pi^2_o$, $q(X) = \alpha(Z)$, alors ZX est par définition obtenu par prolongement dans $\Pi \underset{V}{\times} \Pi \to \Pi$ à $J(\Pi \underset{V}{\times} \Pi, V) \to J(\Pi, V)$. On a une variété quotient $S^* = Q^*/\Pi^2_o$ et une application canonique $\theta^*: Q^* \to S^*$; $\bar\tau'$ est compatible avec θ et θ^*; d'où :

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\bar\tau'"] \arrow[d, "\theta"'] & Q^* \arrow[d, "\theta^*"] \\ S \arrow[r, "\bar\tau''"] & S^* \end{tikzcd}$$

Soit $\Lambda'^{\#}: Q^* \to C$ l'application obtenue en composant $\bar\tau'$ et $\Lambda^{\#}: Q \to C$. On vérifie trivialement que $\Lambda'^{\#}$ permute avec les éléments de Π^2_o opérant à gauche. C'est pourquoi il est commode de modifier les définitions de la manière suivante : désormais on appelle élément de connexion affine un élément $X \in Q^*$; $\theta^*(X)$ est la torsion de X; $\bar\tau X \in Q$ devient le coélément [11] de connexion affine de X; on redéfinit de même les éléments de connexion généralisés. La théorie géodésique que l'on a faite reste valable si l'on convient que la vitesse ou l'élément de contact géodésique d'un nouvel élément de connexion généralisé est par définition celui de son coélément; on modifie de la même manière la définition (IV, 2, 1). Le champ de vecteurs géodésique attaché à une connexion de vecteurs $X : T \to Q^*$ est alors le champ défini par le système quadratique associé $\Lambda'^{\#} \circ X : T \to C$; la proposition (IV, 2, 1) est donc conservée. Désormais on entend par connexion, torsion, etc... les notions modifiées dans le sens qui précède; toutefois on conservera les notations Q, θ, S, $\Lambda^{\#}$ etc..., au lieu d'adopter Q^*, θ^*, S^*, $\Lambda'^{\#}$, etc...

Soit $S \overset{\times}{\underset{V}{}} C$ la sous-variété de $S \times C$ formée des (Θ, Ξ) tels que $t(\Theta) = p(\Xi)$. Ambrose-Palais-Singer ont obtenu par des procédés classiques [1] un résultat qui découle essentiellement de :

PROPOSITION IV, 2, 2.

L'application $(\theta, \Lambda^{\#}) : Q \to S \overset{\times}{\underset{V}{}} C$ *est un difféomorphisme.*

Il s'agit d'exhiber une inverse à une application. L'action de Π^2_o sur Q et l'identité I sur C induisent une relation d'équivalence sur la sous-variété $Q \overset{\times}{\underset{V}{}} C$ de $Q \times C$ formée des (X, Ξ) tels que l'on ait $q(X) = p(\Xi)$; en vertu du lemme (III, 4, 1) $Q \overset{\times}{\underset{V}{}} C / \Pi^2_o \times I$ est difféomorphe à $S \overset{\times}{\underset{V}{}} C$. Il s'agit donc de définir $\varphi : Q \overset{\times}{\underset{V}{}} C \to Q$ qui se projette en une application $\chi : Q \overset{\times}{\underset{V}{}} C / \Pi^2_o \times I \to Q$, inverse de $(\theta, \Lambda^{\#})$. Il suffit de poser $\varphi(X, \Xi) = \zeta(\Xi, \Lambda^{\#}(X))X$, où $\zeta : C \overset{\times}{\underset{V}{}} C \to \Pi^2_o$ est l'application définie dans la proposition (IV, 1, 1).

COROLLAIRE IV, 2, 2.

Soient $\Xi : V \to C$ *un champ quadratique,* $\Theta : V \to S$ *un champ d'éléments de torsion; il existe une et une seule connexion ponctuelle dont la torsion soit* Θ *et dont le champ de vecteurs géodésique soit le champ du* 2^e *ordre défini par* Ξ.

L'application $X : V \to Q$ qui à x fait correspondre $\chi(\Theta_x, \Xi_x)$ est la connexion cherchée : en effet $\Lambda^{\#} \circ X : V \to C$ s'identifie au champ de vecteurs géodésique de X en vertu de la définition de $\Lambda^{\#}$.

On savait déjà par le corollaire (III, 3, 4) qu'il existe des connexions de vecteurs dont le champ géodésique et la torsion sont arbitraires. Si le champ de vecteurs du 2^e ordre donné est homogène au sens de la définition (IV, 1, 3), alors on peut distinguer une solution canonique de ce problème, c'est-à-dire une connexion déterminée par des conditions supplémentaires intrinsèques. Cela découle de la proposition suivante qui éclaire un résultat classique [5] .

PROPOSITION IV, 2, 3.

Soient $\Theta : T \to S$ *une application compatible avec les projections naturelles sur* V *et* Ξ *un champ de vecteurs du* 2^e *ordre homogène. Il existe une et une seule connexion de vecteurs* X *dont la torsion soit* Θ, *dont le champ géodésique soit* Ξ *et dont le* *système quadratique associé soit singulier.*

En vertu de la proposition (IV, 1, 2) il existe un système quadratique singulier $\Xi^* : T \to C$ tel que l'on ait $\Xi^*_\lambda(\lambda) = \Xi(\lambda)$ pour tout $\lambda \in T$. Soit $X : T \to Q$ l'application qui à λ fait correspondre $\chi(\Theta_\lambda, \Xi^*_\lambda)$. On a : $\Lambda^\#(X_\lambda) = \Xi^*_\lambda, \Lambda(X_\lambda, \lambda) = \Lambda^\#(X_\lambda)(\lambda) = \Xi^*_\lambda(\lambda) = \Xi(\lambda)$ ce qui montre que Ξ est le champ de vecteurs géodésique de X et que le système quadratique défini par X est singulier. Il est évident que Θ est la torsion de X. Il reste à voir l'unicité. Si X et Y sont des connexions de vecteurs satisfaisant aux conditions de l'énoncé, alors $\Lambda^\# \circ X$ et $\Lambda^\# \circ Y$ sont des systèmes quadratiques singuliers définissant le même champ homogène Ξ ; on a donc en vertu de la proposition (IV, 1, 2) : $\Lambda^\#(X_\lambda) = \Lambda^\#(Y_\lambda)$ pour tout $\lambda \in T$. $\theta(X_\lambda) = \theta(Y_\lambda)$ entraîne alors $X_\lambda = Y_\lambda$ pour tout $\lambda \in T$ car on a vu dans la proposition (IV, 2, 2) que $(\theta, \Lambda^\#) : Q \to S \times_V C$ est injective.

Dans la suite on identifiera souvent une connexion d'éléments de contact $X : T_c \to Q$ avec la connexion de vecteurs $X \circ \rho$ induite, où ρ est l'application canonique de T sur T_c. C'est dans ce sens qu'on parlera du champ de vecteurs géodésique, du système quadratique et de la normatité d'une connexion d'éléments de contact. On dit aussi par abus de langage que $\Theta : V \to S$ est la torsion d'une connexion de vecteurs à torsion ponctuelle $\Theta \circ \pi : T \to S$. La démonstration de la proposition précédente montre que X est une connexion de droites de contact lorsque la torsion $\Theta : T \to S$ qui contribue à déterminer X ne dépend que de l'élément de contact. Il existe donc une et une seule connexion de droites de contact (que l'on appellera désormais, sauf risque de confusion, simplement éléments de contact) à système quadratique singulier, dont la torsion soit arbitrairement donnée à priori et dont le champ de vecteurs géodésique soit un champ homogène donné. Remarquons d'ailleurs que le champ de vecteurs géodésique d'une connexion d'éléments de contact est nécessairement homogène. Compte tenu des conventions de langage adoptées, la proposition (IV, 2, 3) entraîne un corollaire dont la signification géométrique est plus concrète.

COROLLAIRE IV, 2, 3.

Soit Ξ un champ de vecteurs homogène du 2^e ordre, $\Theta : V \to S$ un champ d'éléments de torsion. Il existe une et une seule connexion normale d'éléments de contact dont le champ de vecteurs géodésique soit Ξ et la torsion Θ.

En effet, il existe une connexion de vecteurs X à système quadratique singulier, dont la torsion soit Θ et le champ géodésique Ξ. Puisque la torsion de X ne dépend que de l'élément de contact, X est une connexion d'éléments de contact; X est normale en vertu de la proposition (IV, 2, 1). Le système quadratique d'une autre connexion Y satisfaisant aux conditions de l'énoncé est singulier à cause de la proposition (IV, 2, 1).

Il résulte alors de la proposition (IV, 2, 3) que les connexions X et Y à système quadratique singulier coïncident puisque elles ont même torsion et même champ de vecteurs géodésique.

Dans le cas où Θ est la torsion nulle, X est une réalisation géométrique de Ξ définie par des conditions intrinsèques : X est la connexion normale sans torsion d'éléments de contact dont les géodésiques paramétrées sont les intégrales du champ homogène du 2^e ordre Ξ.

3. Connexions normales unimodulaires.

L'application $D : \Pi_o \to R^*$ que l'on a définie dans (IV, 1) est un foncteur pour le groupe multiplicatif R^*. On peut donc poser :

DEFINITION IV, 3, 1.

Une structure unimodulaire sur V est la donnée d'un foncteur de Π dans R^* dont la restriction à Π_o soit D.

Soit $D : \Pi \to R^*$ une structure unimodulaire; on désignera par Π_D le sous-groupoïde différentiable de Π formé des X tels que $D(X) = 1$. Toute SL_n-structure au sens de la définition (III, 4, 1) détermine une structure unimodulaire D telle que Π_D coïncide avec le groupoïde Π_{SL_n} de la SL_n-structure que l'on a défini dans (III, 4). En effet, soit $\mathcal{H}_{SL_n} \overset{\times}{_V} \Pi \overset{\times}{_V} \mathcal{H}_{SL_n}$ la sous-variété de $\mathcal{H}_{SL_n} \times \Pi \times \mathcal{H}_{SL_n}$ formée des (Y', X, Y) tels que $Y'^{-1}XY$ soit défini; l'application φ: $\mathcal{H}_{SL_n} \overset{\times}{_V} \Pi \overset{\times}{_V} \mathcal{H}_{SL_n} \to R^*$ qui à (Y', X, Y) fait correspondre $Det(Y'^{-1}XY)$ est indépendante de Y, Y' et induit un foncteur $D : \Pi \to R^*$. On voit aisément : $\Pi_D = \Pi_{SL_n}$. Réciproquement une structure unimodulaire D étant donnée, on peut construire une classe de SL_n-structures auxquelles D soit associée. En effet on obtient une SL_n-structure à partir de D en fixant un repère X et en considérant la sous-variété $\mathcal{H}_X$ de $\mathcal{H}$ formée des composés YX où $Y \in \Pi_D$; $\mathcal{H}_X$ est la variété des repères distingués d'une SL_n-structure engendrant D. Une structure unimodulaire correspond à une classe de SL_n-structures définissant le même groupoïde Π_{SL_n}. On suppose désormais V orientable, condition nécessaire et suffisante pour que V admette une structure unimodulaire. L'identification canonique de $\mathcal{T}^*$ et de $\mathcal{T}^*_1$ donne un sens à l'énoncé suivant.

PROPOSITION IV, 3, 1.

Soient D une structure unimodulaire sur V et X une connexion normale d'éléments de contact. L'application $X^* : T \to \mathcal{T}^*_1$ qui à λ fait correspondre $\overline{D}X_\lambda$ est un système singulier de covecteurs.

Puisque X^* ne dépend évidemment que de l'élément de contact, il s'agit seulement de vérifier la propriété b) de la définition (IV, 1, 4). Désignons par τ l'inversion dans R^* comme dans Π. Il est évident qu'un système $A : T \to \mathfrak{T}^*_1$ est singulier si et seulement si $\bar{\tau}A : T \to \mathfrak{T}^*_1$ l'est. Puisque D est un foncteur, cette remarque permet de démontrer la proposition en adoptant la signification première de Q, c'est-à-dire antérieure aux conventions précédant la proposition (IV, 2, 2). Soit H un repère en x du 2^e ordre distingué relativement à une SL_n-structure compatible avec D; soit H_1 le repère ordinaire déterminé par H. On a :

(1)
$$\begin{array}{ccccccc} T_x & \xrightarrow{X} & Q_x & \xrightarrow{\bar{D}} & \mathfrak{T}^*_{1,x} & \xrightarrow{u} & \mathfrak{T}^*_x \\ \tilde{H}_1 \downarrow & & \downarrow \tilde{H} & & \chi & & \downarrow \tilde{H}_1 \\ L_{n,1} & \xrightarrow{X_H} & Q^{(n)} & & \longrightarrow & & \mathfrak{L}_{1,n} \end{array}$$

u est l'identification naturelle, $\tilde{H}$ la transformation dont on s'est servi dans la proposition (IV, 2, 1). Compte tenu de la signification des coordonnées canoniques d'un élément de $Q^{(n)}$ on a : $\chi : (a^i_{jk})_{i,j,k=1,..n} \to (a^r_{ri})_{i=1,..n}$. Soit $X_H : (\lambda^i)_{i=1,..n} \to (a^i_{jk}(\lambda))_{i,j,k=1,n}$.
Les remarques qui suivent la définition (IV, 1, 4) et le diagramme (1) impliquent que X^* est singulier si et seulement si l'on a :

$$\frac{\partial a^r_{rs}}{\partial \lambda^i}(\lambda)\lambda^s = 0, \qquad i = 1,..n;\ \lambda \in L_{n,1} \tag{2}$$

En comparant (1) avec (1) et (2) de la proposition (IV, 2, 1) on voit que X est normale si et seulement si l'on a :

$$\frac{\partial a^i_{jr}}{\partial \lambda^k}(\lambda)\lambda^r = 0, \qquad i,j,k = 1,..n;\ \lambda \in L_{n,1} \tag{3}$$

La démonstration est achevée car (2) est une conséquence de (3).

Conformément à la définition (III, 1, 1), on peut poser :

DEFINITION IV, 3, 2.

Un élément de connexion unimodulaire sur une variété V munie d'une structure unimodulaire D est un élément de Π_D-connexion.

On est maintenant à même de traiter la question suivante : parmi toutes les connexions d'éléments de contact admettant une torsion et un feuilletage géodésique donnés à priori (il en existe en vertu du corollaire (III, 3, 4)) peut-on en distinguer une qui soit déterminée par des propriétés intrinsèques ? Remarquons d'abord que sur une variété munie d'une structure unimodulaire, il existe des connexions unimodulaires de vecteurs (d'éléments de contact) dont la torsion et le champ de vecteurs (le feuilletage) géodésique soit donnés à priori; ceci résulte des critères de la proposition (III, 3, 4). Parmi toutes les connexions d'éléments de contact admettant une torsion ponctuelle et un feuilletage géodésique donnés, il en existe une et une seule qui soit normale. Cela découle de la proposition suivante qui rejoint des énoncés anciens [5] .

PROPOSITION IV, 3, 2.

Soient D une structure unimodulaire, Θ un champ d'éléments de torsion, Ξ un feuilletage du 2^e ordre, $A : T \to \mathcal{T}_1^*$ un système singulier de covecteurs. Il existe une et une seule connexion d'éléments de contact X satisfaisant aux conditions suivantes :

a) X est normale

b) Θ est la torsion de X

c) Ξ est le feuilletage géodésique de X

d) $\overline{D} X_\lambda = A_\lambda$ pour tout $\lambda \in T$.

Soit Ξ' un champ de vecteurs du 2^eordre homogène, dont le feuilletage soit Ξ; Ξ' existe car,en vertu de la proposition (III, 3, 3) , on a une connexion d'éléments de contact dont le feuilletage géodésique soit Ξ; le champ de vecteurs géodésique de cette connexion est homogène et engendre le feuilletage Ξ, en vertu de la proposition (III,3,2,c). Soit Y une connexion normale d'éléments de contact dont la torsion soit Θ et le champ de vecteurs géodésique Ξ'; Y existe en vertu du corollaire (IV, 2, 3) et vérifie a), b) et c). Au moyen d'un opérateur $Z : T \to \Pi_o^2$ défini adéquatement on transformera Y en une connexion normale d'éléments de contact $ZY : \lambda \to Z_\lambda Y_\lambda$ qui vérifie d), mais sans altérer la torsion ni le feuilletage géodésique; ZY est alors une solution. L'application $A' : T \to \mathcal{T}_1^*$ qui à λ fait correspondre $\overline{D} Y_\lambda$ est un système singulier de covecteurs en vertu de la proposition (IV, 3, 1). Soit $A'' : T \to \mathcal{T}_1^*$ l'application qui à λ fait correspondre $A_\lambda \bullet \overline{\tau} A'_\lambda$; τ est l'inversion dans R^* et $\bullet$ désigne le prolongement de la multiplication $R^* \times R^* \to R^*$ en $J(R^* \times R^*, V) \to J(R^*, V)$. On vérifie aisément que A'' s'identifie à un système singulier de covecteurs. En vertu de la proposition (IV, 1, 4) A'' détermine une application $Z : T \to \Pi_o^2$, ne dépendant que de l'élément de contact, qui transforme un système quadratique singulier en un système quadratique singulier sans altérer le feuilletage induit et qui vérifie $\overline{D} Z_\lambda = A''_\lambda$, $\lambda \in T$. Montrons que $ZY : \lambda \to Z_\lambda Y_\lambda$ satisfait à toutes les conditions de l'énoncé. ZY est manifestement une connexion d'éléments de contact obtenu sans altérer la torsion de Y. Voyons ensuite que ZY est normale; en vertu de la proposition (IV, 2, 1) il suffit de s'assurer que son système quadratique $\Lambda^\# \circ ZY$ est singulier. Or on a $\Lambda^\#(Z_\lambda Y_\lambda) = Z_\lambda \Lambda^\#(Y_\lambda)$, $\lambda \in T$ dans C ce qui montre que $\Lambda^\# \circ ZY$ est le transformé par Z du système quadratique de Y; $\Lambda^\# \circ Y$ est singulier en vertu de la proposition (IV, 2, 1); il résulte alors des propriétés de Z que $\Lambda^\# \circ ZY$ est singulier aussi . On a remarqué que le feuilletage géodésique d'une connexion d'éléments de contact est induit par son système quadratique; il résulte des propriétés de Z que $\Lambda^\# \circ Y$ et $Z(\Lambda^\# \circ Y) = \Lambda^\# \circ ZY$ induisent le même feuilletage; c) est donc démontré. Il reste à vérifier d). Puisque D est un foncteur on a pour tout $\lambda \in T$: $\overline{D}(Z_\lambda Y_\lambda)=$

$\overline{D}Z_\lambda \bullet \overline{D}Y_\lambda = A''_\lambda \bullet A'_\lambda = (A_\lambda \bullet \tau A'_\lambda) \bullet A'_\lambda = A_\lambda$, où $\bullet$ est le prolongement de la multiplication dans R^* en $J(R^* \times R^*, V) \to J(R^*, V)$.

Démontrons enfin l'unicité de la solution. Soient X et X' des connexions d'éléments de contact vérifiant les propriétés de l'énoncé. Puisque X et X' ont la même torsion, il existe une application $Z : T \to \Pi^2_o$ ne dépendant que de l'élément de contact et qui vérifie :

(1) $$X'_\lambda = Z_\lambda X_\lambda, \qquad \lambda \in T$$

X et X' ont le même feuilletage géodésique; il existe donc une fonction $f : T \to R$, homogène de degré 1 telle que l'on ait dans T^2 :

(2) $$\Lambda(X'_\lambda, \lambda) = \Lambda(X_\lambda, \lambda)(1, f(\lambda)), \qquad \lambda \in T$$

En vertu de la proposition (IV, 1, 3) il existe un système singulier $B : T \to \mathfrak{T}^*_1$ vérifiant :

(3) $$f(\lambda) = B(\lambda)\lambda, \qquad \lambda \in T$$

On a par la proposition (IV, 1, 4) une application ne dépendant que de l'élément de contact $Z' : T \to \Pi^2_o$ qui transforme un système quadratique singulier en un système quadratique singulier, sans altérer son feuilletage du 2^e ordre et qui vérifie

(4) $$\overline{D}Z'_\lambda = \frac{n+1}{2}B_\lambda, \qquad \lambda \in T$$

Le système quadratique de X est singulier en vertu de la proposition (IV, 2, 1); on a alors à cause de (3), (4) et de la proposition (IV, 1, 4)

(5) $$Z'_\lambda \Lambda(X_\lambda, \lambda) = \Lambda(X_\lambda, \lambda)(1, f(\lambda))$$

Les propriétés de Z' entraînent que le système quadratique $\lambda \to Z'_\lambda \Lambda^\#(X_\lambda)$ est singulier; ce système définit le même champ de vecteurs du 2^e ordre que le système quadratique singulier $\Lambda^\# \circ X'$; ceci résulte de la comparaison de (2) et de (5); on a alors en vertu de (1) et de la proposition (IV, 1, 2) :

$$Z'_\lambda \Lambda^\#(X_\lambda) = \Lambda^\#(X'_\lambda) = \Lambda^\#(Z_\lambda X_\lambda) = Z_\lambda \Lambda^\#(X_\lambda), \quad \lambda \in T$$

Il en résulte d'après la proposition (IV, 1, 1, a) :

(6) $$Z_\lambda = Z'_\lambda, \qquad \lambda \in T$$

$\overline{D}X_\lambda = \overline{D}X'_\lambda = \overline{D}Z_\lambda \bullet \overline{D}X_\lambda$ et (6) entraînent : $\overline{D}Z'_\lambda = j_{\pi(\lambda)}(\hat{1})$. On sait par la proposition (IV, 1, 4) que l'application $\lambda \to Z'_\lambda$ est univoquement déterminée par $\lambda \to \overline{D}Z'_\lambda$. Il en résulte : $Z'_\lambda = j^2_{\pi(\lambda)}$; (1) et (6) entraînent enfin : $X_\lambda = X'_\lambda$, $\lambda \in T$.

COROLLAIRE IV, 3, 2.

Soient Θ un champ d'éléments de torsion, Ξ un feuilletage du 2^e ordre sur une variété V munie d'une structure unimodulaire; il existe une et une seule connexion normale unimodulaire d'éléments de contact dont la torsion soit Θ et le feuilletage géodésique Ξ.

La connexion cherchée X est déterminée en vertu de la proposition précédente par les données Θ, Ξ et $A : \lambda \to j_{\pi(\lambda)}(\hat{1})$.

Dans le cas où Θ est la torsion nulle, X est une réalisation géométrique de Ξ définie par des conditions intrinsèques; X est la connexion normale unimodulaire d'éléments de contact sans torsion, dont les courbes géodésiques sont les feuilles de Ξ.

Addendum.

On a omis de définir quelques notations dont le sens est généralement clair d'après le contexte; les applications ci-dessous combleront cette lacune.

1. Soit Φ un groupoïde sur V; on désigne généralement par a, b les applications de Φ dans V qui à $f \in \Phi$ font correspondre sa source $a(f)$ et son but $b(f)$.
2. Soient f une application différentiable définie sur la variété V et $x \in V$; on écrit $j_x(f)$ au lieu de $j_x^1(f)$.
3. Soit V une variété; on désigne par $\mathcal{T}_{k,x}(V)$ ou par $\mathcal{T}_k(V, x)$ l'espace des k-vitesses en $x \in V$; $\mathcal{T}_k(V, W)$ désigne la sous-variété de $\mathcal{T}_k(V)$ formée des k-vitesses dont le but appartient à la sous-variété W de V.
4. $\bar{L}^2_{n,o}$ désigne le noyau de la projection naturelle : $\bar{L}^2_n \to L_n$.

Bibliographie.

[1] AMBROSE-SINGER-PALAIS. Sprays, Anais da Acad. Bras. de Ciencias. 32 (1960).

[2] D. BERNARD. Sur la géométrie différentielle des G- structures, Annales de l'Institut Fourier, 10 (1960).

[3] BOURBAKI. a) Topologie générale I. b) Topologie générale V.

[4] E. CARTAN. Sur les variétés à connexion projective, Bull. Soc. Math. France 42 (1924).

[5] J. DOUGLAS. The general geometry of paths. Ann. of Math., 29 (1928).

[6] C. EHRESMANN. Sur la théorie des variétés feuilletées, Rend. di Mat. 10 (1951).

[7] C. EHRESMANN. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Coll. de Topologie, Brux. (1950).

[8] C. EHRESMANN. Sur les structures infinitésimales régulières. Proc. Inst. Congress Math. Amsterdam, (1954).

[9] C. EHRESMANN. a)Calcul des jets. Comptes Rendus Acad. Sc., 233, p. 598 (1951). b) Eléments de contact et éléments d'enveloppe. Comptes Rendus Acad. Sc., 234, p. 1028 (1952). c) Les prolongements d'un espace fibré différentiable. Comptes Rendus Acad. Sc., 240, p. 1755 (1955).

[10] C. EHRESMANN. a) Extension du calcul des jets aux jets non holonomes. Comptes Rendus Acad. Sci., 239, p. 1762 (1954). b) Application de la notion de jet non holonome. Comptes Rendus Acad. Sc., 240, p. 397 (1955).

[11] C. EHRESMANN. Sur les connexions d'ordre supérieur. Atti del V Congresso dell'Unione Math. Ital. Pavia-Torino (1956).*

[12] C. EHRESMANN. a) Gattungen von Lokalen Strukturen, Jahresbericht Deutsch.Math. Vereinigung, 60, (1957). b) Catégories topologiques et catégories différentiables. Coll. Géom. Diff. Glob. Brux. (1959).

c) Catégories inductives et pseudogroupes. Ann. Inst. Fourier, 10 (1960).

[13] PALAIS. A global formulation of the Lie theory of transformation groups. Mem. of Amer. Math. Soc. (1957).

[14] PONTRJAGIN. Topologische Gruppen. Leipzig (1957).

[15] N. STEENROD. Topology of fibre bundles. Princeton (1951).

[16] YANO. Les espaces d'éléments linéaires à connexion projective normale et la géométrie projective générale des paths. Proc. Phys. Mat. Soc. Japan., 24, (1942).

[17] YEN CHIH-TA. Sur la connexion projective normale associée à un feuilletage du 2^{e} ordre. Ann. di Math. Ser. IV, 34 (1953).

---

* Cette note a été développée dans un cours inédit de géométrie différentielle professé à l'Institut Henri Poincaré (1960-1961).

Table des Matières.

Introduction : I

Chapitre I. Connexions ponctuelles dans un espace fibré soudé à sa base.

1. Connexions dans un groupoïde.... 1
2. Connexions dans un espace fibré soudé à sa base.... 4
3. Torsion.... 8

Chapitre II. Connexions généralisées.

1. Champs du 2^{e} ordre.... 15
2. Connexions de vitesses et d'éléments de contact.... 18
3. Champs géodésiques.... 20

Chapitre III. Connexions affines et projectives.

1. Connexions affines.... 30
2. Torsion.... 31
3. Champs géodésiques.... 34
4. Connexions compatibles avec une G - structure.... 38
5. Connexions projectives.... 43
6. Torsion et champs géodésiques des connexions projectives.... 47

Chapitre IV. Connexions affines normales.

1. Systèmes quadratiques.... 52
2. Connexions normales.... 59
3. Connexions normales unimodulaires.... 64

Addendum 68

Bibliographie 69