NGUYÊNDÌNHNGỌC

Sur les espaces fibrés et les prolongements

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann, tome 4 (1962-1963), exp. nº 4, p. 1-74

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1962-1963__4__A4_0>

TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
SEMINAIRE *dirigé par* C. EHRESMANN
MAI 1963

A Z.S. Tỉnh Hà

SUR LES ESPACES FIBRES ET LES PROLONGEMENTS

NGUYỄNĐÌNHNGỌC

INTRODUCTION

L'objet de ce mémoire est de continuer les études classiques sur la classification des espaces fibrés principaux [27] [10] [6] [11] [18] [1] , la restriction et l'extension du groupe structural [8] [6] [10] [12] , et les prolongements de variétés différentiables [8] [14] .

Dans les préliminaires nous avons réuni une bonne partie des notions et résultats nécessaires pour la compréhension de la suite. Néanmoins la théorie générale des prolongements de variétés différentiables de C. Ehresmann est supposée connue du lecteur.

Le chapitre I est consacré à la classification des espaces fibrés principaux topologiques et simpliciaux. Dans le premier paragraphe sont explicitées les relations entre diverses méthodes de classification connues. Il en résulte la définition d'un foncteur (X, G). Le deuxième paragraphe contient un résultat sur la relation entre ce foncteur et le foncteur cohomologique homotopique classique. Il en résulte, dans le troisième paragraphe la détermination de l'ensemble pointé (X, G) dans le cas où G a deux invariants de Postnikov non nuls.

Dans le chapitre II, nous commençons par reformuler le problème de restriction et d'extension du groupe structural en introduisant les notions de $(\tilde{G}, \varphi)$ et (f, Y)-représentabilité des espaces fibrés principaux et en les rattachant à deux problèmes universels. Dans le cas abélien, les questions de représentabilité trouvent leur réponse dans une cohomologie classifiante abélienne étudiée dans le deuxième paragraphe. Dans le cas non abélien la $(\tilde{G}, \varphi)$ représentabilité nécessite la définition d'un nouvel ensemble d'obstruction et une suite exacte qui sont étudiés au début du troisième paragraphe. Pour la (f, Y)-représentabilité nous avons obtenu une condition suffisante qui est aussi nécessaire dans un cas particulier.

Le chapitre III débute par une étude du foncteur T_p^r introduit par C. Ehresmann. Une généralisation de la notion de prolongement tensoriel est exposée dans le deuxième paragraphe. La recherche des représentations linéaires irréductibles de degré fini de quelques extensions du groupe $\overset{+}{L}{}_n^1$ termine le mémoire.

Les résultats de ce mémoire ont fait l'objet de plusieurs exposés en 1960,1961 et 1963, dans le cadre du Séminaire de Topologie et Géométrie différentielle dirigé par Monsieur C. Ehresmann.

Je suis heureux de dire ici tout ce que je sois à la bienveillance et à la pensée de Monsieur Charles Ehresmann, le profit inestimable que j'ai tiré de ses cours, des entretiens enrichissants que j'ai eu avec lui, des idées non publiées qu'il m'a communiquées généreusement, de ses précieux conseils et ses encouragements.

Que Monsieur François Bruhat qui m'a beaucoup aidé et qui m'a fait l'honneur de faire partie du Jury de cette thèse, et Monsieur Bernard Malgrange, qui a bien voulu me proposer un sujet de seconde thèse, veuillent trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Qu'il me soit permis de remercier aussi Shih Weishu pour l'aide et les conseils qu'il m'a prodigués.

PRELIMINAIRES

0.1. Extension et représentations linéaires des groupes de Lie.

Considérons le groupe $L^1_{n+} = GL_+(n, R) = G$. Les sous-groupes H des matrices diagonales $h = (\lambda_1, \dots \lambda_n)$

U^- des matrices unipotentes $u^- = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ u_{ij} & 1 \end{vmatrix}$

U^+ des matrices unipotentes $u^+ = \begin{vmatrix} 1 & u_{ij} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$T^+ = H . U^+ = U^+ H$, $T^- = H . U^- = U^- . H$

Pour toute matrice g d'ordre n posons :

$$\Delta_i(g) = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{1i} \\ g_{i1} & g_{ii} \end{vmatrix}$$

Tout homomorphisme α^+ de T^+ dans le groupe multiplicatif C^+ s'obtient comme suit :

$$\alpha^+(hu^+) = \alpha^+(h)$$

$$\alpha^+(h) = \Delta_n(h)^{\alpha^+_n} \prod_{i=1}^{i=n-1} \Delta_i(h)^{\epsilon^+_i} | \Delta_i(h) |^{\alpha^+_i - \epsilon^+_i}$$

où les α^+_i sont des paramètres complexes arbitraires et où les ε^+_i sont égaux à 0 ou 1.

Considérons une représentation irréductible ρ de $G = GL_+(n, R)$ dans un espace vectoriel complexe F de dimension finie.

La représentation ρ contient une seule représentation α^+ de dimension 1 de T^+. Les facteurs a^+ qui vérifient $\rho(t^+)\underline{a}^+ = \alpha^+(t^+)a^+$, $\underline{a}^+ \in F$, forment un sous-espace de dimension 1 de F. Deux représentations irréductibles de G qui contiennent la même représentation de dimension du sous-groupe T^+ sont équivalentes.

Appelons $\alpha^+(h)$ le plus haut poids de ρ. Soient σ un nombre complexe et m_i $(1 \leq i \leq n-1)$ des entiers positifs donnés, il existe une représentation irréductible et une seule de G dont le plus haut poids est :

$$\alpha^+(h) = det(h)^\sigma \prod_{i=1}^{i=n-1} \Delta_i(h)^{m_i}$$

Les représentations continues indécomposables du groupe additif R des nombres réels sont de la forme :

$$e^{\alpha s} K_m(s),\ m = 0, 1, 2, \dots,\ s \in R, \text{ et}$$

$$K_m(s) = \begin{vmatrix} 1 & s & s^2/2 & & s^m/m! \\ 0 & 1 & s & & s^{m-1}/(m-1)! \\ 0 & 0 & 1 & 1 & s \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Les représentations continues indécomposables du groupe linéaire GL(n,C) sont de la forme :

$$D(A) = e^{\alpha\xi} e^{i l \eta} K_m(\xi) \times C'(A) \times C''(A)$$

où ξ et η sont les logarithmes du module et de l'argument de $det A$, α un nombre complexe quelconque, l un entier quelconque, $m \geq 0$ entier, K_m défini comme plus haut, et C' et C'' sont deux représentations irréductibles rationnelles entières correspondant aux tableaux de Young de $(n-l)$ lignes au maximum.

Les représentations indécomposables continues de $GL(n, R)$ sont de la forme :

$$D(A) = e^{\alpha\xi} K_m(\xi) \times C(A)$$

ou

$$D(A) = \varepsilon(A) e^{\alpha\xi} K_m(\xi) \times C(A)$$

où $\varepsilon(A)$ est la signature de $det\ A$.

Soient F et B deux groupes topologiques (ou de Lie) séparés. Un groupe G est dit [3] [8 a] extension $E(B, F)$ si on a donné un isomorphisme i de F sur un sous-groupe distingué $i(F)$ de G et un isomorphisme j de $G/i(F)$ sur B, c'est-à-dire on a la suite exacte d'homomorphismes de groupes :

$$e \to F \xrightarrow[i]{} G \xrightarrow[j]{} B \to e$$

Une extension $E(B, F)$ est dite localement inessentielle (resp. inessentielle) s'il existe un isomorphisme local (resp. isomorphisme) de B dans E qui se projette sur la transformation identique de B. Une extension localement inessentielle est fibrée. La structure fibrée d'une extension inessentielle est triviale.

Soit K un groupe de Lie, G un sous-groupe de K, ρ une représentation de G, V l'espace de représentation de ρ. On dit qu'une représentation σ de K est une extension de la représentation ρ de G si l'espace W de représentation de σ contient V comme un sous-espace G-stable et si ρ et σ coincident sur V. Autrement dit il y a un monomor-

-phisme $\theta : V \to W$ tel que $\theta\rho(g) = \sigma(g)\theta$, pour tout $g \in G$. Soit $V_o \subset V_1 \ldots \subset V_n = V$ u-ne suite de sous-espaces vectoriels de V invariants par $\rho(G)$ et telle que la partie V_i/V_{i-1} de ρ soit irréductible, $i = 1, \ldots, n$. Désignons par ρ' la représentation induite par ρ sur la somme directe $V_1/V_o + \ldots + V_n/V_{n-1}$ alors ρ' est semi-simple, c'est-à-dire complètement réductible, et il est indépendant du choix initial des V_i, à une équi-valence près.

THEOREME (Mostow [20]). Soit G un sous-groupe analytique normal d'un groupe a-nalytique L. Soit Q un sous-groupe analytique de L tel que $Q \cap G$ soit compact. Sup-posons qu'il existe une représentation de Q qui est fidèle sur $Q \cap G$. Soit ρ une repré-sentation. Une condition nécessaire et suffisante pour que ρ puisse être étendu en une représentation σ du groupe QG est la :

Condition a) : la représentation semi-simple associée ρ' satisfait à la relation $\rho'(yxy^{-1}x^{-1}) = I$ pour tout y de QG et x dans le radical de G.

De plus la représentation étendue σ peut être choisie de sorte que le noyau de σ' contienne celui de ρ'.

THEOREME (Bruhat [2b]). - Si G est une extension inessentielle $E(B, F)$ où B est un groupe connexe et F, un groupe abélien ou résoluble connexe, alors pour toute repré-sentation irréductible σ de dimension finie de G il existe un caractère (non nécessaire-ment unitaire) λ de F, et un seul, invariant par B, et une représentation irréductible ρ de dimension finie de B, et une seule, telle que $\sigma(bf) = \lambda(f)\,\rho(b)$ où $f \in F$ et $b \in B$. Réciproquement si λ est un caractère de F invariant par B, et ρ, une représentation irréductible de dimension finie de B, alors la formule précédente détermine une représentation irréductible σ de dimension finie de G. Si B n'est pas connexe, à une re-présentation irréductible σ de dimension finie de G correspondent un caractère λ de F dont le stabilisateur B_λ dans B est d'indice fini, et une représentation irréductible ρ de dimension finie de B_λ de telle sorte que σ soit la représentation induite par la représen-tation $bf \to \rho(b)\,\lambda(f)$ du sous-groupe $G_\lambda = B_\lambda F$.

0.2. Espaces fibrés.

0.2.1. Définition d'un espace fibré à groupe structural G [8b, g]. Soient E, B, F, trois es-paces topologiques, G un groupe d'automorphismes de F, et Γ un pseudogroupe d'auto-morphismes locaux de B. Nous supposons G muni d'une topologie telle que si $s \in G, y \in F$, sy désignant le transformé de y par s, l'application $(s, y) \to sy$ soit une applica-tion continue de $G \times F$ sur F. Soit Φ l'ensemble des ouverts de $B \times F$ de la forme $U \times F$, où U est un ouvert quelconque de B. Considérons dans $B \times F$ le pseudogroupe $\Gamma \# G$ for-mé des homéomorphismes

$$U \times F \longrightarrow U' \times F$$

$$(x, y) \longrightarrow (\varphi(x), s_x y) \quad x \in U, y \in F, \varphi \in \Gamma$$

où $x \to s_x$ est une application continue de U dans G. Un atlas complet $\mathfrak{A}$ de E sur $B \times F$ compatible avec ce pseudogroupe $\Gamma \# G$ définit alors sur E une structure d'espace fibré à groupe structural G (considéré comme groupe topologique). Nous supposerons que les ouverts qui correspondent dans $B \times F$ aux cartes de $\mathfrak{A}$ forment un recouvrement de $B \times F$.

Soit f un homéomorphisme de $U \times F$ dans E formant une carte locale admissible. L'application $y \to f(x, y)$ où $x \in U$, $y \in F$, définit un homéomorphisme h de F sur un sous-espace F_x de E. Soit H l'ensemble des homéomorphismes h de F dans E correspondant ainsi aux cartes locales admissibles appartenant à $\mathfrak{A}$. Le sous-espace F_x ne dépend que de x et s'appelle une *fibre* de l'espace fibré E. Les fibres forment une partition de E, et l'espace quotient de E par cette partition est appelé espace de *base* de l'espace fibré E. L'ensemble des éléments h de H tels que $h(F) = F_x$ est $H_x = h_x G$ où h_x désigne un élément quelconque de H_x. H est muni d'une structure d'espace fibré dont les fibres H_x sont isomorphes à G, le groupe structural étant le groupe des translations de G. H muni de cette structure fibrée est l'espace fibré principal associé à E. La structure d'espace fibré localement trivial définie par l'atlas $\mathfrak{A}$ pourra être désignée par le symbole $E(B, F, G, H)$.

De ce qui précède, on déduit facilement la définition des espaces fibrés différentiables ou vectoriels différentiables. Dans ce qui suit, pour alléger le texte nous dirons " fibré " pour " espace fibré localement trivial ". D'après la définition précédente qui est d'ailleurs équivalente à celle des " fibre bundles " par Steenrod [27] .

$K(G, m)$ désigne un espace d'Eilenberg-Mac Lane, c'est-à-dire $\pi_m(K) = G$, et $\pi_i(K) = 0$ pour $i \neq m$.

THEOREME 1. (Thom[29]). *Tout espace fibré de base B dont la fibre est un complexe $K(G, m)$ a son type d'homotopie fibré déterminé par son invariant d'Eilenberg-Mac Lane k. En particulier, tout fibré $E(B, K(G, m))$ est équivalent au fibré "canonique" induit par l'application g de la base dans $K(G, m+1)$ tel que $g^*(i) = k$, où i est la classe fondamentale de $K(G, m+1)$. Le fibré asphérique sur $K(G, m+1)$ de fibre $K(G, m)$ joue le rôle de fibré universel dont $K(G, m+1)$ est le classifiant.*

THEOREME 2 (Fadell [9]). *Tout fibré de Hurewicz (c'est-à-dire pour lequel le théorème de relèvement d'homotopie est valable) sur une base qui est dominée par un polyèdre localement fini est homotopiquement équivalent (en tant que fibré) à un fibré (de STEEN-ROD).*

PROPOSITION. *Un fibré est trivial si et seulement si son espace fibré principal associé est trivial* [8b].

0.2.2. Fibré universel. Espace classifiant. Le joint $A_1.A_2..A_n$ de n espaces topolo--giques A_i peut être défini comme suit. Un point du joint est déterminé par *(i)* n nombres réels $t_1, \, , t_n$ satisfaisant à : $t_i \geq 0$, $t_1 + \ldots + t_n = 1$, et *(ii)* un point $a_i \in A_i$ pour chaque i qui est tel que $t_i \neq 0$. On peut désigner un tel point par le symbole $t_1 a_1 \oplus \ldots \oplus t_n a_n$.

Par topologie admissible dans $A_1 \ldots A_n$ nous entendons la topologie la moins fine telle que les fonctions coordonnées $t_i : A_1 \ldots A_n \to (0, 1)$ et $a_i : t_i^{-1}(0, 1) \to A_i$ soient continues. De cette façon on a une sous-base pour les ouverts en considérant les ensembles des deux types suivants :

(1) l'ensemble de tous les $t_1 a_1 \oplus \ldots \oplus t_n a_n$ tels que $r < t_i < s$

(2) l'ensemble de tous les $t_1 a_1 \oplus \ldots \oplus t_n a_n$ tels que $t_i \neq 0$ et $a_i \in U$, où U est un ouvert quelconque de A_i.

Soit G un groupe topologique quelconque, et $W(G)_n = G.G \ldots G$ le joint de $n+1$ copies de G avec la topologie admissible. Définissons la translation à droite $R : W(G)_n . G \to W(G)_n$ par $R(t_o g_o \oplus \ldots \oplus t_n g_n) = t_o(g_o g) \oplus \ldots \oplus t_n(g_n g)$. Soit $\overline{W}(G)_n$ le quotient de $W(G)n$ par l'identification : $e = e'$ si et seulement si $e' = R(e, g)$ pour un certain $g \in G$. Soit p la projection canonique définie par l'identifi--cation précédente.

THEOREME 1 [18] . *G est le groupe d'un fibré n-universel $W(G)_n$ de base $\overline{W}(G)_n$ et de projection p.*

On peut de la même façon construire un espace fibré ∞-universel, de groupe G, de base $\overline{W}(G)$.

Un groupe G est dit CW-dénombrable si G est un CW-complexe dénombrable tel que l'application $g \to g^{-1}$ de G dans G et le produit $G.G \to G$ sont tous deux cellulaires (appliquent un k-squelette sur un k-squelette).

Nous dirons que deux CW-groupes dénombrables G_1 et G_2 sont *équivalents* s'il y a un troisième CW-groupe G_3 qui peut être appliqué dans G_1 et G_2 par des homomor--phismes qui sont aussi des équivalences homotopiques.

THEOREME 2 [18] *1) Tout CW-groupe dénombrable G admet un CW-complexe $\overline{W}(G)$ com--me espace classifiant.*

2) Un deuxième CW-complexe $\overline{W}'(G)$ est aussi un espace classifiant de G si, et seulement si, il est de même type d'homotopie que $\overline{W}(G)$.

3) Tout CW-complexe X est l'espace classifiant d'un certain CW--groupe dénombrable G.

4) Un deuxième CW-groupe dénombrable G' admet le même espace classifiant X que G si, et seulement si, G' est équivalent à G.

2.3 Fibrés simpliciaux. [1]

Pour les généralités sur les ensembles simpliciaux cf. (4) (18), rappelons qu'un complexe de KAN est un ensemble simplicial X qui satisfait à la condition d'extension de KAN : quel que soient les entiers n et k, et les *n-simplexes* x_i *de* X *où* $(i = 0, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n+1)$ tels que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ pour $i, j \neq k$, $i < j$, il existe un $(n+1)$-*simplexe* x tel que $d_i x = x_i$ pour $i \neq k$. Δ^n désigne un n-simplexe, c'est-à-dire l'en-où δ^n est un n-simplexe type qu'on peut identifier à $(0, 1, \ldots, n)$ et ϕ un opérateur simplicial avec n comme dimension du domaine. Un élément $x \in X_n$, ensemble des n-simplexes de X, définit de façon unique une application simpliciale, notée encore $x : \Delta_n \to X$, en posant $x(\phi\delta^n) = \phi x$.

Soient X et Y deux ensembles simpliciaux. Par X^Y nous désignons l'ensemble simplicial dont les n-éléments sont les applications simpliciales

$$\alpha : \Delta^n \times Y \longrightarrow X$$

et nous définissons $d_i\alpha = \alpha(\epsilon^i \times 1)$, $s_i\alpha = \alpha(\eta^i \times 1)$, où $\epsilon^i = d_i\delta^n : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ et $\eta^i = s_i\delta^n : \Delta^{n+1} \to \Delta^n$. Quelquefois il est pratique de remplacer α par l'application $\alpha_I(t, y)$

$$\alpha_I : \Delta^n \times Y \longrightarrow \Delta^n \times X$$

donnée par $\alpha_I(t, y) = (t, \alpha(t, y))$, $t \in \Delta^n$, $y \in Y$. Il est clair que α et α_I se déterminent mutuellement.

Soit X, Y, Z des ensembles simpliciaux et $\alpha \in X^Y$, $\beta \in Y^Z$; nous définissons $\alpha\beta \in X^Z$ par $(\alpha\beta)_I = \alpha_I \beta_I$. Il est facile de vérifier que :

$$d_i(\alpha\beta) = (d_i\alpha)(d_i\beta) \qquad s_i(\alpha\beta) = (s_i\alpha)(s_i\beta)$$

Muni de cette opération l'ensemble simplicial Y^Y est un monoïde. Il opère sur Y comme suit $\alpha . y = \alpha(\delta^n, y)$ $\alpha \in (Y^Y)_n$, $y \in Y_n$. Nous définissons $A(Y) \subset Y^Y$ comme son sous-groupe maximal ; ainsi $\alpha \in Y^Y$ est dans $A(Y)$ si et seulement si α_I a un inverse. $A(Y)$ est un groupe simplicial et c'est donc un complexe de KAN. $A(Y)$ a une propriété universelle importante : soit Γ un groupe simplicial quelconque opérant sur Y ; nous définissons l'homomorphisme $\rho : \Gamma \to A(Y)$ par $(\rho\gamma)(\Phi\delta^n, y) = (\Phi\gamma)y$, où $\gamma \in \Gamma$, $y \in Y$ et Φ un opérateur simplicial convenable. Alors $\gamma y = (\rho\gamma) . y$. Si Γ opère effectivement, c'est-à-dire si ρ est un monomorphisme, nous pouvons considérer Γ comme un sous-groupe de $A(Y)$ en identifiant γ et $\rho\gamma$. En remplaçant si nécessaire Γ par $\Gamma/\mathrm{Ker}\,\rho$, nous nous restreignons à ce cas dans la suite.

Soient E et B deux ensembles simpliciaux, et une application simpliciale $p : E \to B$, (E, B, p) sera appelé un fibré simplicial.

Une application simpliciale $p : E \longrightarrow B$ sera aussi notée (E, B, p). Un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

est désigné par $(\tilde{f}, f) : (E', B', p') \longrightarrow (E, B, p)$ et appelé *homomorphisme* simplicial de (E', B', p') dans (E, B, p). Si $f = idB$ alors $(\tilde{f}, idB)$ est appelé homomorphisme *fort.*

Deux homomorphismes simpliciaux $(\tilde{f}_0, f_0)$ et $(\tilde{f}_1, f_1)$ sont *homotopes* s'il existe un homomorphisme simplicial

$(\tilde{F}, F) : (I \times E', I \times B', idI \times p') \to (E, B, p)$ tel que $\tilde{F} | 0 \times E' = \tilde{f}_0$, $\tilde{F} | 1 \times E' = \tilde{f}_1$ et $F | 0 \times B' = f_0$, $F | 1 \times B' = f_1$. Si $f_0 = f_1 = f$ et $F = fp_2$ où $p_2 : I \times B \longrightarrow B$ est la projection canonique, nous dirons que $(\tilde{f}_0, f)$ et $(\tilde{f}_1, f)$ sont homotopes *relativement à* f, en abrégé rel. f.

S'il existe un homomorphisme simplicial $(\tilde{g}, g) : (E, B, p) \longrightarrow (E', B', p')$ tel que $(\tilde{f}\tilde{g}, fg)$ et $(\tilde{g}\tilde{f}, gf)$ soient respectivement homotopes à (idE, idB) et $(id E', id B')$ nous dirons que $(\tilde{f}, f)$ est une *équivalence homotopique.* Si $f = g = idB$ et si $(\tilde{f}\tilde{g}, id B)$ est homotope à $(\tilde{g}\tilde{f}, idB)$ rel. idB nous dirons que $(\tilde{f}, f)$ est une *forte équivalence homo topique.*

(E, B, p) sera appelé *application simpliciale fibrée* si p est surjectif et si, pour tout $n > 0$, p satisfait à la condition suivante : soient un entier t, $0 \geq t \leq n$, $e_i \in E_{n-1}$ pour tout i, $0 \leq i \leq n$, $i \neq t$ et $b \in B_n$ tels que

$$d_i e_j = d_{j-1} e_i \qquad (i < j,\ i,\ j \neq 0)$$
$$p e_i = d_i b \qquad (i \neq t)$$

alors il existe $e \in E_n$ tel que $b = pe$ et $e_i = d_i e$, $i \neq t$. Si de plus $d_t e$ dépend seulement des e_i et de b, alors (E, B, p) est appelée une application fibrée *minimale.*

THEOREME 1. *Soit (E, B, p) une application simpliciale fibrée. Il existe un sous-en semble simplicial $E' \subset E$ tel que (E', b, p') où $p' = p / E'$, est une application simpli-ciale fibrée minimale unique à une équivalence près. (E', B, p') est un rétracte fort par déformation de (E, B, p).*

Soient deux applications simpliciales (E, B, p) et (A, B, f). Nous définissons (E^f, A, p^f) et $(\tilde{f}, f) : (E^f, A, p^f) \longrightarrow (E, B, p)$ comme suit :

$$E^f = \{ (e, a) \in E \times A \mid fa = pe \},\ p^f(e, a) = a,\ \tilde{f}(e, a) = e.$$

Nous appelons (E^f, A, p^f) l'application simpliciale *induite* de (E, B, P) par $f = A \to B$.

DEFINITION 1. Un ensemble simplicial E muni d'une application simpliciale $p : E \to B$ sera appelé *fibré* simplicial $E(B, Y, p)$ si : (1) p est surjectif, (2) pour toute application simoliciale $b : \delta \to B$ l'application simpliciale induite (E^b, Δ^n, p^b) est fortement équivalente à $(\Delta^n \times Y, \Delta^n, p^*)$ où $p^*(\phi\delta^n, y) = \phi\delta^n$ et Y est un ensemble simplicial donné, appelé la *fibre* du fibré. Si Y est un ensemble simplicial de Kan nous appelons $E(B, Y, p)$ un *fibré à fibres de Kan.*

PROPOSITION 1. *Toute application simpliciale fibrée minimale sur une base connexe est une fibration à fibres de Kan. Toute fibration à fibres de Kan est une application simpliciale fibrée.*

Soit $E(B, Y, p)$; en considérant $b \in B_n$ comme une application simpliciale $b : \Delta^n \to B$ nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Delta^n \times Y \arrow[r, "\alpha(b)"] \arrow[d, "p^*"'] & E^b \arrow[r, "\tilde{b}"] \arrow[d, "p^b"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta^n \arrow[r, "id"'] & \Delta^n \arrow[r, "b"'] & B \end{tikzcd}$$

où $\alpha(b)$ est une équivalence forte appelée *carte* au-dessus de b. Nous posons aussi: $\beta(b) = \tilde{b}\,\alpha(b)$. L'égalité

$$\alpha(b)(\phi\delta^n, y) = (\phi\delta^n, \beta(b)(\phi\delta^n, y))$$

établit une correspondance binivoque entre $\alpha(b)$ et $\beta(b)$.

Chaque carte $\alpha(b)$ est un isomorphisme de $\Delta^{n-1} \times Y$ sur la partie de E^b au-dessus $d_i\delta^n$; donc $\alpha(b)$ induit une carte $\alpha_i(b) : \Delta^{n-1} \times Y \to E^{d_ib}$ telle que le diagramme $*$

$$\begin{tikzcd} \Delta^n \times Y \arrow[r, "\alpha(b)"] \arrow[d, "\varepsilon^i \times id"'] & E^b \arrow[r, "\tilde{b}"] \arrow[d, "\tilde{\varepsilon}^i \times id"'] & E \arrow[d, "id"] \\ \Delta^{n-1} \times Y \arrow[r, "\alpha_i(b)"'] & E^{d_ib} \arrow[r, "\widetilde{d_ib}"'] & E \end{tikzcd}$$

soit commutatif $(0 \leq i \leq n)$. En général $\alpha_i(b) \neq \alpha(d_ib)$.

Soient deux cartes $\alpha(b)$ et $\bar{\alpha}(b)$. L'équivalence forte $[\alpha(b)]^{-1}\bar{\alpha}(b) = \gamma_I(b)$ détermine un élément $\gamma(b) \in A(Y)_n$, appelé *changement de carte* En particulier à $\xi^i_I(b) = [\alpha(d_ib)]^{-1}\alpha_i(b)$ correspond $\xi^i(b) \in A(Y)_{n-1}$, appelé aussi changement de carte associé à $\alpha(b)$.

Un ensemble de cartes $\alpha(b)$ et $\alpha_i(b)$ s'appelle un *atlas* $\mathfrak{A}$ du fibré lorsque b parcourt B. Si $\beta(s_i b) = s_i \beta(b)$ nous dirons que l'atlas est *normalisé*, ce que nous supposerons dans la suite. Soit $\Gamma \subset A(Y)$, un sous-groupe simplicial. Un atlas dont tous les changements de cartes restent dans Γ est appelé un *Γ-atlas*. Un Γ-atlas $\mathfrak{A}$ est dit *complet* lorsque $\alpha(b) \in \mathfrak{A}$ entraine $\alpha(b)\gamma_I(b) \in \mathfrak{A}$ est dit complet lorsque $\alpha(b) \in \mathfrak{A}$ entraine $\alpha(b)\gamma_I(b) \in \mathfrak{A}$ pour tout $\gamma(b) \in \Gamma$. Tout Γ-atlas détermine un Γ-atlas complet unique. ([8b, g]). Un fibré muni d'un Γ-atlas complet sera appelé fibré de groupe Γ ou *Γ-fibré*. Ainsi tout fibré de fibre Y est un $A(Y)$ fibré. Soit $\Lambda \subset \Gamma$ un sous-groupe simplicial. Si le Γ-atlas complet d'un Γ-fibré contient un Λ-atlas (et par suite un Λ-atlas complet) nous dirons que le groupe du Γ-fibté peut-être réduit à Λ. Cette réduction, si elle existe, n'est pas en général unique.

DEFINITION 2. Un produit cartésien tordu $B \tilde{\times}_\tau Y$ est dit *régulier* si pour tout $b \in B_n$ $(n>0)$ il y a un élément $\xi(b) \in A(Y)_{n-1}$ qui définit la fonction tordante $\tau: B_n \times Y_n \to Y_n$ par l'égalité $\tau(b_I y) = \xi(b)\, d_o y$. Si $\xi(b)$ reste dans un sous-groupe simplicial $\Gamma \subset A(Y)$ lorsque b parcourt B alors le $PCTR$ (produit cartésien tordu régulier) est dit de *groupe* Γ, et noté $B \tilde{\times}_\Gamma Y$.

PROPOSITION 2. *Un fibré dont le groupe peut-être réduit à* Γ *est (fortement équivalent à) un* $PCTR$ *de groupe* Γ. *Tout* $PCTR$ *est un fibré.*

Soit Γ un groupe simplicial considéré comme groupe d'opérateurs à gauche sur lui-même: $\Gamma \subset A(\Gamma)$. Un Γ-fibré de fibre Γ est alors appelé Γ-fibré *principal.*

Soient Y ensemble simplicial sur lequel opère Γ et $E(B, \Gamma, p)$ un Γ-fibré principal. Nous définissons le fibré *associé* [8b] *canonique* $E_Y(B, Y, \Gamma, p_Y)$ par $E_Y = E \tilde{\times}_\Gamma Y$ et $p_Y(e, y) = p(e)$.

PROPOSITION 3. *Pour un Γ-fibré principal donné et un ensemble simplicial Y sur lequel Γ opère à gauche, il existe un Γ-fibré associé canonique de fibre Y. Tout Γ-fibré de fibre Y est isomorphe au fibré canonique associé à un Γ-fibré principal qui est déterminé à un isomorphisme près.*

PROPOSITION 4. *Un fibré est trivial si et seulement si son fibré principal associé est trivial.*

DEFINITION 3. Etant donné Γ nous définissons l'ensemble simplicial $W(\Gamma)$ par $W_o(\Gamma) = \Gamma_o$ $W_{q+1}(\Gamma) = W_q(\Gamma) \times \Gamma_{q+1}$ et l'ensemble simplicial $\overline{W}(\Gamma)$ par $\overline{W}_o(\Gamma) =$ un seul élément noté $[\ ]$, $\overline{W}_{q+1}(\Gamma) = \overline{W}_q \times \Gamma_q = [\ ] \times W_q(\Gamma)$. La projection $p: W(\Gamma) \to \overline{W}(\Gamma)$ est définie par $p(w, \gamma) = [w]$, $p\gamma = [\ ]$ si $\gamma \in \Gamma_o$ $w \in W_q(\Gamma)$ et $[w] \in \overline{W}(\Gamma)_{q+1}$. $(W(\Gamma), \overline{W}(\Gamma), p)$ est un $PCTR$.

THEOREME 2. *Soit Y un ensemble simplicial sur lequel le groupe simplicial Γ opère effectivement. En faisant correspondre à toute application $B \to \overline{W}(\Gamma)$ du fibré Y associé au*

Γ-fibré principal induit de $(W(\Gamma), \overline{W}(\Gamma), p)$ on obtient une correspondance biunivoque entre les classes d'homotopie des applications $B \to \overline{W}(\Gamma)$ et des classes de Γ-équivalence forte de Γ-fibrés de base B et de fibre Y.

Si Γ est abélien, $\overline{W}(\Gamma)$ est un groupe abélien et on peut itérer la $\overline{W}$-construction. En particulier, π étant un groupe abélien, on a $\overline{W}^n(K(\pi, 0)) = K(\pi, n)$.

0.2.4. Système de Postnikov [19][24].

DEFINITION 1. Soit X un ensemble simplicial. Définissons un nouvel ensemble simplicial $X^{(n)}$ comme suit : (1) un q-simplexe de $X^{(n)}$ est une *classe d'équivalence* de q-simplexes de X, où deux q-simplexes x et x' sont équivalents si leurs faces de dimension moindre ou égale à n coincident, c. à. d. $x, x' : \Delta_q \to X$ et $x/\Delta_q^n = x'/\Delta_q^n$ où Δ_q^n est le n-squelette de Δ_q. (2) les opérations de face et dégénérescence dans $X^{(n)}$ sont induites par celles dans X.

Soit $X^{(\infty)} = X$ et soit $p_k^n : X^{(n)} \to X^{(k)}$ l'application naturelle où $k < n < \infty$, pour tout k. S'il n'y a pas de confusion possible nous écrirons p au lieu de p_k^n. La projection p induit des homomorphismes $p_q^* : \pi_q(X^{(n)}, x) \to \pi_q(X^{(k)}, x)$, $q \geq 0$.

THEOREME 1. *Soit X un complexe de Kan, alors (1) $X^{(n)}$ est un complexe de Kan pour tout n, (2) $(X^{(n)}, p, X^{(k)})$ est une fibration pour tout $n \geq k$ et (3) si x est un point de X alors $\pi_q(X^{(n)}, p) = 0$ pour $q > n$ et $p_q^* : \pi_q(X^{(n)}, x) \to \pi_q(X^{(k)}, x)$ est un isomorphisme pour $q \leq k$.*

DEFINITION 2. Soit X un complexe de Kan, et x un point de X. *Soit* $X_{[n]}(x)$ la fibre au-dessus du point x de $p : X \to X^{(n-1)}$, le complexe $X_{[n]}(x)$ est le $n^{\text{ième}}$ sous-complexe d'Eilenberg-Mac Lane de X basé en x, et c'est le sous-complexe de X qui consiste en des simplexes dont les faces de dimension moindre que n sont au point de base.

PROPOSITION 1. *Soit X un complexe de Kan de point base x. Alors on a (1) $\pi_q(X_n(x), x) = 0$ pour $q < n$ et (2) l'inclusion canonique $i : X_{[n]}(x) \to X$ induit des isomorphismes - $i^* : \pi_q(X_{[n]}(x), x) = \pi_q(X, x)$ pour $q \geqq n$.*

DEFINITION 3. Si X est un complexe de Kan, soit X^n la fibration $(X^{(n+1)}, p, X^{(n)})$. La suite des fibrations $X = (X^o, X^1, \ldots, X^n, \ldots)$ est par définition le *système naturel de POSTNIKOV* de X.

THEOREME 2. *Si X est un complexe de Kan, X est le système naturel de Postnikov de X et $F^{(n+1)}$ est la fibre de l'application $p : X^{(n+1)} \to X^{(n)}$ qui est la $n^{ième}$ terme de X, alors $F^{(n+1)}$ est un complexe d'Eilenberg-Mac Lane de type $(\pi_{n+1}(X, x), n+1)$.*

THEOREME 3. *Soit G un groupe simplicial abélien. Alors G est de même type d'homotopie que $\prod_{n=0}^{\infty} K(\pi_n(G), n)$.*

LEMME 1. *On a l'isomorphisme $\overline{W}(G^{(n)}) = \overline{W}(G)^{(n+1)}$.* [26a]

LEMME 2. *Soit E un espace fibré sur X de groupe structural G et dont la fibre F est (n-1) connexe, on peut toujours associer canoniquement à E un espace fibré E' sur X de fibre* $F^{(n)}$.

LEMME 3. *Soit E un espace fibré de fibre (n-1)-connexe F. Supposons que le groupe structural G opère transitivement sur F, alors on peut réduire le groupe structural G à son sous-groupe d'Eilenberg-Mac Lane* $G_{[n-1]}$.

On dit qu'un espace fibré $E(B, F)$ est *n-trivial* si le fibré induit sur le $n^{ième}$ squelette B_n de B est isomorphe au fibré trivial.

PROPOSITION 2. *Pour qu'un fibré* $E(B, F, G)$ *soit n-trivial, il faut et il suffit que son groupe G puisse être réduit (8b) à* $G_{[n-1]}$, [26].

0.3. Suites exactes et suites spectrales.[25][26b]

Considérons une suite exacte de groupes simpliciaux

$$(e) \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow (e)$$

Il lui correspond les deux suites d'applications simpliciales

$$W(G') \longrightarrow W(G) \xrightarrow[f]{} W(G'')$$
$$\overline{W}(G') \longrightarrow \overline{W}(G) \xrightarrow[\bar{f}]{} \overline{W}(G'')$$

THEOREME 1. *Les applications* f *et* $\bar{f}$ *sont fibrées.*

Remarque.- Si les groupes G', G, G'' sont commutatifs il en est de même pour $\overline{W}(G')$ $\overline{W}(G)$, $\overline{W}(G'')$ et on a la suite exacte : $(e) \longrightarrow \overline{W}(G') \longrightarrow \overline{W}(G) \longrightarrow \overline{W}(G'') \longrightarrow (e)$

Supposons maintenant que les groupes G', G, et G'' soient $(n\text{-}1)$-connexes. La classe caractéristique $k^{n+1} \in H^{n+1}(G'', H_n(G'))$ détermine un homomorphisme $H_{n+1}(G'') \to H_n(G')$, donc un homomorphisme $\partial : \pi_{n+1}(G'') \to \pi_n(G')$ composé de la suite $\pi_{n+1}(G'') \to H_{n+1}(G'') \to H_n(G') = \pi_n(G')$ et nous avons la suite exacte de groupes abéliens

$$o \to \pi_n(G')/_{Im\,\partial} \to \pi_n(G) \to \pi_n(G'') \to o$$

Désignons par $[A, B]$ l'ensemble des classes d'homotopie des applications de A dans B.

THEOREME 2. *Etant donné un ensemble simplicial X et un groupe simplicial G, il existe une suite spectrale* $E^r_{p,q}$ *de groupes abéliens, aboutissant au groupe gradué associé du groupe* $[X, G]$ *des classes d'homotopie des applications de X dans G, filtré par les sous-groupes invariants*

$$F_p = Ker\ \{[X, G] \longrightarrow [X_p, G]\},$$

où X_p *est le* $p^{ième}$ *squelette de X. Plus précisément, on a*

$$E^{\infty}_{p,-p} = \frac{F_p}{F_{p+1}}$$

Les termes $E^r_{p,q}$ *sont non nuls seulement pour les degrés totaux :-1, 0,1 :*

$$E^r_{p,q} = 0 \text{ pour } p+q \neq 1\ ,\ 0,\ 1.$$

De plus,

$E^r_{p,-(p+1)}$ *est un sous-groupe de* $H^p(X, \pi_{p+1}(G))$,

$E^r_{p,-(p-1)}$ *est un groupe quotient de* $H^p(X, \pi_{p-1}(G))$.

Les opérateurs différentiels de cette suite spectrale sont donnés par les invariants de Postnikov de G, en particulier :

$E^2_{p,-(p+1)} = H^p(X, \pi_{p+1}(G))$, $E^2_{p,-p} = H^p(X, \pi_p(G))$, $E^2_{p,-(p-1)} = H^p(X, \pi_{p-1}(G))$ *et* d^2 *est donné par l'opération cohomologique associée aux k-invariants d'Eilenberg Mac-Lane du groupe G,*

$$\xi^k \in H^{k+2}(\pi_k(G),\ k,\ \pi_{k+1}(G))$$

et de leur suspension

$$\eta^k \in H^{k+1}(\pi_k(G),\ K-1,\ \pi_{k+1}(G)),$$

c'est -à- dire

$$d^2_{p,-p}(x) = x \circ \xi^p,\quad d^2_{p,-(p+1)} = x \circ \eta^{p+1},$$

où le symbole o désigne l'accouplement classique

$$\circ : H^n(X, A) \times H^m(A, n, B) \to H^m(X, B).$$

Considérons maintenant deux espaces topologiques X et Y avec points-bases correspond le cône sur X

$$CX = (X \times I) \,/\, (X \times 0\ ,\ x_0 \times I)$$

A une application $f : X \to Y$ préservant les points bases correspond le cône d'application C_f obtenu en prenant la somme topologique $CX + Y$ puis en identifiant $(x, 0) \in CX$ avec $f(x)$ pour tout $x \in X$. *La restriction* de l'identification $CX + Y \quad C_f$ à Y définit une injection continue $Pf : Y \to C_f$.

Désignons par $[X, Y]_0$ *l'ensemble* des classes d'homotopie des applications préservant les points-bases.

THEOREME 3. (Puppe).- *La suite* $X \xrightarrow[f]{} Y \xrightarrow[Pf]{} C_f$ *est exacte, c'est -à- dire pour tout espace V avec point-base, la suite induite*

$$[X, V]_0 \xleftarrow[f^*]{} [Y, V]_0 \xleftarrow[Pf^*]{} [C_f, V]_0$$

est exacte, c'est -à- dire $Ker\, f = Im\, Pf$ *(avec la structure d'ensemble muni d'un élément distingué, la classe d'homotopie de l'application constante).*

Corollaire.- *La suite*

$$(\mathcal{P} f) \qquad\qquad X \xrightarrow[f]{} Y \xrightarrow[Pf]{} C_f \xrightarrow[P(Pf)]{} C_{Pf} \quad \cdots$$

est exacte

Lemme.- La suite (Pf) est homotopiquement équivalente à la suite $(\mathfrak{Q}f)$

$$X \xrightarrow[f]{} Y \xrightarrow[Pf]{} C_f \xrightarrow[Qf]{} SX \xrightarrow[Sf]{} SY \xrightarrow[SPf]{} SC_f \xrightarrow[SQf]{} S^2X \ \dots$$

où $C_f/Y = SX$ est la première suspension de X, et Q_f la projection naturelle.

En résumé, on peut associer à $(\mathfrak{Q}f)$ une suite exacte d'ensembles munis d'un élément distingué :

$$[X, V]_o \xleftarrow{f^*} [Y, V]_o \xleftarrow{Pf^*} [C_f, V]_o \xleftarrow{Qf^*} [SX, V]_o \xleftarrow{Sf^*} [SY, V]_o \quad \dots$$

0.4. Cohomologie non abélienne.

4.1. Cohomologie non abélienne dans un faisceau de groupes [10][6][11].

Soit $\underline{G}$ un faisceau de groupes sur l'espace topologique X. Soit $\underline{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement formé d'ouverts U_i de X, i parcourant un ensemble d'indices I. Une p-cochaine de $\underline{U}$ a valeurs dans $\underline{G}$ est une fonction qui associe à toute suite $i_o, i_1, \dots, i_p$ de $p+1$ éléments de I tels que $U_{i_o} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_p}$ ne soit pas vide, une section de $\underline{G}$ au-dessus de cet ouvert.

On dira que (g) est un 0-cocycle si les sections g_i et g_j satisfont à la condition $g_i = g_j$ sur l'intersection $U_i \cap U_j$, pour tout $i, j \in I$. Par définition, $H^o(X, G)$ sera le groupe $S(X, \underline{G})$ des sections de $\underline{G}$ au-dessus de X.

On dira que (f) est 1-cocycle de U à valeur dans G si, pour tout triple (i, j, k) on a $f_{ik} = f_{ij} f_{jk}$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$. L'ensemble des 1-cocycles sera désifné par $Z^1(\underline{U}, \underline{G})$. Deux 1-cocycles (f) *et* $(f') \in Z^1(\underline{U}, \underline{G})$ seront dits *cohomologues* s'il existe une O-cochaine (g) telle que $f'_{ij} = g_i f_{ij} g_j^{-1}$ sur $U_i \cap U_j$.
Le quotient de $Z^1(\underline{U}, \underline{G})$ par cette relation d'équivalence sera désigné par $H^1(\underline{U}, G)$ et sera appelé le premier ensemble de cohomologie de $\underline{U}$ à valeur dans $\underline{G}$.

Soit $\underline{V} = \{V_m\}_{m \in M}$ un recouvrement ouvert de X plus fin que $\underline{U}$ soit τ une application $m \to \tau m$ de M dans I telle que, pour tout $m \in M$, $V_m \subset U_{\tau m}$. On en déduit par restriction et par passage au quotient une application φ_{VU} de $H^1(\underline{U}, \underline{G})$ dans $H^1(\underline{V}, \underline{G})$qui est indépendante du choix de τ.

DEFINITION 1. Le premier ensemble de cohomologie $H^1(X, G)$ de X à valeur dans le faisceau de groupes $\underline{G}$ est la limite inductive des ensembles $H^1(\underline{U}, \underline{G})$ relativement aux applications φ_{VU}, $\underline{U}$ parcourant l'ordonné filtrant des classes de recouvrements ouverts de X.

L'élément distingué **de** $H^1(X, \underline{G})$ est représenté par $f_{ij} = 1 \in S(U_i \cap U_j, G)$ pour tout $\underline{U}$.

THEOREME 1. *$H^1(X, \underline{G})$ est en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble de toutes les classes d'isomorphie de fibrés sur X, de fibre F et de groupe structural G opérant effectivement sur F, L'élément distingué de $H^1(X, \underline{G})$ correspond à la classe d'isomorphie du fibré trivial $E = X \times F$.*

DEFINITION 2. (premier cobord)- Soit une suite exacte de faisceaux de groupes

$$e \to G' \xrightarrow[i]{} G \xrightarrow[j]{} G'' \to e$$

Soit c une section du faisceau $\underline{G}''$, il existe un recouvrement ouvert $\underline{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X tel que la restriction c_i de c à U_i soit, pour tout i, l'image par j d'une section b_i de $\underline{G}$ au-dessus de U_i. Comme $c_i = c_j$ dans U_{ij}, il existe, pour tout x de U_{ij}, un élément unique $a_{ij}(x) \in G_x$, tel que $b_j(x) = b_i(x)a_{ij}(x)$. L'application $x \to a_{ij}(x)$ est une section a_{ij} de $\underline{G}'$ au-dessus de U_{ij}, de sorte que $b_j = b_i a_{ij}$, ce qui entraine que la 1-cochaine (a_{ij}) est un 1-cocycle. Sa classe de cohomologie ne dépend pas du choix des b_i. A c est donc associé un élément bien déterminé $\delta_U(c)$ de $H^1(U, \underline{G}')$. L'image dans $H^1(X, \underline{G}')$ de $\delta_U(c)$ est indépendante du recouvrement U choisi. Dans le cas où la suite exacte de groupes $e \to G' \to G \to G'' \to e$ est fibrée la section c induit cette fibration sur X et $\delta(c) \in H^1(X, \underline{G}')$ est la classe de cohomologie de ce fibré induit.

THEOREME 2. *Soit une suite exacte de faisceaux (de groupes)*

$$\underline{e} \to \underline{G}' \to \underline{G} \to \underline{G}'' \to \underline{e}$$

la suite

$$e \to H^o(X, \underline{G}') \xrightarrow[i_o^*]{} H^o(X, \underline{G}) \xrightarrow[j_o^*]{} H^o(X, \underline{G}'') \xrightarrow{\delta}$$

$$\to H^1(X, G') \xrightarrow[i_1^*]{} H^1(X, G) \xrightarrow[j_1^*]{} H^1(X, G'')$$

où i_o^*, j_o^* sont des homomorphismes de groupes, i_1 et j_1 des applications d'ensembles avec élément distingué, est exacte. De plus deux sections c et c' de $\underline{G}''$ ont même image par δ si et seulement si cc'^{-1} est l'image par j_o d'une section de $\underline{G}$.

0.4.2. Cohomologie non abélienne simpliciale [*6d*].

Soient X un ensemble simplicial et G un groupe simplicial. On appelle p-cochaine de X à valeurs dans G une suite de fonctions

$$\sigma : X_n \longrightarrow G_{n-p}$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

pour $p = 0$, $\quad s_i\sigma = \sigma s_i \quad (i \geq 0)$, $\quad d_i\sigma = \sigma d_i \quad (i \geq 1)$
pour $p = 1$, $\quad \sigma s_0 = 1_n$, $\quad s_i\sigma = \sigma s_{i+1} \quad (i \geq 0)$, $\quad d_i\sigma = \sigma d_{i+1} \quad (i \geq 1)$

Une 0-cochaine η est dite 0-cocycle si l'on a en outre $d_0\eta = \eta d_0$ Une 1-cochaine τ est dite 1-cocycle si elle vérifie en outre la condition

$$(\tau d_0 x).(d_0 \tau x) = \tau d_1 x$$

Les 0-cochaines forment un groupe $C^0(X, G)$ avec $\eta'\eta(x) = \eta'(x).\eta(x)$. Ce groupe opère à gauche sur l'ensemble $C^1(X, G)$ des 1-cochaines et cocycles :

$$(\eta\tau)(x) = (\eta d_0 x).\tau(x).(d_0\eta x)^{-1}$$

On définit l'opérateur cobord $\delta : C^0(X, G) \to C^1(X, G)$ en posant

$$(\delta\eta)(x) = (\eta d_0 x)(d_0 \eta x)^{-1}$$

DEFINITION.- $H^0(X, G) = Hom(X, G)$, groupe des applications simpliciales de X dans G. $H^1(X, G)$ = ensemble des classes d'intransitivité des opérations de $C^0(X, G)$ sur l'ensemble $Z^1(X, G)$ des 1-cocycles.

PROPOSITION.- *$H^1(X, G)$ s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphie de produits tordus principaux (réguliers) de base X, fibre G. Il contient un élément privilégié correspondant à la classe des produits tordus principaux triviaux.*

0.4.3. Cohomologie non abélienne discrète (P. Olum [23]).

Soient X un espace topologique, $S(X)$ son complexe singulier, $A \subset X$, un sous-espace et Π, un groupe non abélien dont la loi de composition est encore notée additivement. Pour $n = 0, 1$, une n-cochaine c^n est une fonction qui associe à chaque n-simplexe $u_n \in S(X)$ un élément $c^n(u_n) \in \Pi$ tel que $c^n(u_n) = 0$ pour $u_n \in S(A)$. Soit $C^n(X, A; \Pi)$ l'ensemble des n-cochaines. Une cochaine z^0 est un 0-cocycle si $z^0(d_0 u_1) = z^0(d_1 u_1)$ pour tout 1-simplexe u_1. Soit $Z^0(X, A; \Pi)$ *l'*ensemble des 0-cocycles. Le groupe $H^0(X, A; \Pi)$ est défini par $H^0(X, A; \Pi) = Z^0(X, A; \Pi)$. Un 1-cocycle z^1 *est* un élément de $C^1(X, A; \Pi)$ tel que $z^1(d_0 u_2) - z^1(d_1 u_2) + z^1(d_2 u_2) = 0$ pour tout 2-simpleee u_2. Soit $Z^1(X, A; \Pi)$ l'ensemble des 1-cocycles. Deux 1-cocycles z^1 et z^1 sont *cohomologues* s'il existe une 0-cochaine $c^0 \in C^0(X, A; \Pi)$ telle que $z^1(u_1) = - c^0(d_1 u_1) + z^1(u_1) + c^0(d_0 u_1)$. Soit $H^1(X, A; \Pi)$ l'ensemble des classes de cohomologie de 1-cocycles. Il a un élément distingué : la classe du 1-cocycle trivial qui associe à tout u_1 l'élément neutre de Π. Si Π est abélien on retrouve la cohomologie (abélienne) classique.

Etant donné un triple (X, A, B) on définit le cobord $\delta : H^0(A, B; \Pi) \to H^1(X, A; \Pi)$ comme suit : étant donné $b^0 \in H^0(A, B; \Pi)$, on définit $c^0 \in H^0(X, B; \Pi)$ *par*

$c^o(u_o) = h^o(u_o)$ pour $u_o \in S(A)$, $c^o(u_o) = O$ si $u_o \notin A$; puis $z^1 \in Z^1(X, A; \Pi)$ par $z^1(u_1) = - c^o(d_1 u_1) + c^o(d_o u_1)$ pour tout $u_1 \in S(X)$. La classe de ce z^1 est $\delta(h^o)$. Tous les axiomes de la cohomologie classique (Eilenberg-Steenrod) sont vérifiés par $H^o(X, A; \Pi)$ et $H^1(X, A; \Pi)$. En particulier on a la suite exacte

$$O \to H^o(X, A; \Pi) \to H^o(X, B; \Pi) \to H^o(A, B; \Pi) \xrightarrow{\delta} H^1(X, B; \Pi) \to H^1(X, B; \Pi) \to H^1(A, B; \Pi)$$

0.5. Théorie générale des prolongements de variétés différentiables.

cf. Ehresmann [8c,d,e,f,g] ainsi que Atiyah [0], Nickerson [22] et Kodaira-Spencer [16].

CHAPITRE UN

CLASSIFICATION DES ESPACES FIBRES

1.1. L'ENSEMBLE (X, G).

1.1.1. Equivalence et classification.

1.1.1.1. Généralités.

Nous savons qu'il existe plusieurs définitions d'espaces fibrés topologiques. Citons quelques exemples par ordre croissant de précision de structure :

1/- espaces quasi-fibrés (Dold-Thom [7]). (les fibres sont de même type d'homotopie faible, c'est-à-dire elles ont les mêmes groupes d'homotopie).

2/- espaces fibrés au sens de Serre [1], [4] (satisfaisant au théorème de relèvement d'homotopie pour les polyèdres).

3/- espaces fibrés au sens de Hurewicz [9] (satisfaisant au théorème de relèvement d'homotopie pour tous les espaces ; toutes les fibres sont de même type d'homotopie).

4/- espaces fibrés localement triviaux (Ehresmann - Feldbau [8 b, g]) (toutes les fibres sont isomorphes)

5/- espaces fibrés localement triviaux à groupe structural topologique (Ehresmann Steenrod). [8b] [27]

De même pour les espaces fibrés simpliciaux dont les réalisations géométriques sont, moyennant certaines conditions les équivalents des précédents :

1/- produits cartésiens tordus à semi-groupe structural (Dold [7])

2/- espaces fibrés au sens de Kan.

3/- à définir

4/- fibrés simpliciaux. (Barratt, Gugenheim, Moore [1]).

5/- fibrés simpliciaux à groupe structural (ou produits cartésiens tordus réguliers à groupe structural.) (Barratt, Gugenheim, Moore [1]).

Remarque 1 : Il reste à définir en général l'équivalent simplicial de l'espace fibré au sens de Hurewicz. Néanmoins lorsque la base est dominée par un polyèdre localement fini le fibré de Hurewicz simplicial est de même type d'homotopie fibré qu'un fibré simplicial au sens de Barratt, Gugenheim, Moore, d'après un résultat de Fadell, (cf. Préliminaires).

NOTA. Remarquons ici qu'une première théorie des espaces fibrés à trois dimensions à fibres isomorphes au cercle S^1 et admettant des fibres exceptionnelles a été développée par H. Seifert. (Topologie drei dimensionaler gefaserter Raüme. Acta Math. 60 (1932). M. 147-238). Cette situation a été généralisée dans la thèse de G. Reeb. (Variétés feuilletées Act. S. et I. Hermann. Paris 1952, (voisinage d'une feuille compacte à groupe fondamental fini) et dans [8h] (feuilletage dont chaque feuille appartient à un tube parfait).

Pour tous ces espaces fibrés la notion d'équivalence (ou d'isomorphie) se définit de la même manière. On impose la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{h} & X' \end{array}$$

en précisant :

(1)- L'application induite sur chaque fibre : équivalence homotopique faible, forte, homéomorphisme, homéomorphisme qui respecte les G-isomorphismes de fibres sur fibres ;

(2)- l'application induite sur la base : équivalence homotopique, automorphisme, identité.

Notons respectivement ces relations d'équivalence :

(Hf) : équivalence homotopique fibrée faible

(S) : équivalence de Serre

(HF) : équivalence homotopique fibrée forte

(I) : isomorphie localement triviale

(IG) : isomorphie de fibrés G-principaux.

Dans tous les cas de *1/* à *5'/* (resp. *1'/* à *5'/*) le problème de classification des espaces fibrés comporte deux aspects suivants :

1- reconnaître quand deux espaces fibrés sont isomorphes.

2- énumérer les classes d'isomorphie (c'est-à- dire établir une correspondance biunivoque entre l'ensemble des classes d'isomorphie et les éléments d'un système algébrique défini canoniquement à partir de la base X, de la fibre F et du groupe G).

Pour les espaces fibrés localement triviaux topologiques ou simpliciaux, avec ou sans groupe structural, la classification a été examinée de différents points de vue : groupe classifiant $G(X)$ et espace classifiant $X(G)$ (Milnor[18]) ; cohomologie non abélienne ([6], [10], [11]) de X dans le faisceau $\underline{G}$ des jets locaux de X dans le groupe G ; $\overline{W}$-construction , [1].

Dans la suite il s'agit de voir dans quelles sous-catégories d'espaces topologiques, d'ensembles simpliciaux, de groupes topologiques et simpliciaux, ces classifications sont équivalentes.

1.1.1.2.Classification des espaces fibrés de Serre.

Le problème général dans le cadre topologique n'a pas été examiné jusqu'à maintenant. Néanmoins pour les bases connexes ce problème peut se ramener à la classification des fibrés simpliciaux en utilisant la théorie de Barratt-Gugenheim-Moore [1] : à tout espace fibré de Serre on peut associer canoniquement un espace fibré de Kan ; ce dernier admet un rétracte par déformation qui est un espace fibré minimal unique à une équivalence près ; si la base est connexe tout espace fibré minimal est un fibré-simplicial ; alors la classification se fait par l'espace classifiant $\overline{W}(A(Y))$, où Y désigne la fibre type.

1.1.1.3. Classification des espaces fibrés de Hurewicz.

En vertu du théorème de Fadell [9] , si la base est dominée par un polyèdre localement fini ce problème se ramène à ~~la~~ classification des fibrés localement triviaux par type d'homotopie fibrée. Le traitement du cas général n'a pas été examiné jusqu'à maintenant.

DEFINITION 1. Deux espaces topologiques X et X' sont de même *type d'homotopie stricte* si :

1- X et X' sont de même type d'homotopie.

2- les monoïdes des équivalences homotopiques $A(X)$ et $A(X')$ sont isomorphes.

DEFINITION 2. Un espace fibré de Hurewicz est *de type strict* si toutes les fibres sont de même type d'homotopie stricte.

La classification des espaces fibrés de Hurewicz de type strict peut se faire en appliquant la $\overline{W}$-construction au monoïde $A(F)$ des équivalences homotopiques de la fibre-type F.

REMARQUE. L'équivalence homotopique stricte (EHS) est intermédiaire entre l'équivalence homotopique (EH) et l'homéomorphie topologique (HT). Il serait intéressant de savoir dans quel cas (EH) entraîne (EHS) et (EHS) entraine (HT).

1.1.2.4. Isomorphie relative.

DEFINITION. *Soit A un sous-espace de X. Deux espaces fibrés E et E' sur X sont A-isomorphes si les restrictions E_A et E'_A sont isomorphes.*

Exemple : Un fibré n-trivial est un fibré B_n- isomorphe au fibré trivial.

Notation : Désignons par $(X/A;\ G)$ l'ensemble des classes de fibrés G-principaux A-isomorphes sur X.

Par la restriction à A des fibrés G-principaux sur X on a une application canonique associée à $i_A : A \longrightarrow X$

$$i_A^* : (X,\ G) \longrightarrow (A,\ G).$$

D'autre part en projetant une classe d'isomorphie de $(X,\ G)$ dans sa classe de A-isomorphie nous avons une application canonique :

$$p_A : (X,\ G) \longrightarrow (X/A\ ;\ G).$$

De même en associant à une classe de A-isomorphie la classe correspondante d'isomorphie de fibrés G-principaux sur A, nous avons une troisième application canonique

$$q_A : (X/A;\ G) \longrightarrow (A,\ G)$$

En résumé nous avons le diagramme suivant :

(A)
$$\begin{tikzcd}
(X,\ G) \arrow[r, "p_A"] \arrow[dr, "i_A^*"'] & (X/A;\ G) \arrow[d, "q_A"] \\
& (A,\ G)
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION. *Le diagramme* (A) *est commutatif et* $(X/A;\ G)$ *est isomorphe à* $Im\, i_A^*$.

DEMONSTRATION évidente.

1.1.2. Espace classifiant et $\overline{W}$-construction.

Soit G un CW-groupe dénombrable. La construction de Milnor [18] lui fait correspondre l'espace classifiant $X(G)$ dont le type d'homotopie est uniquement déterminé par G. Soit $S(G)$ le groupe simplicial complexe singulier de G. La $\overline{W}$-construction appliquée à $S(G)$ conduit à l'ensemble simplicial $\overline{W}(S(G))$. Soit d'autre part le complexe singulier $S(X(G))$.

PROPOSITION. *L'ensemble simplicial* $S(X(G))$ *a le même type d'homotopie que* $\overline{W}(S(G))$.

DEMONSTRATION. En effet, considérons la fibration universelle $E(X(G),\ G)$ et passons aux complexes singuliers. Nous obtenons un produit cartésien tordu régulier $S(G) \to S(E) \to S(X(G))$. L'ensemble $S(E)$ est contractile et de même type d'homotopie que $W(S(G))$, fibré simplicial universel de groupe $S(G)$. La proposition découle alors du théorème de classification des fibrés simpliciaux [1].

Considérons maintenant les réalisations géométriques $|S(G)|$, $|\overline{W}(S(G))|$, $|S(X(G))|$, et les espaces classifiants $X(G)$ et $X(|S(G)|)$.

PROPOSITION. *Si* G *et* $S(G)$ *sont équivalents au sens de Milnor, alors* $X(G)$, $X(|S(G)|)$, $|S(X(G))|$ *et* $|\overline{W}(S(G))|$ *sont de même type d'homotopie.*

DEMONSTRATION. L'équivalence homotopique $X(G) \sim |\overline{W}(S(G))|$ découle de la proposition précédente. Le reste est une conséquence du théorème de Milnor sur $X(G)$.

Dans la suite nous appellerons les CW-groupes dénombrables G qui sont équivalents au sens de Milnor à $|S(G)|$, des *groupes* $\overline{W}$*-admissibles*. Pour cette sous-catégories de groupes topologiques et pour le problème de classification qui nous intéresse, nous pouvons utiliser indifféremment les notions d'espace classifiant de Milnor ou de $\overline{W}$-construction.

1.1.3. Espaces fonctionnels topologiques et simpliciaux.

Soient X et Y deux espaces topologiques, Y^X *l'*espace de toutes les applications continues de X dans Y, muni de la topologie de la convergence compacte. Considérons le complexe singulier $S(Y^X)$ et l'espace fonctionnel simplicial $S(Y)^{s(x)}$ au sens de Heller [19]. Ces deux ensembles simpliciaux ne sont pas toujours de même type d'homotopie. Néanmoins si X est un CW-complexe fini et Y un espace de type $K(\pi, n)$ ou un espace dont tous les invariants de Postnikov sont nuls, alors on a :
$\pi_o(Y^X) = \pi_o(S(Y)^{s(x)})$.

DEFINITION. *Un espace topologique X est S-admissible si pour tout CW-complexe Y on a :* $\pi_o(Y^X) = \pi_o(S(Y)^{s(x)})$

c'est-à-dire : $[X, Y] = [S(X), S(Y)]$

LEMME 1.- *Soit A un espace topologique, B et B' deux espaces topologiques de même type d'homotopie, alors* $[A, B] = [A, B']$

DEMONSTRATION.- Si B et B' sont de type $K(\pi, m)$ le lemme est évident car $[A, K(\pi, m)] = H^m(A, \pi)$. Supposons le lemme démontré pour les p^{ièmes} systèmes de Postnikov de B et B'. En appliquant le théorème de la suite exacte d'homotopie aux deux fibrations

$$Hom(A, K(\pi_{p+1}(B)) \longrightarrow Hom(A, B^{(p+1)}) \longrightarrow Hom(A, B^{(p)})$$

$$Hom(A, K(\pi_{p+1}(B')) \longrightarrow Hom(A, B'^{(p+1)}) \longrightarrow Hom(A, B'^{(p)})$$

on voit que $[A, B^{(p+1)}] = [A, B'^{(p+1)}]$. En tenant compte du fait que deux espaces qui sont de même type d'homotopie ont le même système de Postnikov le lemme est ainsi démontré.

LEMME 2.- *Soient A et A' deux espaces topologiques de même type d'homotopie et B un espace topologique quelconque, alors* $[A, B] = [A', B]$.

En effet, on peut vérifier que si $f: A \longrightarrow A'$ admet une homotopie inverse à gauche $l: A' \longrightarrow A$, $l o f \sim iA_A$, alors $f^*: [A', B] \longrightarrow [A, B]$ est un épimorphisme. De même si f admet une homotopie inverse à droite f^* est un monomorphisme, d'où le lemme.

En combinant les deux lemmes précédents, on a la

PROPOSITION. *Soient A et A', B et B' deux couples d'espaces topologiques respectivement de même type d'homotopie :* $A \sim A'$, $B \sim B'$.

alors : $[A, B] = [A', B']$.

De ce qui précède on déduit la

PROPOSITION. *Soient X un espace S-admissible, G un groupe $\overline{W}$-admissible, alors :*

$$[X, \overline{W}(G)] = [S(X), \overline{W}(S(G))]$$

1.1.4. Cohomologie non abélienne et espace classifiant [18].

Soit G un C-W-groupe dénombrable, $\underline{G}$ le faisceau des jets locaux des applications pointées d'ouverts de X dans G, et $H^1(X, \underline{G})$ le 1-ensemble de cohomologie de X dans $\underline{G}$. Nous savons que $H^1(X, \underline{G})$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble de *toutes* les classes d'isomorphie d'espaces fibrés G-principaux sur X (Dedecker [6a], Frenkel [10], Grothendieck [11]). D'autre part G étant CW- dénombrable, l'espace classifiant $X(G)$ de Milnor existe et il est unique à une équivalence homotopique près, par conséquent $[X, X(G)]$ est défini à un isomorphisme près. Or d'après Milnor on obtient *tous* les espaces fibrés G-principaux sur X par des applications de X dans $X(G)$. Ainsi $[X, X(G)]$ est l'ensemble de *toutes* les classes d'isomorphie d'espaces fibrés G-principaux sur X. De tout ce qui précède on déduit que $H^1(X, \underline{G})$ est isomorphe à $[X, X(G)]$ Si G est CW- dénombrable. Plus précisément, soit $H^1(X(G), \underline{G})$ le 1- ensemble de cohomologie de $X(G)$ dans le faisceau non abélien $\underline{G}$, et $[\xi]$ la classe de cohomologie de la fibration G- principale universelle sur $X(G)$. Soit $f: X \longrightarrow X(G)$ un représentant de sa classe $[f] \in [X, X(G)]$. Il induit un homomorphisme d'ensembles pointés $f^*: H^1(X(G), \underline{G}) \longrightarrow H'(X, \underline{G})$ ne dépendant que de $[f]$. Nous définissons l'application $I: [X, X(G)] \longrightarrow H^1(X, \underline{G})$ par la formule :

$$I([f]) = f^*([\xi]).$$

PROPOSITION. *L'application I est un isomorphisme de $[X, X(G)]$ sur $H^1(X, \underline{G})$.*

DEMONSTRATION. L'application I est injective. En effet, supposons que $f^*([\xi]) = \theta$, élément distingué de $H^1(X, \underline{G})$. Comme $[\xi]$ est différent de l'élément distingué de $H^1(X(G), \underline{G})$, l'application f qui doit induire la fibration triviale sur X doit être homotope à l'application constante de X dans $X(G)$. L'application I est surjective, car $[X, X(G)]$ est l'ensemble de *toutes* les classes d'isomorphie d'espaces fibrés G-principaux sur X, et lorsque $[f]$ parcourt tout $[X, X(G)]$ son image $I([f])$ parcourt tout $H^1(X, \underline{G})$.

1.1.5. Cohomologie non abélienne et groupe classifiant de Milnor. [18a]

Soient G et G' deux CW- groupes dénombrables. D'après la construction de l'espace classifiant de Milnor, un homomorphisme $h: G \longrightarrow G'$ induit canoniquement une application : $X(h): X(G) \longrightarrow X(G')$.

DEFINITION. *Deux homomorphismes h_1 et h_2 de G dans G' sont dits* GC-équivalents *si $X(h_1)$ et $X(h_2)$ sont homotopes.*

Désignons par (GC) cette relation d'équivalence dans $Hom_g(G, G')$, le groupe des homomorphismes de G dans G', et par $[G, G']_g$ l'ensemble quotient $Hom_g(G,G')/(GC)$

qui a pour élément distingué la classe des homomorphismes h tels que $X(h)$ soit homotope à l'application constante.

Soient G un CW-groupe dénombrable, X un CW-complexe dénombrable *connexe* $G(X)$ le groupe classifiant de Milnor de X, $S(X)$ et $S(G(X))$ leurs complexes singuliers respectifs, $\Omega(S(X))$ l'espace des lacets de $S(X)$, et $|S(G(X))|$ la réalisation géométrique de $S(G(X))$. On vérifie facilement les assertions suivantes :

PROPOSITION 1 : $[G(X), G]_g = (X, G)$.

PROPOSITION 2 : *$\Omega(S(X))$ a le même type d'homotopie de groupe que $S(G(X))$ et $G(X)$ est équivalent au sens de Milnor à $|S(G(X))|$.*

CORROLAIRE. $[G(X), G]_g = [\Omega(S(X)), S(G)]_g$.

Considérons maintenant l'ensemble $H^1(X, \underline{G(X)})$ et soient $[\xi]$ la classe de cohomologie de la fibration universelle $E(X, G(X))$. Un homomorphisme $h : G(X) \to G$ induit une application d'ensembles pointés $h_* : H^1(X, \underline{G(X)}) \to H^1(X, \underline{G})$ qui ne dépend que de la classe de (GC)-équivalence $[h]_g$ de h.

Définissons l'application $I_g : [G(X), G]_g \to H^1(X, \underline{G})$ par la formule

$$I_g([h]_g) = h_*([\xi])$$

PROPOSITION 3 : *I_g est un isomorphisme d'ensembles pointés.*

1.1.6. $\overline{W}$ - construction et cohomologie non abélienne simpliciale de P. Dedecker[6d].

Soient X un ensemble simplicial, Γ un groupe simplicial non abélien opérant effectivement sur un ensemble simplicial Y, et $H^1(X, \Gamma)$ le 1-ensemble de cohomologie non abélienne simpliciale de X dans Γ.

A un 1- cocycle

$$\tau : X \longrightarrow \Gamma$$

nous pouvons associer canoniquement une application :

$$k : X \longrightarrow \overline{W}(\Gamma)$$

par la formule

$$k_\tau(x) = [\tau(d_o^{n-1}x, \tau(d_o^{n-2}x), \dots, \tau(x)] \qquad \text{si} \quad x \in X_n .$$

On vérifie facilement que si τ' est cohomologue à τ alors k'_τ, est homotope à k_τ, d'où avec les mêmes raisonnements que plus haut, la proposition suivante

PROPOSITION : *$H^1(X, \Gamma)$ est isomorphe à $[X, \overline{W}(\Gamma)]$*

1.1.7. L'ensemble (X,G).

De tout ce qui précède il résulte le théorème suivant :

THEOREME. *Dans les sous-catégories des espaces topologiques* S-admissibles *et des groupes* $\overline{\mathbf{W}}$-admissibles *les ensembles pointés* (X, G), $H^1(X, \underline{G})$, $[X, X(G)]$, $[S(X), \overline{W}(S(G))]$, $H^1(S(X), S(G))$, *sont isomorphes, les isomorphismes étant réalisés par les applications canoniques définies plus haut, ainsi que par leurs composées.*

Autrement dit pour de tels espaces et tels groupes la classification des espaces fibrés principaux topologiques ou simpliciaux peut se faire indifféremment par les différentes méthodes citées, et le résultat commun peut être noté par la notation unique (X, G).

REMARQUE 1. Cette situation est analogue au cas des couples triangulables sur lesquels toutes les théories homologiques sont équivalentes.

REMARQUE 2. Si on se restreint à des espaces X connexes, on peut encore ajouter $[G(X), G]_g$ dans le théorème précédent.

Fibrés principaux avec point-base.

Soit X un espace muni d'un point-base x_o. Un fibré principal avec point-base est défini par la donnée d'un fibré principal sur X et d'un point base de l'espace total se projetant sur x_o. On ne considère alors que des homomorphismes de fibrés respectant les points-bases. D'autre part on peut vérifier que l'ensemble $(X, G)_o$ des classes d'isomorphie de fibrés G-principaux munis de point-base est isomorphe à $[X, X(G)]_o$, ensemble des classes d'homotopie des applications continues de X dans $X(G)$ respectant les points-bases. Soit $H^1(X, \underline{G})_o$ l'ensemble des classes de cohomologie de 1-cocycles appliquant le point-base x_o sur l'identité de G, le théorème précédent est encore valable en remplaçant (X, G) par $(X, G)_o$, $[X, X(G)]$ par $[X, X(G)]_o$, $H^1(X, \underline{G})$ par $H^1(X, \underline{G})_o$, *etc...*

Automorphismes de (X, G)

Soit $A(X)$ le groupe de tous les automorphismes de X. Ce groupe opère à droite sur $Hom(X, X(G))$. Il est clair que l'opération est compatible avec l'homotopie. Par passage au quotient nous obtenons une opération de $\pi_o(A(X))$ sur $[X, X(G)]$. L'ensemble quotient $[X, X(G)] / \pi_o(A(X))$ peut s'interpréter comme l'ensemble des classes d'isomorphie invariante par automorphismes de la base.

EXEMPLE. $X = S^2$, *sphère de dimension* 2 ; $G = S^1 = K(Z, 1)$. Alors $(X, G) = Z$ et $\pi_o(A(X)) = Z_2$ et l'ensemble quotient est Z^+, le monoïde des entiers positifs ou nul .

REMARQUE. On peut aussi considérer, dans ce qui précéde, à la place de $A(X)$, le monoïde des équivalences homotopiques de X.

1.2. RELATION ENTRE (X,G) ET $H^{n+1}(X, \pi_n(G))$.

1.2.1. L'isomorphisme classique.

Nous savons que si G est de type $K(\pi, n)$ où $\pi = \pi_n(G)$, $n \geq 0$ alors l'espace classifiant $\overline{W}(G)$ est de type $K(\pi, n+1)$. Il s'en suit que

$$(X, G) = [X, W(G)] = [X, K(\pi, n+1)] = H^{n+1}(X, \pi)$$

Remarquons que pour $n = 0$, $\pi_o(G)$ peut ne pas être abélien, et alors $H^1(X, \pi)$ est le 1-ensemble de cohomologie non abélienne discrète (de P. Olum [23]).

Il s'agit de généraliser cette relation au cas où G n'est plus de type $K(\pi, n)$.

1.2.2. Cas où G est abélien.

Dans ce cas $\overline{W}(G)$ est aussi un groupe abélien et $(X, G) = [X, \overline{W}(G)]$ est un groupe (abélien) .On peut appliquer le théorème de la suite spectrale du groupe $[X, G]$ (Wei Shu Shih [26]). Vu les hypothèses la suite spectrale correspondante est triviale, et nous avons l'isomorphisme : $(X, G) = \prod\limits_{n}^{\infty} H^{n+1}(X, \pi_n)$ ou π_n parcourt $\pi_*(G)$. On retrouve ainsi la projection canonique $(X, G) \to H^{n+1}(X, \pi_n)$ qui est un homomorphisme de groupes abéliens.

1.2.3. Cas où G est non abélien et (n-1)-connexe, n > 0.

Soit G un groupe topologique non abélien $(n-1)$-connexe, $n > 0$. Dans ce cas $\overline{W}(G)$ n'est plus un groupe et le théorème de la suite spectrale de $[X, G]$ n'est plus applicable. Nous allons étudier directement une relation entre l'ensemble (X, G) et le groupe abélien $H^{n+1}(X, \pi_n(G))$ de cohomologie de X dans le premier groupe d'homotopie non nul $\pi_n(G)$, $n > 0$.

THEOREME.- *Soit X un espace topologique, G un groupe topologique $(n-1)$-connexe, $n > 0$. Il existe une application canonique et fonctorielle de (X, G) dans le $(n+1)$-groupe de cohomologie $H^{n+1}(X, \pi_n(G))$ de X dans le premier groupe d'homotopie non nul de G*

$$\delta_{n+1} : (X, G) \to H^{n+1}(X, \pi_n(G))$$

appliquant une classe d'isomorphie de G-fibrés $[\xi] \in (X, G)$ sur une classe de cohomologie homotopique $\delta_{n+1}([\xi])$ qui est la classe caractéristique de $[\xi]$.

Si G est abélien δ_{n+1} devient un homomorphisme de groupes. Si G est de type $K(\pi, n)$ alors δ_{n+1} est un isomorphisme de groupes.

Autrement dit, δ_{n+1} associe à chaque classe d'isomorphie d'espaces fibrés l'obstruction à l'existence d'une section continue de cette fibration. Canonique veut dire ici indépendant du choix des classes d'isomorphie. D'autre part δ_{n+1} est fonctoriel dans ce sens : soit une application continue $f : X \longrightarrow X'$, f induit une application d'ensembles pointés $f_1^* : (X', G) \longrightarrow (X, G)$ et un homomorphisme de groupes $f_2^* : H^{n+1}(X', \pi_n(G)) \longrightarrow H^{n+1}(X, \pi_n(G))$. L'application δ_{n+1} commute avec f_1 et f_2 autrement dit, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
(X', G) \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "f_1^*"'] & H^{n+1}(X', \pi_n(G)) \arrow[d, "f_2^*"] \\
(X, G) \arrow[r, "\delta_{n+1}"'] & H^{n+1}(X, \pi_n(G))
\end{tikzcd}$$

De même soit G' un deuxième groupe $(n-1)$-connexe et $h : G \longrightarrow G'$ un homomorphisme, h induit un homomorphisme

$$\pi_n(G) \longrightarrow \pi_n(G')$$

et nous avons encore le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
(X, G) \arrow[r, "\delta_{n+1}"'] \arrow[d, "h_*"'] & H^{n+1}(X, \pi_n(G)) \arrow[d, "h_*"] \\
(X, G') \arrow[r, "\delta_{n+1}"'] & H^{n+1}(X, \pi_n(G'))
\end{tikzcd}$$

La démonstration du théorème est basée sur l'étude de la suite exacte des (X, G) attachée à la suite exacte de groupes

$$e \rightarrow G_{[n]} \rightarrow G \rightarrow G^{(n)} \rightarrow e$$

où $G_{[n]}$ est la fibre de la fibration de G sur son n$^{\text{ième}}$ système de Postnikov $G^{(n)}$. Rappelons que $\pi_i(G_{[n]}) = \pi_i(G)$ pour $i > n$ et $\pi_j(G^{(n)}) = \pi_j(G)$ pour $j \leq n$.

Construction de δ_{n+1}.- C'est la projection

$$(X, G) \longrightarrow (X, G^{(n)})$$

associée à l'épimorphisme $G \longrightarrow G^{(n)}$. La construction explicite est basée sur la décomposition en système de Postnikov de $\overline{W}(G)$ et le lemme suivant [26a]

LEMME.- *$\overline{W}(G)^{(n+1)}$ est isomorphe à $\overline{W}(G^{(n)})$*, [26a].

Ainsi δ_{n+1} est le composé des isomorphismes et projections canoniques suivants

$$(X, G) = [X, \overline{W}(G)] \longrightarrow [X, \overline{W}(G)^{(n+1)}] = [X, \overline{W}(G^{(n)})] =$$

$$= [X, K(\pi_n(G), n+1)] = H^{n+1}(X, \pi_n(G))$$

Interprétation géométrique de δ_{n+1}. Elle est basée sur le lemme suivant

LEMME.- Pour qu'un G-fibré principal soit $(n+1)$-trivial, il faut et il suffit que son groupe structural puisse être réduit au groupe $G_{[n]}$.

Autrement dit, dans les hypothèses du théorème, nous avons la suite exacte

$$\to [X, \overline{W}(G_n)] \xrightarrow[i_n]{} [X, \overline{W}(G)] \xrightarrow[p_{n+1}]{} [X_{n+1}(\overline{W}(G)] \to$$

où la projection p_{n+1} est induite par l'injection canonique du $(n+1)^{ème}$ squelette X_{n+1} dans X.

Par comparaison avec la suite exacte :

$$\to [X, \overline{W}(G_n)] \xrightarrow[i_n]{} [X, \overline{W}(G)] \xrightarrow[\delta_{n+1}]{} [X, \overline{W}(G^{(n)})] \to$$

nous voyons qu'un G-fibré principal sur X est $n+1$-trivial si et seulement si sa classe d'isomorphisme est dans le noyau de δ_{n+1}, car $Ker\ \delta_{n+1} = Im\ i_n = Ker\ p_{n+1}$. En vertu de l'unicité de la classe caractéristique d'un espace fibré nous avons donc le

LEMME. *Soit* $[\xi] \in (X, G)$, *la classe* $\delta_{n+1}([\xi]) \in H^{n+1}(X, \pi_n(G))$ *est l'obstruction primaire à l'existence d'une section continue dans le fibré défini à un isomorphisme près par* $[\xi]$.

Autrement dit $\delta_{n+1}([\xi])$ est la classe caractéristique de $[\xi]$.

La fonctorialité de δ_{n+1} se vérifie facilement.

• Si G est abélien $\overline{W}(G)$ est un groupe abélien, de même pour $\overline{W}(G)^{(n+1)}$ et la projection $p_{n+1} : \overline{W}(G) \to \overline{W}(G)^{(n+1)}$ est un homomorphisme de groupes abéliens, d'où la propriété énoncée.

Si G est de type $K(\pi,n)$ nous savons que $\overline{W}(G)$ est alors de type $K(\pi,n+1)$ et δ_{n+1} est l'isomorphisme $[X, K(\pi, n+1)] = H^{n+1}(X, \pi)$.

Dans le cas particulier où $\pi = Z$ et $n = 1$ nous avons le

COROLLAIRE. *L'application*

$$\delta_2 : H^1(X, \underset{\sim}{C}_c) \to H^2(X, Z)$$

est un isomorphisme et $\delta_2([\xi]) = c_1([\xi])$, *première classe de Chern de* $[\xi]$.

DEMONSTRATION. En effet, C^* est de même type d'homotopie que le cercle S^1 qui est un groupe abélien x de type $K(Z, 1)$. Son espace classifiant est l'espace projectif de dimension infinie, de type $K(Z, 2)$, d'où la propriété, en tenant compte de l'isomorphisme $H^1(X, C^*_c) = [X, \overline{W}(C^*)]$ et en appliquant le théorème précédent.

1.2.4. Caractérisation de Im δ_{n+1}.

Soit un groupe topologique G, non abélien, et $(n-1)$-connexe : $\pi_i(G) = 0$ pour $i \leq n-1$. Nous savons qu'il existe une application canonique :

$$\delta_{n+1} : (X, G) \to H^{n+1}(X, \pi_n(G)) .$$

Il s'agit de délimiter l'image de δ_{n+1}.

Nous allons chercher une condition nécessaire pour qu'un élément $k \in H^{n+1}(X, \pi_n(G))$ appartienne à l'image de δ_{n+1}. Soit π_m le deuxième groupe d'homotopie non nul de G, $m \geq n+1$, $n_i(G) = 0$ pour $n < i < m$. Soit $\xi \in H^{m+1}(\pi_n, n, \pi_m)$ l'invariant d'Eilenberg-Mac Lane de G, il définit canonique - ment, par désuspension, un élément $\xi' \in H^{m+2}(\pi_n, n+1, \pi_m)$, qui n'est autre que l'invariant d'Eilenberg-Mac Lane de l'espace classifiant $\overline{W}(G)$.

THEOREME. *Si k appartient à l'image de δ_{n+1} alors $\xi' \circ k = 0$.*

DEMONSTRATION. En effet, on a les isomorphismes suivants :

$$H^{n+1}(X, \pi_n(G)) = [X, K(\pi_n, n+1)]$$

$$H^{m+2}(\pi_n, n+1, \pi_{m+2}) = [K(\pi_n(G), n+1), K(\pi_m(G), m+2)] .$$

et le diagramme, où nous identifions une classe avec son représentant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g'"] \arrow[ddr, "k"'] & \overline{W}(G) \arrow[d] \\
& \overline{W}(G)^{(m+1)} = K(\pi_m(G), m+1) \arrow[d] \\
& \overline{W}(G)^{(n+1)} = K(\pi_n(G), n+1) \arrow[dr, "\xi'"'] \\
& & \overline{W}(\overline{W}(G)^{(m+1)}) = K(\pi_m(G), m+2)
\end{tikzcd}$$

où $k \in [X, \overline{W}(G)^{(n+1)}]$ et $\xi' \in [\overline{W}(G)^{(n+1)}, \overline{W}(\overline{W}(G)^{(m+1)})]$, $g \in [X, \overline{W}(G)]$ et $g' \in [X, \overline{W}(G)^{(n+1)}]$.

Nous savons que h peut être relevé en g' seulement si $\xi' \circ k = 0$. La condition est nécessaire mais pas suffisante car il faut encore que g' puisse être relevé en $g : X \to \overline{W}(G)$.

Néanmoins nous avons le :

COROLLAIRE. *Soit G un groupe non abélien topologique ayant seulement deux groupes d'homotopie non nuls $\pi_n(G)$ et $\pi_m(G)$. Pour que $k \in H^{n+1}(X, \pi_n(G))$ appartienne à l'image de l'application canonique $h : H^1(X, G) \to H^{n+1}(X, \pi_n(G))$ il faut et il suffit $\xi' \circ K = 0$, ξ' étant l'invariant d'Eilenberg-Mac Lane de l'espace classifiant $\overline{W}(G)$.*

1.3. CALCUL DE (X, G).

1.3.1. Cas où G est de type $K(\pi, n)$, $n \geq 0$.

1.3.1.1. *Détermination d'une classe.*

C'est le théorème de Hopf-Hurewicz (cf. Paul Olum [23], théorème 9.11.).

1.3.1.2. *Enumération des classes :*

C'est le résultat classique :

$$\begin{aligned}(X, G) &= [X, \overline{W}(G)] \\ &= [X, K(\pi, n+1)] \\ &= H^{n+1}(X, \pi).\end{aligned}$$

1.3.2. Cas où G est abélien

1.3.2. 1. *Détermination d'une classe.*

Si les deux fibrations $E(X, G)$ et $E'(X, G)$ considérées sont définies par leur atlas, le problème est résolu par la définition même d'une classe de cohomologie de X à valeur dans le faisceau *abélien* G. Si $E(X, G)$ et $E'(X, G)$ sont définis respectivement par les applications $f : X \longrightarrow \overline{W}(G)$ et $f' : X \longrightarrow \overline{W}(G)$ de X dans l'espace classifiant $\overline{W}(G)$ on peut remarquer que G, étant abélien, a tous les invariants de Postnikov nuls et qu'il en est de même de $\overline{W}(G)$ et on peut appliquer le théorème de Hopf-Hurewicz pour chaque facteur $K(\pi_n(G), n)$. Nous omettons les détails.

1.3.2.2. *Enumération des classes.*

Nous savons que (X, G) est isomorphe à $H^1(X, \underset{\sim}{G})$ ou à $[X, \overline{W}(G)]$. Nous allons construire un isomorphisme de (X, G) sur $\prod_{n=o}^{\infty} H^{n+1}(X, \pi_n(G))$, $n = 0, 1, \ldots$.

Soit la classe fondamentale $\theta \in H^*(\overline{W}(G) H_*(\overline{W}(G)))$. Elle détermine un homorphisme $\widetilde{\theta} : H_*(\overline{W}(G)) \longrightarrow \pi_*(\overline{W}(G))$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} H_*(\overline{W}(G)) \arrow[r, "\widetilde{\theta}"] & \pi_*(\overline{W}(G)) \\ \pi_*(\overline{W}(G)) \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "id\,\pi_*"'] & \end{tikzcd}$$

c'est-à- dire $\widetilde{\theta}\, h = id\,\pi_*$, où h est l'homomorphisme de Hurewicz. En effet le projecteur $p : H_*(\overline{W}(G)) \longrightarrow \pi_*(\overline{W}(G))$ relativement à h est bien défini car les invariants de Postnikov de $W(G)$, qui est un groupe abélien, sont tous nuls. Alors p induit un homomorphisme

$p_* : H^*(\overline{W}(G), H_*(\overline{W}(G)) \longrightarrow H^*(\overline{W}(G), \pi_*(\overline{W}(G)))$ et $\widetilde{\theta} = p_*(\theta)$.

Soit $k \in (X, G)$. Par l'isomorphisme $(X, G) = [X, \overline{W}(G)]$ à k correspond une application $f : X \longrightarrow \overline{W}(G)$ qui induit une application

$$f^* : H^*(\overline{W}(G), \pi_*(\overline{W}(G))) \longrightarrow H^*(X, \pi_*(\overline{W}(G)).$$

Nous définissons l'application

$$I : (X,\ G) \longrightarrow \prod_{n=o}^{\infty} H^{n+1}(X,\ \pi_n(G))$$

par

$$I(k) = f^*(\widetilde{\theta}).$$

PROPOSITION : *I est un isomorphisme.*

DEMONSTRATION laissée au lecteur.

1.3.3. Cas où G est non abélien et a deux groupes d'homotopie non nuls.

1.3.3.1. Détermination d'une classe.

Dans ce cas $\overline{W}(G)$ a deux groupes d'homotopie non nuls $\pi_{p+1}(\overline{W}(G)) = \pi$ et $\pi_{q+1}(\overline{W}(G)) = \pi'$. Il s'agit de trouver la condition nécessaire et suffisante pour que deux applications $f, g : X \longrightarrow \overline{W}(G)$ soient homotopes. Nous allons le faire en même temps que l'énumération des classes.

1.3.3.2. Enumération des classes.

Décomposé en système de Postnikov, $\overline{W}(G)$ est un fibré $E(B,\ F)$ de base $B = \overline{W}(G)^{(p+1)} = K(\pi,\ p+1)$ et de fibre $F = K(\pi',\ q+1)$. Nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{W}(G) = E \supset F = K(\pi',\ q+1) \arrow[d, "p"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "k"'] & B \arrow[r, "\xi"'] & \overline{W}(K(\pi',\ q+1)) = K(\pi',\ q+2)
\end{tikzcd}$$

et l'application canonique

$$p_* : [X,\ E] \longrightarrow [X,\ B] = H^{p+1}(X,\ \pi)$$

définie par

$$p_*([f]) = [p \circ f].$$

D'après la caractérisation de l'image de p_* nous avons $Im\ p_* = \{[k];\ [\xi o k] = o\}$ Posons $Im\ p_* = M$. C'est un ensemble pointé. Il s'agit de trouver le noyau de l'application surjective d'ensembles pointés

$$[X,\ E] \xrightarrow[p_*]{} M \rightarrow e$$

Or nous avons la fibration

$$Hom\,(X,\,E)\,(\tilde{\tilde{B}},\,Hom\,(X,\,F))$$

où $\tilde{B} \subset Hom\,(X,\,B)$ est l'ensemble des applications de X dans β qui peuvent être relevées en une application de X dans E. Nous avons évidemment $\pi_o\,(\tilde{B}) = M$. La suite exacte d'homotopie de la fibration précédente s'écrit, en posant $F' = Hom\,(X,\,F)$, $E' = Hom\,(X,\,E)$, et $B' = Hom\,(X,\,B)$.

$$\pi_1\,(B') \to \pi_o\,(F') \to \pi_o\,(E') \to M \to e$$

Or, d'après (Thom [29]) nous savons que

$$\pi_1\,(B') = H^p\,(X,\,\pi).$$

Nous avons donc le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} H^p\,(X,\,\pi) & \xrightarrow{\partial} & H^{q+1}(X,\,\pi') & \longrightarrow & & & & & \\ \approx \downarrow & & \downarrow \approx & & & & & & \\ \pi_1\,(B') & \longrightarrow & \pi_o\,(F') & \to & \pi_o\,(E') & \to & M & \to & e \end{array}$$

où $\partial : H^p\,(X,\,\pi) \longrightarrow H^{q+1}\,(X,\,\pi')$ s'exprime en fonction de l'invariant d'Eilenberg-Mac Lane de G, soit $\xi \in H^{q+1}(\pi\,,\,p,\,\pi')$, qui définit l'accouplement $o\,\xi : H^p\,(X,\,\pi)\,.\,H^{q+1}\,(\pi,\,p,\,\pi') \to H^{q+1}(X,\,\pi')$.

Nous avons en effet :

$$\partial\,(x) = x \circ \xi$$

en désignant par x une classe de $H^p\,(X,\,\pi)$.

Posons $Q = Im\,\partial$. Il est clair que l'application $i : H^{q+1}\,(X,\,\pi')/Q \to \pi_o\,(E')$ est une injection et on a la suite exacte d'ensembles pointés :

$$e \to H^{q+1}\,(X,\,\pi')/Q \to [X,\,\overline{W}\,(G)] \to M \to e$$

On peut vérifier qu'elle est triviale.

Deux applications $f,\,g : X \longrightarrow \overline{W}\,(G)$ sont donc homotopes si et seulement si pof et pog le sont (on est aussi ramené au théorème de Hopf-Hurewicz) et la classe de cohomologie de la différence de cocycles classique $d\,(f,\,g)$ appartient à $H^{q+1}\,(X,\,\pi')/Q$.

REMARQUE : 1. On peut encore généraliser ce qui précède au cas où G a un seul invariant de Postnikov non nul avec plus de deux groupes d'homotopie non nuls. Les modifications sont évidentes et nous omettons les détails.

2. Dans ce qui précède, on peut aussi appliquer la méthode de P. Olum dans son travail "Invariants for effective homotopy classification and extension of Mappings". Mem. Amer. Math. Soc. N° 37. (1961).

1.3.4. Fibrations sur une sphère.

LEMME.- *Soit X un espace connexe par arc,* $\pi_n(X)/\pi_1(X)$ *l'ensemble quotient de* $\pi_n(X)$ *par l'opération de* $\pi_1(X)$*, alors*

$$[S_n, X] = \pi_n(X)/\pi_1(X)$$

où $[S_n, X]$ *désigne l'ensemble des classes d'homotopie des applications continues (ne respectant pas nécessairement les points-bases) de la sphère* S_n *dans* X.

DEMONSTRATION.- En effet, comme $\pi_o(X) = 0$, on a une surjection $\pi_n(X) \to [S_n, X]$ et deux éléments de $\pi_n(X)$ ont même image si et seulement s'ils appartiennent à une même orbite de $\pi_1(X)$.

En appliquant le lemme précédent et le théorème de la classification des G-fibrés principaux on retrouve, en tenant compte des isomorphismes $\pi_n(\overline{W}(G)) = \pi_{n-1}(G), \ldots,$ $\pi_1(\overline{W}(G)) = \pi_o(G)$, un résultat classique dû à Feldbau : $(S_n, G) = \pi_{n-1}(G)/\pi_o(G)$.

D'autre part l'ensemble $(S_n, G)_o$ des classes d'isomorphie des G-fibrés avec point-base sur S_n est isomorphe à $\pi_{n-1}(G)$.

CHAPITRE DEUX

REPRESENTABILITE DES ESPACES FIBRES.

2.1. INTRODUCTION.

2.1.1. Définitions générales.

Soient X et Y deux espaces topologiques, G et G deux groupes topologiques, et $E(X, G)$ un G-fibré principal sur X.

DEFINITION 1. *Soit* $\varphi : \widetilde{G} \to G$ *un homomorphisme continu. Le fibré principal* $E(X, G)$ *est dit* $(\widetilde{G}, \varphi)$ - représentable *s'il existe un fibré principal* $E'(X, G)$ *et un homomorphisme fibré continu, c'est-à-dire une application continue* $\Phi : E'(X, G) \to E(X, G)$ *telle que, pour tout* $x \in X$, *on ait :*

$$\Phi(\tilde{h}_x s) = (\Phi(\tilde{h}_x)) \cdot \varphi(s).$$

où

$$\tilde{h}_x \in \tilde{G}_x, \quad h_x \in G_x, \quad \tilde{s} \in \tilde{G}, \quad s \in G.$$

CAS PARTICULIERS. 1. Si $\varphi : \widetilde{G} \to G$ est l'injection canonique du sous-groupe G de G, alors Φ est une injection sur un sous-fibré de $E(X, G)$ et on dit que $E(X, G)$ admet une *réduction* du groupe structural de G à $\widetilde{G}$. (*Ehresmann* [8])

2. Si $\varphi : \widetilde{G} \to G$ est la projection de G sur le groupe quotient G alors Φ est un homomorphisme de E' sur E, fibré-quotient de E' et on dit que $E(X, G)$ admet une *extension* du groupe structural de G à $\widetilde{G}$ (*Ehresmann* [8c]).

DEFINITION 2. Soit $f : X \to Y$ *une application continue. Le fibré principal* $E(X, G)$ *est dit* (f, Y)-représentable *s'il existe un fibré principal* $E'(Y, G)$ *tel que le fibré in-* $(f^* E')(Y, G)$ *soit isomorphe à* $E(X, G)$, *l'isomorphisme* I *se projetant sur* $Id\, X$. *On a alors le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} E(X, G) \arrow[r, "I", "\approx"'] \arrow[d, "p"'] & (f^* E')(X, G) \arrow[r, "F"] & E'(Y, G) \arrow[d, "p'"] \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

CAS PARTICULIERS. 1. Lorsque $f: X \longrightarrow Y$ est l'injection canonique du sous-espace X de Y nous dirons aussi que $E'(Y, G)$ est *l'expansion* du fibré $E(X, G)$ de X à Y.
2. Lorsque $f: X \longrightarrow Y$ est une projection, nous dirons aussi que $E'(Y, G)$ est la *composante* de $E(X, G)$ sur Y.

REMARQUES. 1. On a un exemple du cas particulier *1-* dans le problème de la factorisation d'un espace fibré suivant une relation d'équivalence dans la fibre-type, examiné dans (*Ehresmann* [8d]) : soit un espace fibré $E(p, B, F, G)$ et une relation d'équivalence ρ dans F. Pour que la projection $\pi: E(B, F) \longrightarrow E/\rho(B, F/\rho)$ soit une fibration telle que l'injection $F \longrightarrow E(B, F)$ soit un homomorphisme fibré $F(F/\rho, F') \longrightarrow E(E/\rho, F')$, il faut et il suffit que ρ soit une relation d'équivalence invariante par G. Dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
F(F/\rho, F') \arrow[rr, "\pi"'] \arrow[d] & & E(E/\rho, F') = E(B, F, G) \arrow[dl] \arrow[dd, "p"] \\
F/\rho \arrow[r] & E/\rho(B, F/\rho) \arrow[dr, "p_\rho"'] & \\
& & B
\end{tikzcd}$$

le fibré $E(E/\rho, F')$ est une expansion de $F(F/\rho, F')$ de F/ρ *à* E/ρ.
2. Le fibré $E(E/\rho, F')$ est encore appelé *fibré le long des fibres* (Borel. Hirzebruch. Characteristic classes and homogeneous - spaces I. Amer. J. Math. 1960).

Cas des suites exactes de groupes.

On peut transposer les définitions et problèmes précédents dans le cadre des suites exactes de groupes en remplaçant "fibré" par "suite exacte", fibre par "noyau", "base" par "quotient" et "homomorphisme fibré" par "homomorphisme de suites exactes" Néanmoins, lorsque les groupes ne sont pas abéliens les problèmes deviennent très difficiles à résoudre, car on ne sait pas encore classifier les suites exactes non abéliennes.

2.1.2. Deux problèmes universels.

2.1.2.1. Enoncés.

Soient A, B, C trois espaces topologiques et les deux diagrammes suivants, où les flèches désignent des applications continues

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, dashed, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \\ B \arrow[r, dashed, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

1. Les applications h et g étant données, trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait :

a) $f \circ g = h$ (problème fort)

b) $[f] \circ [g] = [h]$ (problème faible)

où le crochet indique la classe d'homotopie.

2. Les applications f et h étant données, trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait :

a) $h = g \circ f$ (problème fort)

b) $[h] = [g] \circ [f]$ (problème faible)

Il n'y a pas encore de solution générale aux problèmes précédents. Pour les problèmes *faibles* l'une des techniques consiste à *associer* respectivement aux applications G et f les suites exactes d'ensembles pointés

$$[A, B] \to [A, C] \xrightarrow{\partial} \mathfrak{D}$$

$$\mathfrak{D}' \xleftarrow{\partial'} [A, C] \leftarrow [B, C]$$

où $\mathfrak{D}$, ∂, et $\mathfrak{D}'$, ∂' sont des ensembles pointés et des applications d'ensembles pointés à définir. En effet on voit alors qu'une classe $[h] \in [A, C]$ est l'image d'une classe $[f] \in [A, B]$ si et seulement si $\partial([h]) = \theta$, élément distingué de $\mathfrak{D}$. De même $[h] \in [A, C]$ est l'image de $[g] \in [B, C]$ si et seulement si $\partial'([h]) = \theta'$.

On voit que dans ces problèmes les applications $g : B \to C$ et $f : A \to B$ jouent un rôle important. La technique que nous utiliserons dans la suite consiste à construire des espaces D_g et D'_f de sorte que

$$\mathfrak{D} \doteq [A, D_g] \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}' = [D'_f, C]$$

REMARQUE. Les problèmes de représentabilité des fibrés se réduisent aux problèmes universels faibles précédents en prenant pour la

1 - $(\tilde{G}, \tilde{\varphi})$ *-représentabilité :* $A = X$, $B = \overline{W}(G)$, $C = \overline{W}(G)$, $g = \overline{W}(\varphi)$ et h, l'application qui définit le fibré principal $E(X, G)$ considéré.

2 - (f, Y) *-représentabilité :* $A = X$, $B = Y$, $C = \overline{W}(G)$.

2.1.2.2. Cas des points-bases.

Tout ce qui précède peut être transposé de façon évidente au cas des espaces munis de point-base, des applications préservant les points-bases, et des fibrés avec points-bases. Nous omettons les détails.

2.1.2.3. Influence de la commutativité du groupe.

Le lecteur verra dans ce qui suit que le cas des groupes non commutatifs est nettement plus difficile et mérite d'être traité à part. Il semble que l'une des difficultés réside dans le fait que jusqu'à maintenant on ne connait pas encore de foncteur qui associe canoniquement à une suite exacte de la catégorie des groupes non abéliens une autre suite exacte dans la catégorie des groupes abéliens.

2.1.2.4. Problèmes connexes.

Nous allons indiquer quelques relations entre le problème de (f, Y)-représentabilité et certains problèmes connexes.

Elargissement d'une structure fibrée. Soient X un sous-espace de Y, et une structure fibrée $X(V, F, G, H(V, G))$. Elargir cette dernière en une structure fibrée $Y(W, F, G, H'(W, G))$ telle que l'injection d'espace $i : X \to Y$ soit aussi un homomorphisme injectif du fibré X dans le fibré Y. En particulier lorsque $X = F$, $V =$ un point, nous avons le problème de *l'existence* d'une structure fibrée d'espace total Y, de fibrés isomorphes à X.

PROPOSITION. *Soit l'injection $i : X \to Y$. Une condition* nécessaire *pour qu'une structure fibrée $X(p, V, F, G, H(V, G))$ puisse être élargie en une structure fibrée $Y(q, W, F, G, H'(W, G))$ est que le fibré carré $X^2(p^2, X, F, G, p^*H(X, G))$ soit (i, Y)-représentable.*
Démonstration laissée au lecteur.

Reconnaissance d'une projection. Soit $p : E \to Y$, une application surjective continue; quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que p soit la projection d'une structure fibrée (topologique) d'espace total E, de base X ? Comme cas particulier de ce problème, on a celui de la *transitivité* des fibrations. Soient deux fibrés $E'(p', Y, F', G', H')$ et $E(q, E', F, G, H)$; quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que $p = q \circ p'$ soit la projection d'une structure fibrée d'espace total E, de base Y.

L'orsqu'on connait un sous-espace *non vide* X de Y tel que $p^{-1}(X)$ soit fibré sur X par la projection p, on peut ramener les problèmes précédents au problème de $(i\text{-}Y)$-représentabilité, où $i : X \to Y$ désigne l'injection canonique.

2.1.3. Résultats classiques.

2.1.3.1. $(\tilde{G}, \varphi)$-représentabilité.

2.1.3.1.1. Restriction du groupe structural. C'est le cas où φ *est un homomorphisme injectif.* Ce problème a été posé la première fois en 1942 par Ehresmann (Espaces fibrés de structures comparables, C.R. t 214, p. 144-147, 26 I 1942) sous forme de recherche de structures fibrées *plus précises* qu'une structure fibrée donnée. Il a été repris comme étude des *structures subordonnées* à une structure d'espace fibré donnée et ramené à la recherche d'une section d'un espace fibré associé. On peut aussi trouver une formulation analogue par Steenrod (Topology of fibrebundles, p. 44, §§9.3 et 9.4). Le problème a été repris par J. Frenkel [10], qui a retrouvé et précisé les résultats de Ehresmann, en donnant une classification complète des résultats, ainsi que des applications. Récemment Dedecker a réexaminé le problème en le ramenant à la construction d'une *cohomologie à coefficients dans un faisceau d'espaces homogènes.* (Sur la cohomologie non abélienne II, Canad. J. Math. Vol. 15, pp. 84-93). La technique utilisée consiste à *plonger* l'inclusion de faisceaux de groupes : $i : \mathfrak{N} \to \mathfrak{G}$ dans un homomorphisme de faisceau de *groupoïdes* : $i^* : \mathfrak{N}^* \to \mathfrak{G}^*$. D'où le théorème : "Soient $\mathfrak{G}$ un faisceau de groupes (non nécessairement abéliens) et $\mathfrak{N}$ un sous-faisceau *quelconque* de groupes, données auxquelles correspond une application canonique : $i^1 : H^1(X, \mathfrak{N}) \to H^1(X, \mathfrak{G})$. Pour qu'un élément $\xi \in H^1(X, \mathfrak{G})$ soit dans l'image de cette application, il faut et il suffit que dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} H^1(X, \mathfrak{N}) \arrow[r, "i^1"] & H^1(X, \mathfrak{G}) & \\ H^1(X, \mathfrak{N}^*) \arrow[r, "i^*"'] & H^1(X, \mathfrak{G}^*) \arrow[u, "\mu^*"'] \arrow[r, "j^*"'] & H^1(X, \mathfrak{H}^*) \end{tikzcd}$$

son image inverse $\mu^{*-1}(\xi)$ contienne un élément $\xi^* \in H^1(X, \mathfrak{G}^*)$ envoyé par j^* sur la classe triviale principale de $H^1(X, \mathfrak{H}^*)$.

2.1.3.1.2. Extension du groupe structural. C'est le cas où φ est un homomorphisme surjectif. Le problème de l'extension du groupe structural d'un fibré a été posé par Ehresmann [8c] lors de l'étude de l'existence d'une connexion de Cartan de type donné sur une variété donnée. Il a esquissé une solution par la méthode des obstructions homotopiques. Dans le cas d'une extension inessentielle de groupes il a indiqué une construction de l'extension du fibré donné. Le problème a été repris par

Dedecker [6] Frenkel [10] par la méthode de la cohomologie dans un faisceau de de groupes ou de groupoïdes, et par Haefliger [12a] par la méthode des obstructions. Nous rappelons ci-dessous les principaux résultats.

Soit P un fibré principal de base X *paracompacte*, et de groupe G''. Soit une extension fibrée [3] [8a] $G(G'',G')$. Si G' est abélien on peut définir le fibré associé $E_1(X, G', G'_1, P)$ (resp. $E(X, G', G'', P)$) associé à P en faisant opérer G'' sur G' comme groupe d'automorphismes de groupe (resp. d'homéomorphismes d'espace). Soit E_1 (resp. E) le faisceau des germes de sections continues du fibré E_1 (resp. E).

a. (Frenkel [10]). Dans ces conditions pour que le fibré principal P admette une extension de groupe G il faut et il suffit que le cobord $\Delta : H^1(X, G'') \to H^2(X, E)$ applique $\xi(P)$ sur l'élément neutre de $H^2(X, E)$. Une telle extension $E(X, G)$ définit les opérations de groupe $H^0(X, E_1)$ dans l'ensemble $H^1(X, E)$: toutes les extensions correspondent biunivoquement aux classes d'intransitivité de $H^0(X, E_1)$ le fibré $E(X, G)$ correspondant à la classe de l'élément nul de $H^1(X, E)$.

b. (Haefliger [12a]). Soit φ: $G \to G''$ un revêtement connexe d'un groupe topologique G'' et G' le noyau de φ. Pour qu'un fibré $E(X, G'')$ admette une extension associée à φ il faut et il suffit qu'une certaine classe caractéristique appartenant à $H^2(X, G')$ soit nulle. Cette classe est l'image par la transgression dans $E(X, G'')$ de la classe fondamentale $\omega \in H^1(G'', G')$ du revêtement G de G''.

Si G est un groupe de Lie compact, connexe, l'extension $G(G'', G')$ est déterminée par une classe d'homomorphismes du groupe fondamental $\pi_1(G'') = \pi$ dans le centre $Z(G')$ de G'. On peut toujours choisir un homomorphisme ψ de cette classe tel que l'image $\psi(\pi)$ soit un sous-groupe fini $\hat{G}'$ de G'. Alors l'annulation d'une certaine classe caractéristique $\alpha \in H^2(X, \hat{G}')$ est une condition suffisante pour qu'il existe une extension de $E(X, G'')$ associée à φ.

c. (Dedecker [6c]). Si G' est non abélien on peut définir un ensemble $H^2(X, \Phi_{G'})$ de cohomologie de X dans un système de coefficients $\Phi_{G'}$ associé à G'. L'ensemble $H^2(X, \Phi_{G'})$ possède une classe *nulle* et des classes *neutres*. On peut construire le cobord $\delta^1 : H^1(X, G'') \to H^2(X, \Phi_{G'})$. Alors le fibré principal $E(X, G'')$ de base X paracompacte est l'image d'un fibré principal $E(X, G)$ si $\delta^1(\xi(E(X, G'')))$ est une classe neutre de $H^2(X, \Phi_{G'})$.

2.1.3.2. (f, Y)-représentabilité. Pas de résultats classiques explicites à la connaissance de l'auteur.

2.2. REPRESENTABILITE DANS LE CAS ABELIEN.

2.2.1. $(\tilde{G}, \varphi)$ - représentabilité.

2.2.1.1. Définitions générales.

Soit G un groupe abélien topologique. L'espace classifiant $\overline{W}(S(G))$ du complexe singulier $S(G)$ est encore un groupe abélien simplicial. Nous allons utiliser ce fait pour définir une cohomologie répondant à la question de $(\tilde{G}, \varphi)$- représentabilité.

En nous mettant dans les catégories des espaces S - admissibles et des groupes $\overline{W}$ - admissibles, *nous écrirons,* pour simplifier, X *et* G *au lieu de* $S(X)$ *et* $S(G)$, en raison des isomorphismes évidents.

Posons $\overline{W}^o(G) = G$ et $\overline{W}^n(G) = \overline{W}(\overline{W}^{n-1}(G))$, $n = 1, 2, \ldots$ Définissons le $n^{ième}$ *groupe de cohomologie classifiante abélienne* par l'égalité :

$$^{n}(X, G) = [\, X, \overline{W}^n(G)\,]$$

l'élément neutre étant la classe d'homotopie de l'application constante. En particulier $^{1}(X, G) = (X, G)$, le groupe abélien des classes d'isomorphie de fibrés principaux de base X, de groupe G *abélien.*

Soit maintenant une suite exacte de groupes abéliens :

$$o \to G' \to G \to G'' \to o$$

sa structure fibrée principale est définie par une application simpliciale $\gamma : G'' \to \overline{W}(G')$, unique à une homotopie près. Nous définissons le O- cobord δ^o: $^{o}(X, G'') \to {}^{1}(X, G')$ comme suit : soit $[\, b\,] \in [\, X, G''\,]$, alors $\delta^o([\, b\,]) = [\, \gamma \circ b\,] \in [\, X, \overline{W}(G')]$. D'après Shih Weishu [26] la fibration de Kan

$$\overline{W}(G') \to \overline{W}(G) \to \overline{W}(G'')$$

est encore une suite exacte et l'on peut itérer les constructions précédentes.

2.2.1.2. Suite exacte de cohomologie.

LEMME 1. *Soit un fibré $E(p, B, G)$ défini à un isomorphisme près par une application $f : B \to \overline{W}(G)$. Soit X un espace quelconque. Une application $g : X \to B$ peut être relevée en une application $\hat{g} : X \to E$ si et seulement si l'application composée $f.g : X \to \overline{W}(G)$ est homotope à l'application constante.*

DEMONSTRATION. La condition est nécessaire. En effet supposons que $g = p.\hat{g}$. D'après la définition même du fibré induit, l'application $\hat{g}$ fournit une section du fibré induit $g^*(E)$ sur X, et comme X est quelconque la fibration induite considérée doit correspondre à une application homotopiquement triviale de X dans l'espace classifiant $\overline{W}(G)$.

La condition est suffisante car on aurait alors un fibré trivial sur X et par composition avec l'application canonique $\overline{g} : g^*(E) \to E$ une section de $g^*(E)$ donne bien une application $\hat{g} : X \to E$ qui se projette sur $g : X \to B$.

$$\begin{tikzcd}
\overline{g} : g^*(E) \arrow[r] \arrow[d] & E > G \arrow[d, "p"] & \\
X \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "\hat{g}"] & B \arrow[r, "f"'] & \overline{W}(G)
\end{tikzcd}$$

LEMME 2. *Soit une suite exacte de groupes (non nécessairement abéliens)*

$$e \to G' \to G \to G'' \to e.$$

Un fibré principal $E(X, G')$ *est équivalent à un fibré de base* X, *trivial dans le groupe* G *(cf. Steenrod) si et seulement si* $E(X, G')$ *est équivalent au fibré induit sur* X *par une application de* X *dans* G'' *et la fibration* $G(G'', G')$.

Démonstration évidente.

LEMME 3. *On a la suite exacte*

$$\to [X, G'] \to [X, G] \xrightarrow[j]{} [X, G''] \xrightarrow[\delta^o]{} [X, \overline{W}(G')] \xrightarrow[i]{} [X, \overline{W}(G)] \to$$

DEMONSTRATION. En tenant compte des suites exactes d'homotopie des fibrations $G(G'', G')$ et $\overline{W}(G)(\overline{W}(G''), \overline{W}(G'))$ il suffit de voir que $Im\ j = Ker\ \delta^o$ et $Im\ \delta^o = Ker\ i$. Or la première égalité résulte du lemme 1 et la deuxième, du lemme 2.

THEOREME. *Soit* $o \to G' \to G \to G'' \to o$ *une suite exacte de groupes abéliens topologiques.*

Nous avons la suite exacte de cohomologie classifiante abélienne

$$o \to {}^{o}(X, G') \to {}^{o}(X, G) \to {}^{o}(X, G'') \to {}^{1}(X, G') \to \cdots$$
$$\cdots \to {}^{i-1}(X, G'') \to {}^{i}(X, G') \to {}^{i}(X, G) \to \cdots$$

DEMONSTRATION. Pour chaque étage l'exactitude est évidente d'après la définition de ${}^{i}(X, G)$ et la suite exacte d'homotopie de la fibration $\overline{W}(G') \to \overline{W}(G) \to \overline{W}(G'')$. Pour les cobords l'exactitude découle des lemmes précédents.

2.2.1.3. *Applications.* Comme application immédiate du théorème précédent nous avons les propositions suivantes :

PROPOSITION 1. *(Restriction du groupe structural). Soit* G *un groupe abélien et* $E(X, G)$ *un fibré principal. Soit* G' *un sous-groupe de* G. *Soit* $(\xi) \in {}^{1}(X, G)$ *la* *classe de cohomologie de* $E(X, G)$.

On peut réduire le groupe structural G *de* E *à* G' *si et seulement si* (ξ) *est appliqué par* $j : {}^1(X, G) \to {}^1(X, G'')$ *sur la classe triviale* $\theta \in {}^1(X, G'')$.

PROPOSITION 2. *(Extension du groupe structural). Soit* $E''(X, G'')$ *un espace* G''*-principal de base* X *correspondant à une classe* $(\xi'') \in {}^1(X, G'')$. *On peut étendre le groupe structural* G'' *de* E'' *à une extension* $G(G'', G')$ *si et seulement si* $\delta^1((\xi'')) = \theta \in {}^2(X, G')$.

REMARQUES 1. Par la méthode de la cohomologie de X à valeurs dans les faisceaux de groupes G', G et G'', ont est arrivé aux conclusions analogues à ce qui précède. L'intérêt de la cohomologie classifiante réside dans le fait qu'on est amené à des problèmes d'homotopie, où les techniques sont plus puissantes.

2 . On a des résultats analogues dans le cas des fibrés avec point base.Nous omettons les modifications évidentes.

REMARQUE. On peut retrouver le résultat $H^1(X, C_c^*) = H^2(X, Z)$ en appliquant le théorème de la suite exacte de cohomologie classifiante abélienne à la suite exacte

$$o \to Z \to C \to C^* \to o$$

En effet nous savons que $\overline{W}^2(K(Z,0)) = K(Z,2)$ et pour $G' = Z = K(Z,0)$ nous avons $H^2(X, G') = [X, \overline{W}^2(K(Z,0))] = [X, K(Z,2)]$ ou $H^2(X,Z)$. Comme $H^2(X,C)$ est trivial (car C est homotopiquement trivial) nous avons l'isomorphisme $\delta^1 : H^1(X, \underset{\sim}{C}^*) = H^2(X, Z)$ qui est aussi l'isomorphisme $\delta_2 : H^1(X, \underset{\sim}{C}^*) = H^2(X,Z)$ (où C^* est considéré comme groupe $n-1$-connexe, $n = 1$) comme on le voit facilement en appliquant les définitions δ^1 et de δ_2. (cf. Chapitre 1).

2.2.1.4. Relation entre ${}^i(X, G)$ *et* $H^{n+i}(X, \pi_n(G))$.

En appliquant le théorème de 1.2.3. à ${}^i(X, G) = [X, \overline{W}^i(G)]$ on obtient la

PROPOSITION 1. *Soit* G *un groupe abélien topologique. Il existe un homomorphisme canonique et fonctoriel de* ${}^i(X, G)$ *dans* $H^{n+i}(X, \pi_n(G))$, *pour tout* $i \geq 0$. *Si* G *est de type* $K(\pi, n)$ *on a un isomorphisme.*

De même,

PROPOSITION 2. *Soit* $o \to G' \to G \to G'' \to o$ *une suite exacte de groupes abéliens topologiques* $(n-1)$*-connexes. On a un homomorphisme de suites exactes de groupes abéliens*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to {}^{i}(X,G') & \to & {}^{i}(X,G) & \to & {}^{i}(X,G'') & \to & {}^{i+1}(X,G') & \to \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\to H^{n+i}(X,\pi') & \to & H^{n+i}(X,\pi) & \to & H^{n+i}(X,\pi'') & \to & H^{n+i+1}(X,\pi') & \to
\end{array}$$

où $\pi' = \pi_n(G')/_{Im\ \partial}$, $\pi = \pi_n(G)$, $\pi'' = \pi_n(G'')$, *(cf. Préliminaires 0.3).*
Si G' *est de type* $K(\pi', n)$, $G \sim K(\pi, n)$, $G'' \sim K(\pi'', n)$ *alors c'est un isomorphisme.*

DEMONSTRATION. D'après la définition même des flèches, dans chaque portion le diagramme est commutatif, d'où la proposition.

REMARQUE. Pour les dimensions 1 et 2 les homomorphismes des premières portions des suites exactes définies plus haut ont une interprétation géométrique intéressante. Nous y reviendrons dans le cas où les groupes considérés sont *non abéliens.*

D'autre part, si dans les calculs du paragraphe 1.3 du chapitre I on remplace G par $\overline{W}'(G)$, il en résulte la

PROPOSITION 3. *Soit* X *un* CW *- complexe. Alors* ${}^{i}(X,G)$ *est isomorphe à* $\prod_{n=o}^{\infty} H^{n+i}(X, \pi_n(G))$.

2.2.2. (f, y) - représentabilité.

2.2.2.1. Définitions générales.

Soient X et Y deux espaces topologiques avec point-base x_o et y_o respectivement, $f : X \to Y$ une application continue préservant les points bases. Nous allons définir une *cohomologie classifiante abélienne rel.* f qui répond à la question de (f, Y)-représentabilité. Posons :

${}^{n}(X,G) = [X, \overline{W}^n(G)]_o$, ${}^{n}(Y,G) = [Y, \overline{W}(G)]_o$, ${}^{n}(Y,f,X;G) = [C_f, \overline{W}^n(G)]_o$

où $\overline{W}^n(G)$ a pour point base l'élément neutre, C_f désigne le cône de l'application f, et $[A, B]_o$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie des applications continues ou simpliciales de A dans B, qui préservent les points-bases. L'élément neutre est la classe de l'application constante au point-base.

Lorsque f est l'injection canonique du sous-espace X dans Y, nous écrirons tout simplement ${}^{n}(Y,X;G)$. En particulier ${}^{1}(Y,X;G)$ est isomorphe à l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrés principaux avec point-base, de groupe G, de base Y et dont la restriction à X est triviale.

Nous définissons le O-cobord $\partial^o : {}^{o}(X,G) \to {}^{1}(Y,f,X;G)$ par le diagramme et les applications suivantes, où $\mathcal{S}X$ désigne la suspension de X, et ΩX l'espace des lacets de X.

$$\begin{tikzcd} G & & \overline{W}(G) & \\ X \arrow[u] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "Pf"'] & C_f \arrow[u] \arrow[r, "Qf"'] & \mathcal{S}X \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$$\partial^{o} : [X, G]_o \to [X, \Omega(\overline{W}(G))]_o \to [\mathcal{S}X, \overline{W}(G)]_o \to [C_f, \overline{W}(G)]_o$$

Si $[h] \in [X, G]_o$ alors $\partial^{o}([h]) = [[i'(i([h]))] \circ Qf] \in [C_f, \overline{W}(G)]_o$. Le cobord $\partial^n : {}^n(X, G) \to {}^{n+1}(Y, f, X; G)$ se définit de la même façon, en remplaçant G par $\overline{W}^{n-1}(G)$.

2.2.2.2. Suite exacte de cohomologie.

THEOREME. *Soient X, Y deux espaces topologiques munis de point-base x_o et y_o respectivement, et $f : X \to Y$ une application continue telle que $f(x_o) = y_o$. Soit G un groupe abélien topologique. Alors on a la suite exacte de cohomologie classifiante abélienne rel. f*

$$\begin{aligned} &{}^{o}(Y, f, X; G) \to {}^{o}(Y, G) \to {}^{o}(X, G) \to {}^{1}(Y, f, X; G) \to \dots \\ &\qquad \dots\dots \to {}^{i}(X, G) \to {}^{i+1}(Y, f, X; G) \to \dots \end{aligned}$$

DEMONSTRATION. Il suffit de tenir compte des isomorphismes $[\mathcal{S}X, W]_o = [X, \Omega W]_o$ et $\Omega \overline{W}^n(G) = \overline{W}^{n-1}(G)$, de la définition des cobords et d'appliquer le théorème de la suite exacte de Puppe (Cf. Préliminaires 0.3).

2.2.2.3. Applications.

Comme conséquence immédiate du théorème précédent nous avons la

PROPOSITION. *Un fibré principal $E(X, G)$ est (f, Y)-représentable si et seulement si la classe $[\xi] \in (X, G)$ est appliquée par le 1-cobord $\partial^1 : {}^1(X, G) \to {}^2(Y, f, X; G)$ sur l'élément nul de ${}^2(Y, f, X; G)$.*

Nous laissons au lecteur le soin de modifier l'énoncé pour l'expansion (f = injection) ou la décomposition (f = surjection) de $E(X, G)$.

2.2.2.4. Relation avec la cohomologie homotopique.

Soient K un CW-complexe, Y un sous-complexe de Y et G un groupe topologique de type $K(\pi, m)$.

LEMME.

$$^{n}(Y, X; G) = H^{n+m}(Y, X; \pi).$$

Démonstration immédiate par le théorème de Puppe et le lemme des cinq.

Il en résulte la

PROPOSITION. *Soit* G *un groupe abélien topologique de type* $K(\pi, n)$, $n \geq 0$, *alors on a l'isomorphisme de suites exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to & ^{i}(Y, X; G) & \to & ^{i}(Y, G) & \to & ^{i}(X, G) & \to & ^{i+1}(Y, X, G) & \to \\
 & \approx\downarrow & & \approx\downarrow & & \approx\downarrow & & \approx\downarrow & \\
\to & H^{n+i}(Y, X; \pi) & \to & H^{n+i}(Y, \pi) & \to & H^{n+i}(X, \pi) & \to & H^{n+i+1}(Y, X; \pi) & \to
\end{array}$$

D'autre part, en appliquant le théorème (WeiShu Shih [26 b]) sur la suite spec - trale reliant le groupe $[X, G]$ où G est un groupe commutatif ou non et la cohomologie de X à coefficient dans les groupes d'homotopie de G, on peut obtenir une suite exacte de suites spectrales reliant la suite exacte de cohomologie classifiante relative et la suite exacte de cohomologie homotopique. Plus précisément, en posant $G^{i} = \overline{W}^{i}(G)$, $E^{2}_{p,-(p+1)}(X)^{i} = H^{p}(X, \pi_{p+1}(G^{i}))$, $E^{2}_{p,-(p+1)}(Y)^{i} = H^{p}(Y, \pi_{p}(G^{i}))$, $E^{2}_{p,-(p+1)}(Y, X)^{i} = H^{p}(Y, X; \pi_{p}(G^{i}))$ et de même pour les couples d'indices $(p, -p)$ et $(p. -(p-1))$. Les suites spectrales aboutissent respectivement aux groupes $^{i}(X, G)$, $^{i}(Y, G)$ et $^{i}(Y, X; G)$.

2.3. REPRESENTABILITE DANS LE CAS NON ABELIEN.

2.3.1. $(\tilde{G}, \varphi)$ - représentabilité.

2.3.1.1. Cas où φ *est un homomorphisme injectif (restriction du groupe structural).*

2.3.1.1.1. $\tilde{G}$ *est un sous-groupe normal de* G. Dans ce cas nous avons une suite exacte :

$$e \to \tilde{G} \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{j} G'' \to e$$

où $G'' = G/\tilde{G}$ est le *groupe -quotient.* On en déduit, comme dans le cas abélien, la suite exacte d'ensembles pointés,

$$\to (X, \tilde{G}) \xrightarrow{\varphi^*} (X, G) \xrightarrow{j^*} (X, G'')$$

et des conclusions analogues pour la restriction du groupe structural G à $\tilde{G}$.

2.3.1.1.2. $\tilde{G}$ *n'est pas normal dans* G. Alors le quotient $G/\tilde{G}$ n'a plus de structure de groupe. La théorie simpliciale [1] nous suggère à considérer le groupe $A(G/\tilde{G})$ (cf. 0.2.3. Fibrés simpliciaux) ainsi que le classifiant $\overline{W}(A(G/\tilde{G}))$. Comme G opère de façon évidente sur $G/\tilde{G}$, nous avons un homomorphisme :

$$j : G \to A(G/\tilde{G})$$

qui induit une application

$$j_* : \overline{W}(G) \to \overline{W}(A(G/\tilde{G}))$$

Il suffit alors d'appliquer les raisonnements analogues aux raisonnements classiques de C. Ehresmann sur la restriction du groupe structural [8b] pour arriver à la suite exacte d'ensembles pointés

$$\to (X, \tilde{G}) \xrightarrow{\varphi^*} (X, G) \xrightarrow{j^*} [X, \overline{W}(A(G/\tilde{G}))]$$

L'application à la restriction du groupe structural est évidente.

Nous omettons les détails.

2.3.1.2. Cas où φ *est un homomorphisme surjectif (extension du groupe structural).*

2.3.1.2.1. Définitions générales. Dans ce cas nous avons une suite exacte de groupes

$$e \to G' \xrightarrow{i} \tilde{G} \xrightarrow{\varphi} G \to e \qquad (\mathcal{G})$$

où $G' = Ker\ \varphi$ est un sous-groupe normal de $\tilde{G}$. Il en résulte, comme précédemment la suite exacte :

$$\to (X, G') \xrightarrow{i^*} (X, \tilde{G}) \xrightarrow{\varphi^*} (X, G)$$

qu'il s'agit de prolonger, en définissant un ensemble pointé ${}^2(X, G')$ et un cobord δ^1, tels que la suite des ensembles pointés

$$\to (X, G') \to (X, \tilde{G}) \to (X, G) \xrightarrow[\delta^1]{} {}^2(X, G')$$

soit exacte.

DEFINITION. *Soient* X *un espace topologique* S*-admissible,* G *un groupe topologique* $\overline{W}$*-admissible (non nécessairement abélien). L'ensemble pointé* ${}^2(X, G)$ *est défini par l'égalité :*

$${}^2(X, G) = [S(X), \overline{W}(A(\overline{W}(S(G))))]$$

L'élément distingué, noté θ dans la suite, est la classe d'homotopie de l'application constante.

En raison des isomorphismes évidents, nous omettons, dans la suite, les symboles $S(\ )$, en travaillant dans le cadre de la théorie simpliciale [1] .

De la suite exacte $(\mathcal{G})$ nous déduisons (Shih WeiShu [26])la fibration de Kan $\overline{W}(\tilde{G})(\overline{W}(G), \overline{W}(G'))$. En appliquant successivement les propositions 1 et 3 de 0.2.3. (Préliminaires : Fibrés simpliciaux) nous obtenons le

LEMME. *La fibration simpliciale* $\overline{W}(\tilde{G})(\overline{W}(G), \overline{W}(G'))$ *est canoniquement associée à un fibré simplicial principal* $E(\overline{W}(G), A(\overline{W}(G')))$ *défini à une forte équivalence près par une application simpliciale*

$$\sigma : \overline{W}(G) \to \overline{W}(A(\overline{W}(G')))$$

unique à une homotopie près.

Autrement dit, à la suite exacte $(\mathcal{G})$ correspond un élément bien déterminé

$$[\sigma] \in [\overline{W}(G), \overline{W}(A(\overline{W}(G')))]$$

Nous allons l'utiliser pour définir l'*application cobord* $\delta^1 : (X, G) \to {}^2(X, G')$. Soit $[\xi] \in (X, G) = [X, \overline{W}(G)]$. Nous définissons δ^1 par le diagramme et l'égalité suivants :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\sigma \circ \xi"'] & \overline{W}(G) \arrow[d, "\sigma"] \\ & \overline{W}(A(\overline{W}(G'))) \end{tikzcd}$$

$$\delta^1([\xi]) = [\sigma \circ \xi] \in [X, \overline{W}(A(\overline{W}(G')))]$$

D'après la définition de (X, G) et ${}^2(X, G')$, δ^1 est bien une application d'ensembles pointés, canoniquement associée à la suite $(\mathcal{G})$.

REMARQUE. Lorsque G' est abélien, nous retrouvons les définitions données dans 2.2.1.1. En effet, G' est alors de même type d'homotopie que $\prod_{n=o}^{\infty} K(\pi_n(G), n)$ et $\overline{W}(G')$ est de même type d'homotopie que $\prod_{n=o}^{\infty} K(\pi_n(G'), n+1)$. Ainsi le fibré $\overline{W}(\tilde{G})(\overline{W}(G), \overline{W}(G'))$ est de même type d'homotopie fibré que le produit fibré $\prod_{n=o}^{\infty} E_{n+1}(\overline{W}(G), K(\pi_n(G'), n+1))$. D'après Thom [29] chaque E_{n+1} est canoniquement associé à un fibré principal $\overline{E}_{n+1}(\overline{W}(G), A_{n+1})$, où le groupe A_{n+1} est de type $K(\pi, n+1)$. Il s'en suit que $\overline{W}(\tilde{G})(\overline{W}(G), \overline{W}(G'))$ est associé à un fibré principal $P(\overline{W}(G), \hat{A})$ où le groupe $\hat{A}$ est de même type d'homotopie que $\overline{W}(G')$. Autrement dit, lorsque G' est abélien le groupe structural $A(\overline{W}(G'))$ peut être réduit à sous sous-groupe $\hat{A}$. De ce fait ${}^2(X, G')$ est isomorphe à $[X, \overline{W}^2(G')]$, car $\overline{W}(\hat{A})$ est de même type d'homotopie que $\overline{W}^2(G')$.

2.3.1.2.2. Une suite exacte. En appliquant les lemmes énoncés dans 2.2.1.2. et la proposition 4 de 0.2.3 (Préliminaires, Fibrés simpliciaux) aux fibrations $E(\overline{W}(G), A(\overline{W}(G')))$ et $\xi^* E(X, A(\overline{W}(G')))$, $[\xi^* \overline{W}(G)](X, \overline{W}(G'))$ nous obtenons le

THEOREME. *Soient X un espace topologique S-admissible, et une suite exacte de groupes topologiques $\overline{W}$-admissibles, non nécessairement abéliens*

$$e \to G' \to \tilde{G} \to G \to e,$$

la suite des applications d'ensembles pointés

$$\to (X, G') \xrightarrow{i^*} (X, \tilde{G}) \xrightarrow{\varphi^*} (X, G) \underset{\delta^1}{\to} {}^2(X, G')$$

est exacte.

REMARQUE. Lorsque G' est *abélien* on retrouve le groupe $^2(X, G')$, et la suite reste encore exacte.

2.3.1.2.3. Applications.

2.3.1.2.3.1. Extension du groupe structural d'un espace fibré.

Comme conséquence directe du théorème précédent nous avons la

PROPOSITION. *Soit une extension $\tilde{G}(G, G')$, et un fibré $E(X, G)$ correspondant à $[\xi] \in (X, G)$. L'extension du groupe structural G de E au groupe $\tilde{G}(G, G')$ est possible si et seulement si $\delta^1([\xi]) = \theta$, élément distingué de $^2(X, G')$.*

REMARQUES 1. Un résultat analogue, mais où l'élément distingué se compose d'une classe *nulle* et des classes *neutres*, a été obtenu par P. Dedecker [6c] (Cf. 2.1.3.1,2c).

2. La proposition précédente contient comme cas particuliers les résultats de A. Haefliger [12a], en identifiant le groupe G' discret avec le groupe $K(G', 0)$. Il en est de même pour la condition suffisante dans le cas de groupes de Lie (Cf. 2.1.3.1.2.b).

2.3.1.2.3.2. Calcul de (X, G) dans le cas où G a deux groupes d'homotopie non nuls $\pi_n(G) = \pi$, $\pi_m(G) = \pi$, $m > n > 0$.

La décomposition en système de Postnikov de G conduit à la suite exacte fibrée

$$o \to K(\pi', m) \to G \to K(\pi, n) \to o$$

En appliquant le théorème précédent à cette suite exacte de groupes, nous trouvons, en vertu des isomorphismes classiques, la suite exacte mixte de groupes abéliens et d'ensemble pointé

$$H^n(X, \pi) \xrightarrow{\delta^o} H^{m+1}(X, \pi') \to (X, G) \to H^{n+1}(X, \pi) \xrightarrow{\delta^1} H^{m+2}(X, \pi')$$

d'où la suite exacte :

$$o \to H^{m+1}(X,\pi')/_{Im\ \delta^{o}} \to (X,G) \to Ker\ \delta^{1} \to \theta.$$

Nous retrouvons ainsi le résultat du calcul direct effectué dans 1.3.3.

2.3.1.2.4. $(\tilde{G},\varphi)$-représentabilité dans le cas non abélien et cohomologie homotopique. Soit G un groupe topologique, non abélien, $(n-1)$-connexe, $n > 0$.

Nous allons étudier une relation entre $^{2}(X,G)$ et $H^{n+2}(X,\pi_n(G))$.

Soit un fibré $E(X,\overline{W}(G),A(\overline{W}(G)),\overline{E})$. Comme G est $(n-1)$-connexe, $\overline{W}(G)$ est n-connexe et $\pi_{n+1}(\overline{W}(G)) = \pi_n(G)$. D'après les lemmes de 0.2.4. et le théorème de Thom [29] (Cf. 0.2.1) nous pensons associer canoniquement à E le fibré $E'(X,\overline{W}(G)^{(n+1)})$ qui est lui-même canoniquement associé à un fibré principal $E''(X,K(\pi,n+1))$, unique à une forte équivalence près. E'' est défini par une application :

$$\sigma : X \to \overline{W}(K,\pi,n+1)) = K(\pi,n+2)$$

unique à une homotopie près. Ainsi, à un élément de l'ensemble pointé $[X,\overline{W}(A(\overline{W}(G)))]$ nous pouvons associer canoniquement un élément de $[X,K(\pi,n+2)] = H^{n+2}(X,\pi)$. D'après la définition de $^{2}(X,G)$ et le fait que la projection $\overline{W}^{2}(G) \to \overline{W}^{2}(G)^{(n+2)}$ est un homomorphisme de groupes abéliens, lorsque G est *abélien*, nous avons le

THEOREME. *Soit G un groupe topologique $(n-1)$-connexe. Il existe une application canonique :*

$$\rho : {}^{2}(X,G) \to H^{n+2}(X,\pi_n(G)).$$

Si G est abélien, ρ devient un homomorphisme de groupes abéliens. Si G est de type $K(\pi,n)$, alors ρ est un isomorphisme.

Soit maintenant une suite exacte de groupes topologiques $(n-1)$-connexes :

$$e \to G' \to G \to G'' \to e.$$

On en déduit (Cf. 0.3.) la suite exacte :

$$o \to \pi' \to \pi \to \pi'' \to e$$

où $\pi' = \pi_n(G')/_{Im\ \partial}$, $\pi = \pi_n(G)$, $\pi'' = \pi_n(G'')$.

En appliquant les théorèmes précédents nous en déduisons le diagramme *(H)* suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to & (X,G) & \to & (X,G) & \to & (X,G'') & \xrightarrow{\delta^{1}} & {}^{2}(X,G') & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\to & H^{n+1}(X,\pi') & \to & H^{n+1}(X,\pi) & \to & H^{n+1}(X,\pi'') & \to & H^{n+2}(X,\pi') & \to
\end{array}$$

PROPOSITION. *Le diagramme (H) est commutatif.*

DEMONSTRATION. Il est clair que les parties gauche et centrale sont commutatives. De la définition de $^{2}(X,G)$, du cobord δ et du diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{W}(G'') \arrow[r] \arrow[d] & \overline{W}(A(\overline{W}(G'))) \arrow[d] \\
 & \overline{W}(G'')^{(n+1)} \arrow[d, "\approx"] & \overline{W}(K(\pi_n(G'),n+1)) \arrow[d] \\
X \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[drr] & K(\pi'',n+1) \arrow[r] & \overline{W}(K(\pi',n+1)) \arrow[d, "\approx"] \\
 & & K(\tilde{\pi}',n+2)
\end{tikzcd}$$

découle la commutativité de l'aile droite.

REMARQUE. Géométriquement, la commutativité de la partie centrale du diagramme (H) signifie que si un fibré principal $E''(X,G'')$ admet une extension $E(X,G(G'',G'))$ alors la première obstruction $\mathcal{O}''_1$ à l'existence d'une section S'' dans E'' admet une "extension" $\mathcal{O}_1 \in H^{n+1}(X,\pi_n(G))$ qui est la première obstruction à l'existence dans E d'une section S qui se projette sur S'' par l'homomorphisme fibré $J : E \to E''$ canoniquement associé à l'épimorphisme $J : G \to G''$.

2.3.1.2.5. *Calcul de* $^{2}(X,G)$ *lorsque* G *est discret.* En identifiant G avec $K(G,0)$, le calcul de $^{2}(X,G)$ se ramène au calcul fait dans 1.3.3. En effet, si $G = K(G,0)$, alors $\overline{W}(G) = K(G,1)$ et $A(\overline{W}(G)) = A(K(G,1))$ a seulement deux groupes d'homotopie non nuls, d'après Thom [29]. Il en est de même de $\overline{W}(A(K(G,1)))$.

D'autre part, si G est le groupe fondamental d'une surface, nous savons (H. Kneser, Die DeformationSätze der einfach zusammenhängenden Flächen, Math. Z. 25 (1926), 362-372) que $\pi_o(A(K(G,1))) = Ext\ G$, le groupe des automorphismes extérieurs de G. Malheureusement le problème de calculer le groupe fondamental $\pi_1(A(K(G,1)))$ du groupe des homéomorphismes d'une surface n'a pas été résolu. Néanmoins, lorsque $K(G,1)$ est un espace homogène quotient de $A(K(G,1))$, et si G n'admet pas de sous-groupe *abélien* qui soit une extension inessentielle de son centre $Z(G)$, alors on peut vérifier que $\pi_1(A(K(G,1))) = Z(G)$. Dans ce cas le calcul de $^{2}(X,G)$ peut s'effectuer comme dans 1.3.3. avec $\pi_o = Ext\ G$ et $\pi_1 = Z(G)$.

2.3.2. (f,y)-représentabilité.

2.3.2.1. *L'ensemble* $(Y,X;G)_o$. Soit (Y,X) un couple avec point-base et $i : X \to Y$, l'injection canonique, C_i le cône d'injection. En appliquant le théorème de la suite exacte de Puppe (Cf. 0.3) on démontre facilement les propositions suivantes :

PROPOSITION 1. *$(Y,X,G)_o = [C_i, \overline{W}(G)]_o$ est isomorphe à l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrés G-principaux avec point-base, triviaux sur le sous-espace X de la base Y.*

PROPOSITION 2. *On a les suites exactes d'ensembles pointés suivantes :*

$$(1) \qquad \to (Y,X;G)_o \to (Y,G) \to (X,G)_o$$

$$(2) \qquad \to (Y,X;G)_o \to (Y,G)_o \to (Y/_X;G)_o$$

où $(Y/_X;G)_o$ est l'ensemble des classes de X-isomorphie (Cf. 1.1.1.3) de fibrés principaux $E(Y,G)$.

2.3.2.2. L'ensemble $^2(Y,X;G)_o$. Il s'agit de prolonger la suite exacte (1) en définissant un ensemble pointé $^2(Y,X;G)_o$ et le cobord $\partial^1 : (X,G)_o \to {}^2(Y,X;G)_o$.

2.3.2.2.1. Cas où $A(\overline{W}(G))$ est de même type d'homotopie que $\overline{W}(G)$.

Alors nous avons :

$$[X, \overline{W}(G)]_o = [X, A(\overline{W}(G))]_o = [X, \Omega(\overline{W}(A(\overline{W}(G))))]_o$$

et nous pouvons poser, comme dans le cas abélien (Cf. 2.2.2.1) :

$$(Y,f,X;G)_o = (C_f, G)_o = [C_f, \overline{W}(G)]_o$$

$$^2(Y,f,X;G)_o = [C_f, \overline{W}(A(\overline{W}(G)))]_o$$

le cobord $\partial^1 : (X,G)_o \to {}^2(Y,f,X;G)$ étant défini de la même manière. On a encore la suite exacte *rel. f :*

$$\to (Y,f,X;G)_o \to (Y,G)_o \to (X,G)_o \xrightarrow{\partial^1} {}^2(Y,f,X;G)_o$$

ainsi que la condition nécessaire et suffisante pour la (f,Y)-représentabilité, dans ce cas particulier.

2.3.2.2.2. Cas général. Nous n'avons pas réussi à prolonger la suite exacte (1) dans le cas général.

Néanmoins, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
{[Y, A(\overline{W}(G))]_o} \arrow[r, "f^*_A"] \arrow[d, "\alpha_Y"'] & {[X, A(\overline{W}(G))]_o} \arrow[r, "\partial_A"] \arrow[d, "\alpha_X"] & {^2(Y,f,X;G)_o} \\
(Y,G)_o \arrow[r, "f^*"] & (X,G)_o &
\end{tikzcd}$$

et on peut vérifier facilement que :

$$Im\ f^* \supset \alpha_X(Im\ f^*_A)$$

$$Im\ f^*_A = Ker\ \partial_A$$

d'où la :

PROPOSITION. *Une condition suffisante pour la (f, Y)-représentabilité du fibré principal avec point-base $E(X, G)_o$ est que sa classe $[\xi]$ soit dans $\alpha_X(Ker\ \partial_A)$.*

Il est clair que cette condition suffisante est aussi nécessaire lorsque $A(\overline{W}(G))$ est de même type d'homotopie que $\overline{W}(G)$.

REMARQUE. Le problème général de la (f, Y)-représentabilité équivaut à la construction d'une suite exacte duale de cette de Puppe. Il est encore ouvert.

CHAPITRE . TROIS

PROLONGEMENTS TENSORIELS

Dans ce chapitre nous supposons le lecteur familier avec les notations et résultats de la théorie générale des structures infinitésimales telle qu'elle a été exposée dans (Ehresmann [8]). Les variétés sont supposées de classe C^∞ et "différentiable" veut dire "C^∞ - différentiable".

3.1. LE FONCTEUR T^r_p.

3.1.1. Définition et propriétés générales.

Soit V_n une variété différentiable de classe C^∞, de dimension n, $T^r_p(V_n)$ est l'espace des p^r-jets de R^p dans V_n, de même source O, l'origine de R^p. Nous savons (Ehresmann [8 d]) que $T^r_p(V_n)$ admet une structure d'espace fibré $T^r_p(V_n)[V_n, L^r_{n,p}, L^r_n, H^r(V_n)]$.

D'après les propriétés de $T^r_p(V_n)$ on peut considérer T^r_p comme un foncteur covariant de la catégorie $\mathcal{V}$ des variétés différentiables de classe C^∞ dans la catégorie $\mathcal{F}$ des espaces fibrés différentiables de classe C^∞. G étant un groupe de Lie, $T^r_p(G)$ est un groupe de Lie (Ehresmann [8 e]), extension inessentielle $T^r_p(G)(G, T^r_p(G)_e)$, où $T^r_p(G)_e$ désigne la fibre au-dessus de l'élément neutre $e \in G$.

Si G opère différentiablement et effectivement sur F, alors $T^r_p(G)$ opère de même manière sur $T^r_p(F)$. De même, si G opère linéairement sur F, alors $T^r_p(G)$ opère linéairement sur $T^r_p(F)$.

Etant donnés deux groupes de Lie G et G', un homomorphisme différentiable de G dans G' est un triplet $h = (G, f, G')$ où f est une application différentiable telle que $f(xy) = f(x)f(y)$. *Le triplet* $T^r_p(h) = (T^r_p(G), T^r_p(f), T^r_p(G'))$ *est un homomorphisme différentiable de* $T^r_p(G)$ *dans* $T^r_p(G')$.

La démonstration de ces propriétés résulte du prolongement d'une loi de composition ([8e] et [28]) . Comme conséquence directe de ces considérations nous avons le

LEMME 1. *Soit* $e \to G' \to G \to G'' \to e$ *une suite exacte de groupes de Lie. Alors* $e \to T^r_p(G') \to T^r_p(G) \to T^r_p(G'') \to e$ *est une suite exacte de groupes de Lie et le dia-*

gramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} e & \to & T_p^r(G') & \to & T_p^r(G) & \to & T_p^r(G'') & \to & e \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ e & \to & G' & \to & G & \to & G'' & \to & e \end{array}$$

Si l'une des suites exactes est triviale, l'autre l'est aussi; autrement dit : $T_p^r(G'' \oplus G') = T_p^r(G'') \oplus T_p^r(G')$.

LEMME 2. *Si une variété différentiable V est régulièrement plongée dans une variété W, alors la variété différentiable $T_p^r(V)$ est régulièrement plongée dans la variété $T_p^r(W)$. Si W est muni d'un feuilletage différentiable régulier* [8g] [12b] *de codimension q, alors $T_p^r(W)$ admet un feuilletage différentiable régulier de codimension $q\,C_{p+r}^p$.*

Si $E(X, F, G, H)$ est un espace fibré différentiable, alors en plus de la structure fibrée différentiable usuelle de base E et de la structure d'espace fibré différentiable de base X de groupe structural G_n^r [8 d], l'espace $T_p^r(E)$ admet encore une structure d'espace fibré différentiable

$$T_p^r(E)[\,T_p^r(X_n),\, T_p^r(F),\, T_p^r(G),\, T_p^r(H)].$$

Si E' est isomorphe à E, alors $T_p^r(E')$ est aussi isomorphe à $T_p^r(E)$.

DEMONSTRATION. Il suffit de passer aux cartes locales; nous omettons les détails.

CONSEQUENCES.

1. Le groupe G pouvant être considéré comme un sous-groupe section (non canonique en général) du groupe $T_p^r(G)$ pour la projection sur G, d'après le lemme précédent on a une application injective d'ensembles pointés de $H^1(X, \underline{G})$ dans $H^1(T_p^r(X), \underline{T_p^r(G)})$:

$$\begin{tikzcd} H^1(X, \underline{G}) \arrow[r] \arrow[dr] & H^1(X, \underline{T_p^r(G)}) \arrow[d] \\ & H^1(T_p^r(X), \underline{T_p^r(G)}) \end{tikzcd}$$

la flèche verticale étant induite par la projection de $T_p^r(X)$ sur X. D'autre part, d'après (Ehresmann [8 g]) $T_p^r F$ est de même type d'homotopie que F.

Si G est un groupe $(n-1)$-connexe et $\pi = \pi_n(G) = \pi_n(T_p^r(G))$, nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \underline{G}) & \to & H^1(T_p^r(X), \underline{T_p^r(G)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{n+1}(X, \pi) & \to & H^{n+1}(T_p^r(X), \pi) \end{array}$$

2. La grassmannienne $W_{n+k+1,\,k+1}$ étant l'espace n-classifiant du groupe orthogonal O_{k+1}, la variété $T_p^r(W_{n+k+1,\,k+1})$ est l'espace n-classifiant du groupe de Lie $T_p^r(O_{k+1})$.

REMARQUE. Considéré comme sous-groupe de $T_p^r(G)$, le groupe G opère aussi sur la fibre $T_p^r(F)$. On peut ainsi construire sur X un espace fibré $E'(X, T_p^r(F), G, H)$ de fibre $T_p^r(F)$, associé à H.

Considérons la structure fibrée $T_p^r(E)(T_p^r(X), T_p^r(F), T_p^r(G), T_p^r(H))$ et la section triviale $\sigma : X \to T_p^r(X)$ qui associe à chaque point $x \in X$ le point $\sigma(x) = (x, o) \in T_p^r(X)$. Cette section induit une structure fibrée de base X, soit

$$[\sigma^* T_p^r(E)](X, T_p^r(F), T_p^r(G), \sigma^* T_p^r(H)).$$

Par restriction du groupe structural $T_p^r(G)$ à G, on en déduit un espace fibré isomorphe à l'espace fibré $E'(X, T_p^r(F), G, H)$.

LEMME 3. *Soit E un fibré vectoriel différentiable sur V_n, alors $T_p^r(E)$ est un fibré vectoriel sur $T_p^r(V_n)$.*

LEMME 4. *Soit une suite exacte de fibres vectoriels différentiables de base V_n.*

$$e \to E' \to E \to E'' \to e$$

alors la suite de fibrés vectoriels différentiables sur $T_p^r(V_n)$:

$$e \to T_p^r(E') \to T_p^r(E) \to T_p^r(E'') \to e \qquad \textit{est exacte.}$$

REMARQUE. Si la suite donnée de base V_n est remplacée par une suite équivalente, il en sera de même sur $T_p^r(V_n)$.

NOTATION. Dans la suite nous désignerons par L_n^1 et L_{n+}^1 respectivement les groupes $GL(n, R)$ et $GL_+(n, R)$. D'autre part $K_n^h = C_{n+h-1}^h$ désignera le nombre des combinaisons avec *répétition* de n objets h à h, chacun pouvant être répété jusqu'à h fois.

3.1.2. Les groupes de Lie $T_p^r(\overset{+}{L}{}_n^1)$ et $T_p^r(L_n^1)$.

Les considérations précédentes s'appliquent évidemment au cas où $G = \overset{+}{L}{}_n^1$. Nous savons que $\overset{+}{L}{}_n^1$ est une extension inessentielle $\overset{+}{L}{}_n^1(SL_n^1, \tilde{R})$ où le noyau est le groupe des homothéties positives que l'on peut identifier au groupe multiplicatif $\tilde{R}$ des réels positifs. Nous en déduisons que $T_p^r(\overset{+}{L}{}_n^1)$ est une extension inessentielle $T_p^r(\overset{+}{L}{}_n^1)(T_p^r(SL_n^1), T_p^r(\tilde{R}))$. Comme $T_p^r(SL_n^1)$ est lui-même extension inessentielle $T_p^r(SL_n^1)(SL_n^1, T_p^r(SL_n^1)_e)$, on peut vérifier que $T_p^r(\overset{+}{L}{}_n^1)$ est aussi extension inessentielle $T_p^r(\overset{+}{L}{}_n^1)(SL_n^1, F)$ où F est un groupe résoluble $F(T_p^r(SL_n^1)_e, \tilde{R} \times R^N)$ où $N = C_{p+r}^r - 1$. Il s'en suit que $SL_{n_+}^1$ est la composante semi-simple et F, la composante résoluble ou le radical de $T_p^r(L_n^1)$, d'après le théorème de Lévi.

En considérant la représentation de $\overset{+}{L}{}_n^1$ sur $\tilde{R}$ qui associe à chaque matrice son déterminant, nous trouvons pour F une autre structure d'extension $F(\tilde{R}, T_p^r(\overset{+}{L}{}_n^1)_e)$. Le centre de $T_p^r(\overset{+}{L}{}_n^1)$ est un groupe abélien résoluble $T_p^r(\tilde{R})(\tilde{R}; R^{K_p^1}, \dots, R^{K_p^r})$ extension successive du centre $\tilde{R}$ de $\overset{+}{L}{}_n^1$ par des espaces numériques. De même, $T_p^r(SL_n^1)$ est le sous-groupe des commutateurs ou encore le groupe des automorphismes intérieurs de $T_p^r(\overset{+}{L}{}_n^1)$; c'est-à-dire

$$T_p^r(\overset{+}{L}{}_n^1)/_{T_{p_+}^r(\tilde{R})} = T_p^r(SL_n^1)(SL_n^1; R^{(n^2-1)K_p^1}, \dots, R^{(n^2-1)K_p^r}).$$

L'abéliennisé de $T_p^r(\overset{+}{L}{}_n^1)$ est le groupe abélien résoluble $T_p^r(\tilde{R})$ où $\tilde{R}$ est considéré comme l'abéliennisé de $\overset{+}{L}{}_n^1$.

REMARQUE 1. Pour tout r, la projection

$$T_p^r(L_n^1) \to T_p^{r-1}(L_n^1)$$

est une extension inessentielle dont le noyau est isomorphe à $R^{n^2 K_p^r}$.

REMARQUE 2. Pour $p = n$ le groupe $T_n^r(L_n^1)$ est un sous-groupe du groupe $L_n^{[r]}$ défini par la relation de récurrence $L_n^{[k]} = T_n^1(L_n^{[k-1]})$ (Ehresmann [8 d]).

REMARQUE. Le groupe L_n^1 opère linéairement sur R^n, donc le groupe $T_p^r(L_n^1)$ opère linéairement sur $T_p^r(R^n)$ qui est isomorphe à

$$R^n \times R^{nK_p^1} \times \dots \times R^{nK_p^r} = R^N$$

où $N = n C_{p+r}^r = dim\ T_p^r(R^n)$. En prenant une base dans R^N on peut voir que $T_p^r(L_n^1)$ laisse invariant un drapeau irrégulier $(D_1, D_2, \dots, D_r)$ où $D_b = R^{nK_p^r}$ et dans chaque D_b, il laisse invariant la structure $\oplus^{K_p^b} R^n$, somme directe de K_p^b sous-espaces vectoriels isomorphes à R^n.

3.1.3. Un homomorphisme de suites exactes de fibrés vectoriels.

Nous rappelons brièvement ici certaines définitions et résultats dans (Ehresmann [8 c]).

Soit $E(V_n, F, G, H)$ un fibré différentiable à groupe structural G de Lie sur une variété V_n. L'application différentiable $(h, h') \to h'h^{-1}$ de $H \times H$ sur HH^{-1} se prolonge aux vecteurs $(h, h' + dh')$; le vecteur image de $(h, h' + dh')$ sera noté $(h' + dh')h^{-1}$. En particulier, il convient de dire que le vecteur $(h + dh)h^{-1}$, où $h \in H_x$ est un *déplacement infinitésimal* de la fibre F_x, L'origine $\tilde{x}$ de ce vecteur est l'automorphisme identique de F_x. Soit $\tilde{\Delta}$ l'ensemble des automorphismes identiques des fibres de E. L'application $(h, h' + dh') \to (h' + dh')h^{-1}$ définit sur $\tilde{\Delta}$ un champ $\tilde{C}$; c'est la fonction qui associe à tout point $\tilde{x} \in \tilde{\Delta}$ le n-élément X_n (ou élément de contact de dimension n (Ehresmann [8c])) défini par l'ensemble des vecteurs $(h+dh)h^{-1}$ où $h \in H_x$. Si $h + dh$ appartient au champ transversal différentiable C qui définit une connexion infinitésimale $\mathcal{C}$ dans $E(V_n, F, G, H)$ (Ehresmann [8c]) nous dirons qu'un tel vecteur $(h + dh)h^{-1}$ est un *déplacement infinitésimal appartenant à la connexion infinitésimale* $\mathcal{C}$ considérée. La connexion infinitésimale associe ainsi à chaque vecteur $x + dx$ de $T_1^1(V_n)$ un déplacement infinitésimal $\mathcal{C}(x + dx)$ de la fibre F_x. *Elle est parfaitement déterminée et pourrait être définie par le champ* $\tilde{C}$.

On peut vérifier que l'ensemble des déplacements infinitésimaux des fibres F_x, $x \in V_n$, forme un fibré vectoriel Q_H de base V_n, et on a la suite exacte $S(H)$ de fibrés vectoriels différentiables de base V_n, associée au fibré principal H, (Atiyah [0], Nickerson [22]). Nous l'appellerons aussi suite exacte d'Atiyah.

$$S(H) \qquad o \to K_H \to Q_H \to T_1^1(V_n) \to o$$

où K_H est un fibré vectoriel de base V_n, et de fibres isomorphes à $\mathfrak{L}(G)$, l'algèbre de Lie de G. D'après ce qui précède une connexion infinitésimale est une section de cette suite exacte. Dans le cas différentiable une telle section existe toujours.

Considérons maintenant le fibré principal $T_p^r(\mathbf{H}^1(V_n))(T_p^r(V_n), T_p^r(L_n^1))$. Nous avons la suite exacte $S(T_p^r(\mathbf{H}^1(V_n))$:

$$o \to K_{T_p^r(\mathbf{H}^1(V_n))} \to Q_{T_p^r(\mathbf{H}^1(V_n))} \to T_1^1(T_p^r(V_n)) \to o$$

D'autre part en appliquant le foncteur T_p^r à la suite exacte $S(\mathbf{H}^1(V_n))$

$$o \to K_{\mathbf{H}^1(V_n)} \to Q_{\mathbf{H}^1(V_n)} \to T_1^1(V_n) \to o$$

nous obtenons une autre suite exacte de fibrés vectoriels sur $T_p^r(V_n)$, soit $T_p^r(S(\mathbf{H}^1(V_n)))$:

$$o \to T_p^r(K_{\mathbf{H}^1(V_n)}) \to T_p^r(Q_{\mathbf{H}^1(V_n)}) \to T_p^r(T_1^1(V_n)) \to o$$

PROPOSITION. *L'homomorphisme injectif :* $T_p^r(L_n^1) \to L_N^1$, *où* $N = \dim T_p^r(V_n)$ *induit un homomorphisme injectif de suites exactes de fibrés vectoriels différentiables* $T_p^r(S(\mathbf{H}^1(V_n))) \to S(T_p^r(\mathbf{H}^1(V_n)))$ *c'est-à-dire le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
o \to & T_p^r(K_{\mathbf{H}^1(V_n)}) & \to & T_p^r(Q_{\mathbf{H}^1(V_n)}) & \to & T_p^r(T_1^1(V_n)) & \to o \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
o \to & K_{T_p^r(\mathbf{H}^1(V_n))} & \to & Q_{T_p^r(\mathbf{H}^1(V_n))} & \to & T_1^1(T_p^r(V_n)) & \to o
\end{array}$$

La démonstration s'appuie sur les deux lemmes suivants qui résultent de la définition et des propriétés du foncteur T^r_p.

LEMME 1. *Soit G un groupe de Lie. L'algèbre de Lie $\mathfrak{L}(T^r_p(G)$ est isomorphe à $T^r_p(\mathfrak{L}(G))$.*

LEMME 2. *$T^r_p(T^1_1(V_n)) \to T^1_1(T^r_p(V_n))$ est un homomorphisme injectif de fibrés vectoriels différentiables de base $T^r_p(V_n)$, associé à l'homomorphisme injectif $T^r_p(L'_n) \to L^1_N$, où $N = \dim T^r_p(V_n)$.*

En effet, en vertu des propriétés générales du foncteur T^r_p et du Lemme 1 nous avons :

$$T^r_p(Q_{H^1(V_n)}) = T^r_p(T^1_1(V_n)) \times_{T^r_p(L^1_n)} T^r_p \mathfrak{L}(L^1_n)$$
$$= V_n \times (T^r_p(L^1_n) \times_{T^r_p(L^1_n)} T^r_p \mathfrak{L}(L^1_n)$$

et

$$Q_{T^r_p(H^1(V_n))} = T^1_1(T^r_p(V_n)) \times_{T^r_p(L^1_n)} \mathfrak{L}(T^r_p(L^1_n))$$
$$= V_n \times (L^1_N \times_{T^r_p(L^1_N)} (R^N \times \mathfrak{L}(T^r_p(L^1_n)))$$

d'où par application du Lemme 2, l'injection cherchée.

CONSEQUENCE. Comme toutes les fibres des espaces fibrés source et but des flêches verticales dans le diagramme précédent sont de même dimension, la restriction des homomorphismes de fibrés vectoriels considérés à chaque fibre est aussi surjective. Il en résulte qu'à chaque section de l'une des suites exactes précédentes correspond une seule de l'autre.

DEFINITIONS 1. *Une section de la suite exacte $S(T^r_p(H^1(V_n))$ est appelée une T^r_p-connexion. (Elle correspond à la notion de ex-connexion de l'école Kawaguchi).*

2. *Une section de la suite $T^r_p(S(H^1(V_n))$ est appelée un T^r_p-prolongement d'une connexion linéaire sur V_n.*

Comme la notion de suite exacte $S(H)$ est fonctorielle ([0] et [22]) les notions de $(\tilde{G}, \varphi)$-représentabilité et (f, Y)-représentabilité des fibrés principaux H s'étendent de façon évidente aux suites exactes $S(H)$ ainsi qu'à leurs sections, c'est-à-dire aux connexions dans H.

Des considérations qui précèdent, il résulte facilement la

PROPOSITION. *Pour qu'une connexion linéaire sur $T^r_p(V_n)$ soit le T^r_p-prolongement d'une connexion linéaire sur V_n il faut et il suffit qu'elle puisse être $(T^r_p(L^1_n), \varphi)$-représentable, où φ est l'injection $T^r_p(L^1_n) \to L^1_N$, $N = \dim T^r_p(V_n)$.*

3. 2. PROLONGEMENTS TENSORIELS.

3.2.1. Quelques exemples d'extension du groupe $L_n^1 = GL(n,R)$.

3.2.1.1. Le groupe L_n^r.

Comme exemple classique (Ehresmann [8e]) nous avons le groupe d'isotropie infinitésimale L_n^r de R^n. C'est une extension inessentielle

$$L_n^r(L_n^1, R^n K_n^2, R^n K_n^3, \dots, R^n K_n^r)$$

où $R^n K_n^k$ désigne les espaces vectoriels successifs, noyaux des projections sucessives $p_k : L_n^k \to L_n^{k-1}$.

La loi de composition est polynomiale mais non linéaire pour $r > 1$. Par exemple pour le groupe $L_n^2(L_n^1, R^{n^2(n+1)/2})$ nous avons :

$$a_j^i(AB) = a_k^i(A)a_j^k(B)$$

$$a_{j_1 j_2}^i(AB) = a_k^i(A)a_{j_1 j_2}^k(B) + a_{k\,l}^i(A)a_{j_1}^k(B)a_{j_2}^l(B)$$

où $A, B, AB \in L_n^2$, $a_j^i, a_{j_1 j_2}^i$ désignent les coordonnées, les signes de sommation évidentes sont omises.

Au point de vue topologique, L_n^r admet le groupe orthogonal O_n comme rétracte par déformation.

Considérons maintenant les suites exactes :

$$e \to N_1 \to L_n^\infty \to L_n^1 \to e$$

$$e \to N_r \to L_r^\infty \to L_n^r \to e$$

$$e \to N_r \to L_n^r \to L_n^1 \to e$$

Nous avons vu que le sous-groupe $F_r = N_1/N_r$ est un groupe résoluble $F_r(R^{nK_n^2}, R^{nK_n^3}, \dots, R^{nK_n^r})$.

PROPOSITION. *Le groupe dérivé* $D(F_r)$ *de* $F_r = N_1/N_r$ *est isomorphe à* N_2/N_r.

DEMONSTRATION. En explicitant la définition du groupe dérivé suivant la loi de composition de L_n^2 et L_n^3 on vérifie facilement la proposition pour $r = 2, 3$. Supposons que le résultat est vrai encore pour $r-1$. Nous avons alors $D(F_{r-1}) = N_2/N_{r-1}$. Or d'après la structure d'extension de F_r nous avons :

$$o \to N_{r-1}/N_r \to F_r \to F_{r-1} \to e$$

où $N_{r-1}/N_r = R^{nK_n^r}$.

En tenant compte de la loi de composition de L_n^r, pour les coordonnées d'ordre r, on déduit de ce qui précède, la suite exacte :

$$o \to N_{r-1}/_{N_r} \to D(F_r) \to D(F_{r-1}) \to e$$

d'où la proposition.

COROLLAIRE. $D^k(F_r) = N_{k+1}/_{N_r}$.

REMARQUE. Cette propriété serait intéressante pour l'étude du groupe des automorphismes de L^r_n.

3.2.1.2. Le groupe $L^{s,r}_m(n)$.

Considérons maintenant l'espace $J^r(m,n)$ des r-jets réguliers de R^n dans R^m, de source et de but l'orignie O. C'est un ouvert partout dense de l'espace $L^r_{m,n}$. Pour $s \geq r$ c'est une orbite de groupe produit $L^s_m \times L^s_n$ opérant sur $J^r(m,n)$ suivant la loi de composition classique :

$$(y, s, s') \to s'ys^{-1}, y \in J^r(m,n), s \in L^s_n, s' \in L^s_m.$$

Si $n \leq m$, c'est une orbite du groupe L^s_m, suivant la loi :

$$(y, s') \to s'y.$$

Si $n \geq m$, c'est une orbite du groupe L^s_n opérant à droite :

$$(y, s) \to ys^{-1}$$

Soit $L^{s,r}_m(n)$, $s \geq r$, le sous-groupe de L^s_m laissant invariant un jet de $J^r(m,n)$, que nous pouvons prendre comme jet de l'application :

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1, \\ &\cdots\cdot \\ x_n &= u_n \\ x_{n+1} &= 0 \\ &\cdots \\ x_m &= 0 \end{aligned}$$

pour une certaine carte.

En prenant un système de cartes pour $J^r(m,n)$ et L^s_m et en explicitant la loi d'opération $(y, s') \to s'y$ on trouve facilement que $L^{s,r}_m(n)$ est défini par la nullité de certaines de ses coordonnées

$$\begin{aligned} &a^i_{j \neq i} = 0, && i = 1, \quad , m, j = 1, \quad , n. \\ &a^i_i \quad = 1, && i = 1, \ldots\ldots, n. \\ &a^i_{j_1, j_2} = 0, && \text{si } j_1 < j_2 \leq n. \\ &a^i_{j_1,\ldots,j_r} = 0, && \text{si } j_1 < \ldots < j_r \leq n. \end{aligned}$$

On en déduit facilement la proposition suivante :

PROPOSITION. *$L_m^{s,r}(n)$ est une extension inessentielle*

$$L_m^{s,r}(n)(L_{m-n}^1; R^{n(m-n)}, R^{m(K_m^2 - K_n^2)}, \ldots, R^{m(K_m^r - K_n^r)}, R^{m K_m^{r+1}}, \ldots, R^{m K_m^s})$$

Si $m = n$ alors $L_m^{s,r}(m)$ est un groupe résoluble et $L_m^{r,r}(m) = L_m^r(m)$ est réduit à l'identité. D'autre part, il est clair que le quotient $L_m^s / L_m^{s,r}(n)$ est isomorphe à l'espace $J^r(m,n)$.

La composante semi-simple de $L_m^{s,r}(n)$ est SL_{m-n}^1, le radical étant une extension $E(R, R^{n(m-n)}, \ldots, R^{m K_m^s})$.

3.2.2. Extension du groupe structural L_n^1.

De ce qui précède on déduit que les espaces classifiants des groupes L_n^1, $T_p^r(L_n^1)$, L_n^r sont de même type d'homotopie. D'autre part $T_p^r(V_n)$ est de même type d'homotopie que V_n. D'après les notations et résultats du chapitre I nous avons la

PROPOSITION 1. *Soit V_n une n-variété C^∞, on a les isomorphismes d'ensembles pointés suivants :*

$$(V_n, L_n^r) = (V_n, L_n^1)$$
$$(T_p^r(V_n), T_p^r(L_n^1)) = (T_p^r(V_n), L_n^1) = (V_n, L_n^1)$$

COROLLAIRE. *Dans la suite exacte de cohomologie non abélienne attachée à l'extension $L_n^r \to L_n^1$, le 2è cobord est trivial.*

Autrement dit on retrouve un théorème du à Ehresmann ([8d]) suivant lequel la structure fibrée de $H^1(V_n)$ définit à un isomorphisme près celle de tout espace fibré associé à $H^r(V_n)$.

PROPOSITION 2. *Soit V_m une m-variété C^∞, on a l'isomorphisme d'ensembles pointés*

$$({}_\rho T_n^r(V_m), L_m^{r+1,r}(n)) = ({}_\rho T_n^r(V_m), L_{m-n}^1)$$

DEMONSTRATION. Il suffit de remarquer que $L_m^{r+1,r}(n)$ a le même type d'homotopie que L_{m-n}^1.

DEFINITION. *Une suite exacte de fibrés vectoriels*

$$o \to \overline{E'} \to \overline{E} \to \overline{E''} \to o \qquad \textit{sur } X$$

est dite extension *d'une autre suite exacte de fibrés vectoriels sur X*

$$o \to E' \to E \to E'' \to o$$

s'il existe un homomorphisme de suites exactes de fibrés vectoriels

$$\begin{array}{ccccccccc} o & \to & \overline{E} & \to & \overline{E} & \to & E'' & \to & o \\ & & \downarrow h' & & \downarrow h & & \downarrow id E'' & & \\ o & \to & E' & \to & E & \to & E'' & \to & o \end{array}$$

tel que h soit la projection d'une suite exacte de fibrés vectoriels, et de même pour h'.

Rappelons que $S(P)$ désigne la suite exacte d'Atiyah associée au fibré principal P, (Cf. [0]).

PROPOSITION. *$S(H^r(V_n))$ est une extension de $S(\mathbf{H}^1(V_n))$ associée à la projection $L_n^r \to L_n^1$.*

DEMONSTRATION. Il suffit de tenir compte de la structure d'extension inessentielle de L_n^r de base L_n^1.

CONSEQUENCE. Il s'en suit que toute connexion linéaire sur V_n peut être étendue en une connexion affine spéciale d'ordre r (Ehresmann [8d]).

3.2.3. Les prolongements tensoriels d'ordre supérieur.

DEFINITION 1. *On appelle prolongement L_n^r-tensoriel (Ehresmann [8d]) d'une variété différentiable V_n tout espace fibré différentiable associé au prolongement principal $H^r(V_n)(V_n, L_n^r, L_n^r, H^r(V_n)) = H^r(V_n)$ par une représentation linéaire de L_n^r.*

En particulier un prolongement L_n^1-tensoriel est un prolongement ordinaire [8d].

Comme exemple classique de prolongement L_m^r-tensoriel nous avons les espaces de covitesses $*T_p^r(V_n)(V_n, L_{p,n}^r, L_n^r, *H^r(V_n))$. Le groupe L_n^r opère linéairement à droite sur $L_{n,p}^r$. En prenant une carte et en utilisant les représentants polynomiaux on trouve facilement la forme matricielle correspondante : pour simplifier, prenons $p=1$, un élément $A \in L_n^r$, de coordonnées $A_j^a, A_{j_1 j_2}^a, \dots, A_{j_1 j_2, \dots, j_r}^a$, où $a, j_1, \dots, j_r = 1, \dots, n$, est représentée par une matrice $M \times M$, $M = K_n^1 + K_n^2 + \dots + K_n^r = dim\ L_{1,n}^r$ explicité ci-dessous, où S indique la sommation de tous les termes obtenus en faisant parcourir les systèmes d'indices l'ensemble de toutes les combinaisons possibles des indices haut et bas parmi les indices considérés (qui sont déjà assujettis à la condition de symétrie des jets holonomes).

On voit que la représentation est compatible avec les projections successives $L_n^k \to L_n^{k-1}$. D'autre part, c'est une représentation réductible mais non complètement réductible. Désignons la par $*T_1^r(n)$ dans la suite.

$$
\begin{array}{l|llll|l}
\textit{Indices} & (a) & (a_1 a_2) & (a_1 a_2 a_3) & (a_1 a_2 .. a_r) & \\
j) & A^a_j & 0 & 0 & 0 \quad 0 & K^1_n \ \textit{lignes} \\
j_1 j_2) & A^a_{j_1 j_2} & A^{a_1}_{j_1} A^{a_2}_{j_2} & 0 & 0 \quad 0 & K^2_n \\
j_1 j_2 j_3) & A^a_{j_1 j_2 j_3} & S\, A^{a_1}_{j_1} A^{a_2}_{j_2 j_3} & A^{a_1}_{j_1} A^{a_2}_{j_2} A^{a_3}_{j_3} & 0 \quad 0 & K^3_n \\
\ldots\ldots & & & & & \\
j_1 . j_r & A^a_{j_1 .. j_r} & S\, A^{a_1}_{j_1} A^{a_2}_{j_1 j_2 .. j_r} & & A^{a_1}_{j_1} A^{a_2}_{j_2} .. A^{a_r}_{j_r} & K^r_n
\end{array}
$$

REMARQUE. $*T^r_p(V_n)$ étant un espace fibré vectoriel différentiable on peut naturellement à partir de lui former d'autres espaces fibrés vectoriels : dual, somme de Whitney, produit tensoriel, produit extérieur ... ce qui constitue autant d'autres exemples de prolongements L^r_n - tensoriels.

Désignons par $\odot^r$ le r-produit symétrique, quotient de la $r^{ième}$ puissance tensorielle par la relation d'équivalence définie par le groupe des permutations définies sur cette puissance tensorielle. De la représentation matricielle $*T^r_1(n)$ de L^r_n on tire facilement la

PROPOSITION. *Pour tout r, la suite d'homomorphismes de fibrés vectoriels*

$$o \to \odot^r(*T^1_1(V_n)) \to *T^r_1(V_n) \to *T^{r-1}_1(V_n) \to o$$

est exacte.

Le groupe L^r_n est un sous-groupe du groupe d'isotropie infinitésimale semi-holonome $\overline{L}^r_n$ qui est une extension inessentielle $\overline{L}^r_n(L^1_n; R^{n^3}, R^{n^4}, \ldots, R^{n^{r+1}})$. Comme groupe structural de $*\overline{T}^r_1(V_n)$, fibré des 1^r-covitesses semi-holonomes, le groupe $\overline{L}^r_n$ opère linéairement à droite sur $\overline{L}^r_{1,n} = (R^n)^* \oplus(\oplus^2(R^n)^*) \oplus \ldots \oplus \ldots (\oplus^r(R^n)^*)$. On a une représentation linéaire fidèle de $\overline{L}^r_n$ dans $GL(N, R)$, où $N = n + n^2 + \ldots + n^r$, suivant le schéma matriciel explicité plus haut pour L^r_n, où K^k_m est remplacé par n^k, $k = 1, 2, \ldots, r$.

De cette représentation, désignée par $*\overline{T}^r_1(n)$ il résulte facilement la

PROPOSITION. *Pour tout r, la suite d'homomorphismes fibrés vectoriels*

$$e \to \otimes^r(*T^1_1(V_n)) \to *\overline{T}^r_1(V_n) \to *\overline{T}^{r-1}_1(V_n) \to e$$

est exacte.

REMARQUE. On peut dans la Définition 1 remplacer le groupe L_n^r par $\overline{L}_n^r$ pour obtenir des prolongements $\overline{L}_n^r$-tensoriels (semi-holonomes). De même avec $\tilde{L}_n^r$.

DEFINITION 2. *Appelons prolongement* T_p^r-*tensoriel de* V_n *tout espace fibré différentiable associé à l'espace fibré principal* $T_p^r(H^1(V_n))[T_p^r(V_n), T_p^r(L_n^1)]$ *par une représentation linéaire de* $T_p^r(L_n^1)$.

En particulier un prolongement T_p^o-tensoriel est un prolongement tensoriel ordinaire.

LEMME. *Il existe un homomorphisme injectif canonique du groupe* $T_p^r(L_n^1)$ *dans le groupe* L_N^1, $N = n\,C_{p+r}^r$, *l'image étant isomorphe à une extension inessentielle* $E(L_n^1, U)$, *où* U *est un groupe unipotent.*

DEMONSTRATION. En effet, d'après Kawaguchi [15] on peut associer à un élément $(a_j^i, a_{j;k_1}^i, \ldots, a_{j;k_1 \ldots k_r}^i)$ de $T_p^r(L_n^1)$ une matrice qui s'écrit, en prenant $p = 1$ pour simplifier, comme suit

$$\begin{pmatrix} a_j^i & 0 & & 0 & 0 \\ (a_j^i)^{(1)} & a_j^i & 0 & 0 & 0 \\ \ldots\ldots & & & & \\ (a_j^i)^{(r)} & r(a_j^i)^{(r-1)} & \ldots & r(a_j^i)^{(1)} & a_j^i \end{pmatrix}$$

De cette forme matricielle découle immédiatement le lemme.

REMARQUE. On peut aussi, dans la définition 2, remplacer $T_p^r(L_n^1)$ par $\overline{T}_p^r(L_n^1)$ ou $L_n^{[r]}$. Nous n'insisterons pas sur ces généralisations.

PROPOSITION. *Si* E *un prolongement tensoriel ordinaire de* V_n, *alors* $T_p^r(E)$ *est un prolongement* T_p^r-*tensoriel de* V_n.

DEMONSTRATION. Il suffit de remarquer qu'une représentation linéaire de L_n^1 se prolonge en une représentation linéaire de $T_p^r(L_n^1)$, puis d'appliquer le lemme sur la structure fibrée de base $T_p^r(V_n)$.

REMARQUE. Cette proposition fournit une méthode pour obtenir les prolongements T_p^r- tensoriels. Mais on ne les trouve pas tous de cette manière.

3.2.4. Le fibré $_\rho T^r_n(V_m)$ des n^r-vitesses régulières de V_m.

Considérons maintenant le fibré différentiable $_\rho T^r_n(V_m)[V_m, J^r(m,n), L^r_m, H^r(V_m)]$. D'autre part considérons le fibré tangent de $J^r(m,n)$. Nous savons que le sous-groupe $L^r_m(n)$ se représente dans le groupe L^1_M, $M = dim\ J^r(m,n)$, comme groupe linéaire d'isotropie et que le groupe structural L^1_M du fibré tangent de $J^r(m,n)$ peut être réduit à ce groupe. L'espace fibré le long des fibres de $_\rho T^r_n(V_m)$ est un espace fibré de base $_\rho T^r_n(V_m)$, de fibre R^N, $M = dim\ J^r(m,n)$, de groupe structural L^1_M pouvant être réduit à $L^r_m(n)$. Désignons-le par $\hat{T}$. Considérons aussi le fibré tangent $T^1_1(_\rho T^r_n(V_m))$ $[_\rho T^r_n(V_m), T^{m+M}, L^1_{m+M}, H^1(_\rho T^r_n)]$. Soit p la projection $_\rho T^r_n(V_m) \to V_m$; elle induit le fibré $p(T^1_1(V_m))$ sur $_\rho T^r_n(V_m)$, de fibre R^m, et de groupe structural L^1_m. D'autre part nous savons que $T^1_1(_\rho T^r_n(V_m))$ est un prolongement du 1er ordre d'un prolongement régulier et d'après le théorème de transitivité des prolongements (Ehresmann [8d]) son groupe structural peut être réduit au sous-groupe $L^{r+1,r}_m(n)$ de L^{r+1}_m laissant invariant un jet de $J^r(m,n)$. Entre tous ces fibrés et ces groupes structuraux on a la relation suivante dont la démonstration est immédiate en passant aux cartes et en tenant compte de la construction de l'espace fibré le long des fibres.

PROPOSITION 1. *La suite des fibrés vectoriels différentiables sur $_\rho T^r_n(V_m)$*

$$o \to \hat{T} \to T^1_1(_\rho T^r_n(V_m)) \to p^*(T^1_1(V_m)) \to o$$

est exacte.

REMARQUE. Considérons le fibré des m^s-repères $H^s(V_m)$ qui a pour groupe structural L^s_m. Le sous-groupe $L^{s,r}_m(n)$ opère à droite sur $H^s(V_m)$. Le quotient $H^s(V_m)/_{L^{s,r}_m(n)}$ est un fibré de base V_m, de fibre $L^s_m/_{L^{s,r}_m(n)} = J^r(m,n)$, de groupe L^s_m opérant sur $J^r(m,n)$ par translation à gauche. C'est une extension de $_\rho T^r_n(V_m)$ associée à la projection canonique $L^s_m \to L^r_m$, pour $s > r$. Si $s = r$, alors c'est $_\rho T^r_n(V_m)$ même. Dans ce cas $H^r(V_m)$ est un fibré principal $\hat{H}$ sur $_\rho T^r_n(V_m)$, de groupe structural $L^r_m(n)$ et l'espace fibré $\hat{T}$ le long des fibres de $_\rho T^r_n(V_m)$ n'est autre chose qu'un fibré associé à $\hat{H}$. De même $T^1_1(_\rho T^r_n(V_m))$ est associé à un fibré principal $P[_\rho T^r_n(V_m), L^{r+1,r}_m(n)]$ défini à un isomorphisme près par la composition des projections fibrées

$$H^{r+1}(V_m) \to H^{r+1}(V_m)/_{L^{r+1,r}_m(n)} \to {_\rho T^r_n}(V_m).$$

Le groupe structural $L^{r+1,r}_m(n)$ de $T^1_1(_\rho T^r_n(V_m))$ peut même être réduit au groupe $L^r_m(n)$, $n \leq m$.

Pour $n = m$, le groupe $L^r_m(m)$ est réduit à l'identité, et on retrouve le résultat classique (Ehresmann [8d]) affirmant que le prolongement principal $H^*(V_m)$ est parallélisable.

DEFINITION. *Appelons prolongement T^r_n-tensoriel régulier de V_m tout fibré différentiable associé au fibré principal* $H^r(V_m)({}_\rho T^r_n(V_m), L^r_m(n))$.

Il est clair que si ${}_\rho T^r_n(V_m)$ admet une section alors tout prolongement L^r_m-tensoriel est aussi un prolongement T^r_n-tensoriel régulier.

PROPOSITION 2. *La projection* $T^r_p(H^1(V_m))/_{T^r_p(L^1_m)} \to T^r_p({}_\rho T^1_1(V_m))$ *est un isomorphisme de fibrés et le diagramme*

$$\begin{tikzcd} T^r_p(H^1(V_m)) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & T^r_p({}_\rho T^1_1(V_m)) \arrow[dl, "k"] \\ & T^r_p(V_m) & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

DEMONSTRATION. Soit $H^1(V_m)$ l'espace des 1-repères de V_m, et $L^1_m(1)$ le sous-groupe de L^1_m laissant invariant un jet régulier de $L^1_{m,1}$. Le groupe $L^1_m(1)$ opère à droite sur $H^1(V_m)$, le quotient étant isomorphe à l'espace des 1^1-vitesses régulières ${}_\rho T^1_1(V_m)$. Nous savons que $H^1(V_m)$ est fibré sur ${}_\rho T^1_1(V_m)$, de groupe $L^1_m(1)$ et le diagramme suivant est commutatif,

$$\begin{tikzcd} H^1(V_m) \arrow[rr] \arrow[dr] & & {}_\rho T^1_1(V_m) \arrow[dl] \\ & V_m & \end{tikzcd}$$

les structures fibrées étant évidentes. Il suffit alors d'appliquer le lemme sur le foncteur T^r_p.

REMARQUES 1. Soient $a \in H^1(V_m, \underline{L}^1_m)$, l'isomorphisme $c : H^1(V_m, \underline{L}_m) \to H^1(T^r_p(V_m), \underline{T^r_p(L^1_m)})$, $b \in H^1(T, \underline{T^r_p(L^1_m(1))})$ où $T = T^r_p({}_\rho T^1_1(V_m))$ tels que $c(a)$ et b correspondent respectivement aux fibrations h et f. Soient, d'autre part, l'injection $i : T^r_p(L^1_m(1)) \to T^r_p(L^1_m)$ et l'application suivante $I : H^1(T, \underline{T^r_p(L^1_m(1))}) \to H^1(T, \underline{T^r_p(L^1_m)})$. Alors on a :

$$I(b) = k^*(c(a))$$

où $K^* : H^1(T^r_p(V_m), I^r_p(L^1_m)) \to H^1(T, T^r_p(L^1_m))$ est l'application induite par la projection K.

2. On peut encore généraliser la proposition 2 et les considérations précédentes au cas des espaces de repères d'ordre supérieur $H^r(V_m)$. Nous omettons les détails.

3.3. REPRESENTATIONS LINEAIRES IRREDUCTIBLES DE DEGRE FINI DE QUELQUES EXTENSIONS INESSENTIELLES DE $\overset{+}{L}{}^1_n$.

3.3.1. Le groupe $T^1_p(\overset{+}{L}{}^1_n)$.

3.3.1.1. Considérons maintenant le groupe $T^1_1(\overset{+}{L}{}^1_n)$. Il admet un homorphisme injectif dans le groupe $\overset{+}{L}{}^1_{2n}$. L'image est isomorphe à une extension inessentielle $E(L^1_n, R^{n^2})$ composée de matrices :

$$\begin{pmatrix} a^i_j & o \\ (a^i_j)^{(1)} & a^i_j \end{pmatrix}$$

Le groupe $\hat{F}$ des caractères de $F = R^{n^2}$ est isomorphe à $\hat{C}^{n^2} = M(n, C)$ ensemble des matrices $n \times n$ complexes. Le groupe $B = \overset{+}{L}{}^1_n$ opère sur $\hat{F} = M(n, C)$ par automorphismes intérieurs suivant la multiplication des matrices .Les orbites suivant B de $\hat{F}$ sont donc les classes de conjugaison de $M(n, C)$ suivant $\overset{+}{L}{}^1_n$. Il est clair que les seules orbites stabilisées par le groupe $\overset{+}{L}{}^1_n$ tout entier sont les matrices scalaires. Par application du théorème de Bruhat [9b] (cf.0.1. ainsi que [17] ,[20] on en déduit le

LEMME. *Les représentations linéaires irréductibles de dimension finie du groupe* $T^1_1(\overset{+}{L}{}^1_n)$ *sont de la forme*

$$\sigma(bf) = e^{Tr(cf)}\rho(b)$$

où $c \in C$, $f \in R^{n^2}$, $b \in \overset{+}{L}{}^1_n$, *et* $\rho(b)$, *une représentation linéaire irréductible de dimension finie de* $\overset{+}{L}{}^1_n$.

3.3.1.2. Le groupe $T^1_p(\overset{+}{L}{}^1_n)$ est une extension inessentielle $E(\overset{+}{L}{}^1_n, R^{pn^2})$. Le groupe $\hat{F}$ des caractères de $F = R^{pn^2}$ est isomorphe à $C^{pn^2} = M(n \times pn, C)$. Le groupe $B = \overset{+}{L}{}^1_n$ opère encore sur $\hat{F}$ par automorphismes intérieurs suivant le schéma :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b^{-1} \end{pmatrix}}_{n} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} \quad f \quad \end{pmatrix}}_{pn} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} b & & \cdots & o & o \\ & b & & & o \\ \vdots & & b & & \vdots \\ o & & & \ddots & \vdots \\ o & & & b & o \\ o & o & \cdots & & b \end{pmatrix}}_{pn}$$

Les seules orbites stabilisées par $\overset{+}{L}{}_n^1$ tout entier sont les matrices p - scalaires :

$$\left(\begin{matrix} c_1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ o & & \\ oo & \cdots & c_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} o\, c_2 & \cdots & oo \\ o & \ddots & o \\ \vdots & & \vdots \\ o\, o & & c_2 \end{matrix} \quad \cdots \quad \begin{matrix} c_p & \cdots & oo \\ \vdots & \ddots & o \\ o & & \vdots \\ o\, o & \cdots & c_p \end{matrix}\right)$$

On en déduit la

PROPOSITION. *Les représentations linéaires irréductibles de dimension finie du groupe* $T_p^1(\overset{+}{L}{}_n^1)$ *sont de la forme :*

$$\sigma(bf) = e^{\sum_{i=1}^{p} T_r(c_i f_i)} \rho(b)$$

où $c_i \in C$, $f_i \in R_i^{n^2}$, $b \in \overset{+}{L}{}_n^1$, *et* $\rho(b)$, *une représentation irréductible de dimension finie de* $\overset{+}{L}{}_n^1$.

REMARQUE. D'après la définition de $L_n{}^r$ (Ehresmann [8d]) pour trouver ses représentations linéaires irréductibles de degré fini il suffit d'itérer $(r-1)$ fois l'application de la proposition précédente pour $p = n$. Comme $T_p^r(L_n^1)$ est un sous-groupe de $L_n^{[r]}$ on obtient ainsi une partie de ses représentations linéaires.

3.3.2. Le groupe $\overset{+}{L}{}_n^r$.

3.3.2.1. Considérons maintenant le groupe $\overset{+}{L}{}_n^2$, extension inessentielle $E(\overset{+}{L}{}_n^1, R^{n^2(n+1)/2})$ avec la loi de composition usuelle :

$$A_j^i\,(ab) \quad = A_k^i(a) A_j^k$$

$$A_{j_1 j_2}^i(ab) = A_k^i(a) A_{j_1 j_2}^k(b) + A_{k\,l}^i(a) A_{j_1}^k(b) A_{j_2}^l(b)$$

Nous sommes dans les conditions du théorème de Bruhat (cf. Préliminaires). Le groupe $\hat{F}$ des caractères de $F = R^{n^2(n+1)/2}$ est isomorphe à $C^{n^2(n+1)/2}$. Le groupe

$b=\overset{+}{L}{}^1_n$ opère sur $\hat{F}$ par automorphismes intérieurs comme suit :

$$\begin{aligned}
(b^{-1}fb)^i_{j_1 j_2} &= (b^{-1})^i_b f^b_{kl} b^k_{j_1} b^l_{j_2} \\
\langle \hat{f}, b^{-1}fb \rangle &= \sum_{i,r,s} \hat{f}^{\,i}_{rs} (b^{-1})^i_b f^b_{kl} b^k_r b^l_s \\
(b.\hat{f})^j_{kl} &= \sum_{i,r,s} (b^{-1})^i_j \hat{f}^{\,i}_{rs} b^k_r b^l_s \\
&= \sum_{i,r,s} H^{j}_{kl,i}{}^{rs}(b)\, \hat{f}^{\,i}_{rs}
\end{aligned}$$

avec $H^{j}_{kl,i}{}^{rs} = (b^{-1}) b^k_r b^l_s$.

Un calcul simple de vérification sur les matrices b diagonales montre que la condition

$$(b.\hat{f})^j_{kl} = \hat{f}^j_{kl}$$

entraine $\hat{f}^j_{kl}=0$. Autrement dit seule l'orbite triviale, l'origine de $\hat{F}=C^{n^2(n+1)/2}$ admet le groupe $B=\overset{+}{L}{}^1_n$ comme stabilisateur. Suivant le théorème de Bruhat on déduit facilement de ce qui précède le

LEMME 1. *Le groupe* $\overset{+}{L}{}^2_n$ *n'a pas d'autres représentations irréductibles de dimension finie que celles provenant de sa base* $\overset{+}{L}{}^1_n$.

Comme son radical n'est pas compact le groupe $\overset{+}{L}{}^2_n$ a d'autres représentations linéaires indécomposables réductibles. Un tel exemple est donné par les *2*-covitesses, comme nous avons vu plus haut.

3.3.2.2. Soit N^r_{r-1} le noyau de la projection $L^r_n \to L^{r-1}_n$. Désignons par $E^{r,r-1}$ l'extension inessentielle $E(\overset{+}{L}{}^1_n, N^r_{r-1})$ définie par la représentation suivante de $\overset{+}{L}{}^1_n$ dans le groupe $Aut_c(N^r_{r-1})$ des automorphismes de N^r_{r-1}(qui est isomorphe à $GL(K^r_n, R)$)
$f^i_{b\ldots km} \to (b^{-1})^j_i f^i_{b\ldots km} b^b_{j_1} \cdots b^k_{j_{r-1}} b^m_{j_r}$.

En explicitant la loi de composition par les représentants polynomiaux de L^r_n, on vérifie aisément le

LEMME 2. *L'extension* $\overset{+}{L}{}^r_n \to \overset{+}{L}{}^{r-1}_n$ *est isomorphe à l'extension induite* $\varphi^*_r E^{r,r-1}$ *sur* $\overset{+}{L}{}^r_n$ *par la projection* $\varphi_r : \overset{+}{L}{}^r_n \to \overset{+}{L}{}^1_n$.

L'application du théorème de Bruhat à l'extension $\overset{+}{L}{}^r_n \to \overset{+}{L}{}^{r-1}_n$ conduit au même résultat que pour $\overset{+}{L}{}^2_n$. En tenant compte du lemme 1 précédent, nous avons par récurrence sur r la

PROPOSITION. *Le groupe* $\overset{+}{L}{}^r_n$ *n'a pas d'autres représentations linéaires irréductibles de dimension finie que celles provenant de sa base* $\overset{+}{L}{}^1_n$.

REMARQUE. La composition de la représentation $^*T^r_1(n)$ avec les représentations linéaires irréductibles de $GL(n+\frac{n(n+1)}{2}+\ldots+K^r_1, R)$ fournit des représentations linéaires indécomposables réductibles de L^r_n.

3. Le groupe $\overline{L}^r_{n+}$.

Le résultat précédent relatif à $\overset{+}{L}{}^r_n$ s'étend facilement à $\overline{L}^r_{n+}$, la différence de dimension des noyaux due à la non symétrie des indices des coordonnées $a^i_{j_1\ldots j_k}$, $K = 1,\ldots, r$, étant sans influence sur les arguments considérés.

Comme pour L^r_n la composition de la représentation $^*\overline{T}^r_1(n)$ avec les représentations linéaires irréductibles de $GL(n+n^2+\ldots+n^r, R)$ fournit des représentations linéaires indécomposables réductibles de $\overline{L}^r_n$.

Bibliographie.

[0] M.F. ATIYAH. Complex analytic connections in fibre bundles, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957) pp. 181-107.

[1] M.G. BARRATT, V.K. GUGENHEIM, J.C. MOORE. On semisimplicial fibre-bundles, Amer. J. Math., 81, N° 3, 1959, pp. 639-657.

[2] F. BRUHAT. a) Sur les représentations induites des groupes de Lie, Thèse, Paris 1955, Bull. Soc. math. France, Vol. 84, 1956 pp. 97-205. b) Communication orale, Juin 1961.

[3] L. CALABI. Sur les extensions des groupes topologiques, Thèse Strasbourg, 1951, Annali di Mat. 1954.

[4] H. CARTAN. a) Théorie des fibrés principaux, Séminaire E.N.S. Paris 1956-57 (Quelques questions de topologie), exp. n° 4. b) Classes d'applications d'un espace dans un groupe topologique, d'après Shih WeiShu, Séminaire E.N.S. Paris 1962/1963. Exp. n° 6.

[5] H.V. CRAIG. On multiple parameter Jacobian extensor, Tensor, New serie, 2, 1952, pp. 27-35.

[6] P. DEDECKER. a) Jets locaux, faisceaux, germes de sous-espaces, Bull. Soc. Math. Belgique, 6, 1953, pp. 97-125. b) Extension du groupe structural d'un espace fibré, Colloque de Topologie de Strasbourg 1954. c) Sur la cohomologie non abélienne I, Canad. J. Math, n° 2, 1960, pp. 231-251. d) Sur quelques points nouveaux en cohomologie non abélienne, Séminaire EHRESMANN, I.H.P. Paris, Mai 1960, et Colloque de Zurich 1960, ou Sur la cohomologie non abélienne II. Canad. J. Math. Vol.15 n° 1, 1963, pp. 84-93.

[7] A. DOLD. Die geometrische Realisierung eines schiefen kartesischen Produktes. Archiv der Math. Vol. IX 1958. Fasc. 4, pp. 275-286.

[8] C. EHRESMANN. a) Sur les extensions des groupes topologiques (avec L. CALABI) Comptes rendus, Paris, 228, 1949, p. 1551. b) Sur la théorie des espaces fibrés, Colloque international de Topologie algébrique, C.N.R.S. Paris 1949, p. 3-15. c) Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Colloque de Topologie C.B.R.M. Bruxelles, 1950, pp. 29-55. d) Les prolongements d'une variété différentiable I, Comptes rendus Paris, 233, 1951, p. 598. II, id, p. 777. III id, p. 1081.IV C.R., 234, 1952, p. 1028. V, id, p. 1424. e) Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie, Colloque international de Géométrie différentielle de Strasbourg, C.N.R.S. 1953, pp. 97-110. f) Les prolongements d'un espace fibré différentiable, Comptes rendus, Paris, 240, 1955. p. 1755. g) Cours à l'Institut Henri Poincaré, Paris, 1957... 1962. h) Structures feuilletées, Séminaire C. EHRESMANN, Juillet 1962.

[9] E.R. FADELL. The equivalence of fibre spaces and fibre bundles, Amer. Math Soc. Notices, Vol.7, n° 1, Issue n° 44, Feb. 1960, p. 69.

[10] J. FRENKEL. a) Sur une classe d'espaces fibrés analytiques, Comptes rendus, Paris, 236, 1953, p. 40. b) Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, Thèse, Paris 1956, Bull. Soc. math. France,85, 1957, pp. 135-220.

[11] A. GROTHENDIECK. A general theory of fibre spaces with structure sheaf, Univ. of Kansas, multig. 2ième édition, 1958.

[12] A. HAEFLIGER. a) Sur l'extension du groupe structural d'un espace fibré, Comptes rendus, Paris, 243, 1956, p. 558. b) Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoides, Thèse, Paris 1958, Comm. Mat. Helv. 1958, pp. 248-329.

[13] F. HIRZEBRUCH. Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, 2ième édition 1961, Springer Berlag, Berlin.

[14] A. KAWAGUCHI. Die Differentialgeometrie höherer Ordnung IV, Public. Math. Debrecen, 7, Fasc.1-4 1960, pp. 257-276.

[15] M. KAWWAGUCHI. a) On a generalization of the multiple parameter extensor, Tensor New Serie, 2, 1952, pp. 99-101. b) Sur les dérivées covariantes des g-extenseurs, Tensor, n.s., 11, n° 1,1961 pp. 74-98.

[16] K.KODAIRA & D. SPENCER. Multifoliate structures, Annals of Math, Vol. 74, n° 1, 1961.

[17] G. MACKEY. Unitary representations of group extension, I, Acta Math., 99, 1958, pp. 265-311.

[18] J. MILNOR. a) Construction of universal bundles, I, Annals of Math. Vol. 63, n° 2, 1956, pp. 272 - 284. II,, Annals of Math., 63, n° 3, 1956, pp. 430-436. b) On spaces having the homotopy type of a CW-complexe. Transac. Amer. Math. Soc. Vol. 90, 1959, pp. 272-280.

[19] J.C. MOORE. a) Seminar on algebraic homotopy theory, multig., Princeton 1955-56. b) Semi-simplicial complexes and Postnikov-systems, Symp. int. Top. alg., Mexico 1956, Univ. Nac. Aur. de Mexico et UNESCO, 1958, pp. 232-247.

[20] G. MOSTOW. Extension of representations of Lie groups II, Journ. Amer. Math. Soc. 1958, t. 80, pp.335.

[21] NGUYENDINHNGOC. a) Sur la suite exacte de cohomologie non abélienne, Comptes rendus,Paris, 250, 1960, p. 3438. b) Cohomologie non abélienne et classes caractéristiques, id, 251, 1960, p. 2453. c) Sur la généralisation de la notion de tenseur id, 252, 1961, p. 4100.

[22] H.K. NICKERSON. On differential operators and connections, Trans. of the Amer. Math. Soc., Vol. 99, 1961, pp. 509-539.

[23] P. OLUM. a) Non abelian cohomology and Van Kampen's theorem. Annals of Math. 52 (1950), pp. 1-50. b) Invariants for effective homotopy classification and extension of mappings. Memoirs of the A.M.S. n° 37, 1961.

[24] MM. POSTNIKOV. a) Opredelenie grupp gomologii prostranstva s pomoshiu gomotopičeskikh invariantov, Doklady Akad. Nauk. SSSR 76, n° 3, 1951, pp. 359-362. b) O gomotopičeskom tipe poliedrov id, n° 6, pp. 789-791. c) O klaccifikatsii nepreryvnykh otobrajenii, 79, n° 4, pp. 573-576. (en russe).

[25] D. PUPPE. Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I, Math. Zeitschrift 1958. Vol. 69 pp. 299-344.

[26] Wei Shu SHIH. a) Homologie des espaces fibrés, Thèse, Paris, 1962, Publications mathématiques de l'I.H.E.S., n° 13, 1962. Paris. b) Sur le groupe des classes d'homotopie des applications d'un espace dans un groupe topologique. C.R.T. 254. p. 4122-4123, juin 1962.

[27] N. STEENROD. The topology of fibre bundles. Princeton Univ. Press. 2ième ed. 1957.

[28] Y. TASHIRO. On extensions of Lie group, transformation group and fibre bundle, J. Okayama Univ., 1956, pp. 99-107.

[29] R. THOM. Homologie des espaces fonctionnels, Colloque de topologie algébrique, C.B.R.M. Louvain, 1956, pp. 29-39.

Table des Matières