Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann

Kilambi Srinivasacharyulu

Sur les structures différentiables et les variations de structures complexes

Topologie et géométrie différentielle. Cahiers du Séminaire dirigé par Charles Ehresmann, tome 4 (1962-1963), exp. nº 2, p. 1-45

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1962-1963__4__A2_0>

TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Séminaire dirigé par Charles Ehresmann

décembre 1962

A MON MAITRE
M. Charles EHRESMANN
et A MES PARENTS

SUR LES STRUCTURES DIFFERENTIABLES ET LES VARIATIONS DE STRUCTURES COMPLEXES

par Kilambi SRINIVASACHARYULU

INTRODUCTION

Ce travail est composé de deux parties : la première est essentiellement consacrée au problème de l'existence d'une structure différentiable sur une variété triangulée ; dans leurs recherches sur les variétés différentiables, MM. Cairns, Whitehead, Thom, Milnor, Smale et autres ont démontré des résultats remarquables et surprenants. Dans ce travail, nous nous proposons de donner quelques contributions à l'étude de ce problème dans le cadre de ces résultats. La deuxième partie contient quelques résultats concernant la déformation de certaines variétés complexes compactes. On a (cf[17]) le problème suivant : étant données deux variétés différentiables E et B munies d'une application propre π de rang maximum dans lequel les fibres $\pi^{-1}(t) = V_t$, $t \in B$, sont des variétés complexes, dans quels cas E est-il un espace fibré localement trivial sur B ? Ce problème a été étudié par Frölicher et Nijenhuis [11] et complété par Kodaira et Spencer dans leurs beaux travaux [17].

Ce travail a été présenté dans trois Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [22]. Voici, en résumé, le contenu des deux parties de ce travail.

Les numéros entre crochets [ ] renvoient à la bibliographie.

Le premier chapitre de la première partie donne des exemples de triangulations non différentiables. Rappelons qu'une variété différentiable admet toujours une C^1- triangulation (disons triangulation différentiable), c'est-à-dire V est muni d'une triangulation K dont les simplexes sont plongés différentiablement dans V. On a le problème d'existence d'une stucture différentiable compatible avec une triangulation donnée d'une variété, c'est-à-dire telle que cette triangulation devienne différentiable. Utilisant les fibrations de la sphère S_7 par S_3 de base S_4, Thom a montré l'existence de variétés triangulées de dimension 8 qui n'admettent aucune structure différentiable compatible avec la triangulation donnée. En utilisant les fibrations analogues de S_{15} par S_7 de base S_8, nous montrons l'existence de variétés triangulées de dimension 16 qui n'admettent aucune structure différentiable compatible avec la triangulation. D'autre part, Milnor a donné une construction de variétés différentiables W_{4k} ayant pour bord ∂W_{4k} une sphère topologique. Utilisant ce travail, nous montrons l'existence de variétés combinatoires compactes et closes (sans bord) M_{4k} qui n'admettent aucune structure différentiable compatible avec les triangulations pour $k \geq 1$ et $3 \leq k \leq 14$.

Suivant Thom-Švarc, on définit les classes caractéristiques $l_k \in H^{4k}(V;Q)$ d'une variété combinatoire V en réalisant un élément $u \in H^{n-4k}(V;Q)$ par une sous-variété W de dimension $4k$ de V et en utilisant la formule de l'indice $I(W) = \langle l_k \cup u, V \rangle$. On a les résultats suivants :

a) L'invariance combinatoire des classes l_k.

b) Pour que V admette une structure différentiable compatible avec la triangulation, il faut qu'on ait $l_k = L_k(p_i)$, où L_k est le polynôme de Hirzebruch. En appliquant le théorème de l'indice aux variétés M_{4k} dont les classes de Pontrjagin p_i sont connues pour $i < 4k$, nous montrons que $\langle p_k, M_{4k} \rangle$ est rationnel non entier; or les nombres de Pontrjagin d'une variété différentiable sont des entiers.

Dans le deuxième chapitre, nous montrons l'existence de variétés combinatoires M_{4k} sans aucune structure différentiable de dimensions $4k$ ($k > 1$, $3 \leq k \leq 14$). Considérons les variétés différentiables M_{4k} et M_{4k+2} possédant les propriétés suivantes :

1) $\pi_i(M_{4k}) = Z$ pour $i = 0, 4r (r \neq 0), 4(k-r)$ et $4k$ et nul pour les autres valeurs de i.

2) M_{4k+2} est $2k$-connexe et $H_{2k+1}(M_{4k+2}) = Z \oplus Z$.

D'après les travaux de Smale, chaque variété différentiable de dimension n avec $\pi_i(M) = 0$ pour $i \neq k > 1$ et $i \neq 1$ admet une bonne fonction (" nice function" au sens de Smale) satisfaisant les égalités de Morse. Ceci permet de conclure que les variétés différentiables M_{4k} (resp. M_{4k+2}) sont obtenues par recollement d'une variété W_{4k} (resp. W_{4k+2}) ayant pour bord une sphère S_{4k-1} (resp. S_{4k+1}) avec une boule de dimension $4k$ (resp. $4k+2$) au moyen d'un difféomorphisme des bords où les variétés W_{4k} (resp.

W_{4k+2}) sont les variétés différentiables construites par Milnor, dont le bord est une sphère topologique. D'autre part, parmi les variétés W_{4k}, il existe des variétés dont le bord n'est pas difféomorphe à S_{4k-1}; d'où les résultats annoncés au début de ce paragraphe. Nous démontrons que le groupe de classes de difféomorphismes de structures différentiables sur S_{4k+1} est isomorphe au groupe fini $\pi_{n+4k+1}(S_{4k+1})$ pour $k > 1$ et $n > 4k+1$, généralisation d'un résultat de Kervaire [14a].

Dans la deuxième partie, nous montrons que, dans une famille de structures complexes (E, π, B), les espaces fibrés complexes tangents aux fibres V_t sont isomorphes dans un voisinage de t; si une fibre V_{t_o}, $t_o \in B$, admet une G-structure complexe, il existe un voisinage U de t_o dans lequel toutes les fibres V_t, $t \in U$, admettent une G-structure complexe.

Kodaira et Spencer ont montré la stabilité du plan projectif complexe $P_2(C)$. On sait* qu'une déformation d'une variété kählerienne n'est pas toujours kählerienne pour $n \geq 3$. En supposant qu'une telle déformation soit kählerienne, nous avons étudié les déformations d'un espace hermitien symétrique irréductible d'Elie Cartan; nous démontrons que si (E, π, B) est une famille différentiable de structures kähleriennes dans laquelle une fibre V_{t_o} est un espace symétrique compact irréductible ou le quotient compact d'un domaine borné symétrique irréductible, alors toutes les fibres sont isomorphes et E est une famille localement triviale sur B. Ces résultats sont obtenus en appliquant un théorème de la théorie des espaces fibrés : si (E, I, V) est un espace fibré différentiable sur $I = [0, 1]$ muni d'une métrique riemannienne le long des fibres supposées complètes dépendant différentiablement de t et tel que l'espace fibré sur $0 < t \leq 1$ admet un groupe structural transitif formé d'isométries, alors V_o est isomorphe à V_1 et E est un espace fibré ayant le même groupe structural. Nous terminons avec quelques remarques sur les variétés kähleriennes à courbure de Ricci positive : si elles sont homogènes et si la courbure de Riemann est positive elles sont isomorphes à $P_n(C)$.

Le problème de la déformation d'une surface kählerienne compacte n'est pas encore résolu; à titre d'exemple, nous montrons que par déformation d'une telle surface, lorsque $c_1^2 > 0$, c_1 étant sa classe de Chern, on obtient une surface algébrique (donc kählerienne).

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma gratitude et ma reconnaissance la plus profonde à M. Charles Ehresmann pour l'assistance qu'il m'a apportée pendant ces dernières années et pour le grand intérêt qu'il a montré pour mon travail; les critiques et les précieux conseils qu'il m'a prodigués m'ont grandement aidé au cours de mes recherches. Je suis très heureux de dire ici tout ce que je lui dois.

* il y a un contre-exemple dû à Hironaka.

Je remercie M. Bruhat de m'avoir proposé le sujet de la deuxième thèse et M. Bre-lot d'avoir bien voulu accepter de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie aussi MM. R. Thom, J. L. Koszul et N. H. Kuiper pour les nombreuses conversations que j'ai pu avoir avec eux et qui m'ont grandement aidé.

Je suis très reconnaissant au Gouvernement Français et au Centre National de la Recherche Scientifique de m'avoir donné la possibilité de poursuivre mes recherches en France dans les meilleures conditions.

CHAPITRE PREMIER

TRIANGULATIONS NON-DIFFERENTIABLES

0. Généralités

0.1 Deux espaces fibrés $\xi = (E, B, F)$, $\xi' = (E', B', F')$ ont le *même type d'homotopie fibré* s'il existe deux homomorphismes* d'espaces fibrés $f : E \to E'$, $f' : E' \to E$ et deux homotopies conservant les fibres $h : E \times I \to E$, $h' : E' \times I \to E'$ tels que $h(x, 0) = f'f$, $h'(x, 0) = ff'$ et $h(x, 1) = h'(x, 1) =$ identité.

Soit $\xi = (E, B, S_k, O_{k+1})$ un espace fibré k-sphérique, c'est-à-dire de fibres isomorphes à la sphère S_k et de groupe structural le groupe orthogonal O_{k+1}; si $\bar{\xi} = (\bar{E}, B, D_{k+1}, O_{k+1})$ est l'espace fibré cellulaire associé à ξ, où D_{k+1} est la boule unité de dimension $k+1$, l'espace pointé T_ξ obtenu par identification du bord E de $\bar{E}$ à un point t_o est appelé *l'espace de Thom* associé à ξ.

On a les propriétés suivantes:

1) Si ξ et $\xi' = (E', B', S_k, O_{k+1})$ ont le même type d'homotopie fibré, alors T_ξ et $T_{\xi'}$ ont le même type d'homotopie.

Les applications f, f' considérées ci-dessus sont sur chaque fibre de degré topologique $+1$; elles se prolongent aux applications $\bar{f}, \bar{f}'$ de $\bar{\xi}, \bar{\xi}'$ telles que $\bar{f}\bar{f}'$ et $\bar{f}'\bar{f}$ sont homotopes à l'identité par des homotopies conservant E et E'. On en déduit des applications $g : T_\xi \to T_{\xi'}$, $g' : T_{\xi'} \to T_\xi$ respectivement telles que gg' et $g'g$ sont homotopes à l'identité par des homotopies conservant t'_o et t_o.

2) Si $\bar{\xi}^+ = (\bar{E}, B, D_{k+1}, O^+_{k+1})$ est un espace fibré *orienté* correspondant à $\bar{\xi}$, alors $H^{n+k+1}(T_\xi, t_o)$ est isomorphe à $H^n(B)$, $n \geq 0$.

3) Si B est un CW-complexe fini, alors T_ξ est un CW-complexe fini $(k-1)$-connexe.

Une variété différentiable connexe V est dite *presque parallélisable* si l'espace fibré tangent $\tau(V-x)$ de $V-x$ est trivial pour un point $x \in V$; si V est une variété à bord ou une variété non compacte, ceci entraîne que V est parallélisable.

Une variété différentiable V est une *π-variété* si l'espace fibré normal ν induit par un plongement $f : V \to R^{n+k}$, $k \geq n+1$, est trivial; ceci est équivalent à dire que l'espace fibré $\tau(V) \oplus (V \times R)$ est trivial.

Une variété compacte sans bord sera appelée variété *close*.

Si V est une variété à bord, $\overset{o}{V}$ désigne le complémentaire du bord de V.

* Un homomorphisme de ξ sur ξ' est une application continue $f : E \to E'$ telle qu'on ait le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & B' \end{array}$$

où $\bar{f}$ est une application continue de B dans B'.

Si M_{4k} est un complexe fini tel que le groupe de cohomologie de dimension $4k$, à coefficients rationnels, soit isomorphe au corps des rationnels, on appelle *indice* de M_{4k}, et on désigne par $I(M_{4k})$, l'indice de la forme bilinéaire définie par le cup-produit entre classes de cohomologie à coefficients rationnels de dimension $2k$.

0.2 Soit V une variété triangulée, c'est-à-dire une variété topologique munie d'une triangulation, une triangulation de V étant définie par la donnée (f, K) d'un homéomorphisme f de K sur V, où K est un complexe non nécessairement fini formé de simplexes affines d'un espace affine, K étant défini à un isomorphisme (au sens simplicial) près. Une seconde triangulation (f_1, K_1) de V est *compatible* avec (f, K) si $f^{-1}f_1 : |K_1| \to |K|$ est semi-linéaire, c'est-à-dire un isomorphisme d'une subdivision simpliciale convenable de K_1 sur une subdivision simpliciale de K. Si K' est une subdivision de K, la triangulation (f, K') est appelée subdivision de (f, K). Si (f_1, K_1) est une triangulation de V_1 et si (f_2, K_2) est une triangulation de V_2, un *isomorphisme* de (f_1, K_1) sur (f_2, K_2) est un homéomorphisme φ de V_1 sur V_2 tel que $f_2^{-1}\varphi f_1$ soit un isomorphisme de K_1 sur K_2. Les variétés triangulées V_1 et V_2 sont *combinatoirement équivalentes* si elles admettent des subdivisions qui soient isomorphes; on écrira $V_1 \underset{c}{\approx} V_2$. Un homéomorphisme φ de V_1 sur V_2 est *semi-linéaire* relativement aux triangulations (f_1, K_1) et (f_2, K_2) si $f_2^{-1}\varphi f_1 : K_1 \to K_2$ est semi-linéaire.

Une variété triangulée V est une *n-cellule combinatoire* (resp. *(n-1)-sphère combinatoire*), si V est combinatoirement équivalente à un n-simplexe (resp. son bord). Une variété triangulée V de triangulation (f, K) est une *n-variété combinatoire* si l'étoile fermée de chaque sommet de K est une n-cellule combinatoire. Voici quelques problèmes non résolus bien connus :

1) Est-ce que toute variété topologique peut être triangulée?
2) Est-ce que deux triangulations d'une variété sont équivalentes?
3) Conjecture de Poincaré: chaque n-variété triangulée V qui est du type d'homotopie d'une sphère S_n est homéomorphe à S_n pour $n = 3, 4$.

La réponse affirmative aux questions 1), 2) pour la dimension 3 se trouve dans des mémoires récents; si V est une variété différentiable, on trouve une réponse affirmative aux questions 1), 2) dans les travaux de S. S. Cairns [6 a], H. Freudenthal et J. H. C. Whitehead [6].

La conjecture de Poincaré pour les variétés de dimensions ≥ 5 est démontrée dans les travaux de Stallings-Zeeman et Smale ([23], [29], [21]).

Remarquons que chaque variété triangulée admet une subdivision formant une variété combinatoire d'après J. H. C. Whitehead; d'autre part, une variété triangulée V n'est pas nécessairement une variété combinatoire, il y a des contre-exemples dûs à S. S. Cairns [6 a].

0.3 *Variétés h-cobordantes.* Suivant Thom [26 b], deux variétés triangulées V, V' seront dites *h-cobordantes* s'il existe une variété combinatoire à bord W admettant pour bord $V \bigcup V'$ et telle que les inclusions $i : V \to W$, $i' : V' \to W$ soient des équivalences d'homotopie.

Soit $\psi : W \to V$ et $\psi' : W \to V'$ tels que ψi, $i \psi$, $\psi' i'$ et $i' \psi'$ soient homotopes à des applications identiques. On en déduit deux applications $\varphi : V' \to V$ et $\varphi' : V \to V'$ qui sont des *équivalences d'homotopie liées au h-cobordisme.*

Invariant λ' de Milnor [20 a]. Soit M_{4k-1} une variété différentiable telle que:

1) M_{4k-1} est le bord d'une π-variété W,

2) M_{4k-1} est une sphère homologique.

Soit I_k le plus grand commun diviseur des valeurs de l'indice $I(M)$, où M par-court les variétés presque parallélisables et closes de dimension $4k$; on montre [20 a] que la classe de $I(W)$ mod I_k est un invariant de $\partial W = M_{4k-1}$ et que $I(W)$ est un multiple de 8. Par définition, $\lambda'(M_{4k-1})$ est la classe de $1/8\, I(W)$ mod $1/8\, I_k$. Milnor et Smale ont montré ([20 a], [21 c]) que si M_{4k-1} est une sphère d'homotopie avec $\lambda' = 0$, alors M_{4k-1} est difféomorphe à S_{4k-1} pour $k > 1$.

Somme connexe de Seifert-Threlfall. Soient V_1 et V_2 deux variétés combinatoires orientées et connexes de dimension n ; on choisit deux plongements semi-linéaires du n-simplexe orienté σ_n, $f_i : \sigma_n \to \overset{\circ}{V}_i$ tels que f_1 conserve l'orientation et que f_2 inverse l'orientation. La somme connexe $V_1 \# V_2$ est obtenue à partir de la somme topologique $(V_1 - f_1(\overset{\circ}{\sigma}_n)) + (V_2 - f_2(\overset{\circ}{\sigma}_n))$ en recollant les bords à l'aide de la restriction de l'homéomorphisme semi-linéaire $f_2 f_1^{-1}$ au bord $f_1(\partial \sigma_n)$ appliquant ce bord sur le bord $f_2(\partial \sigma_n)$. $V_1 \# V_2$ est muni d'une structure combinatoire compatible avec celles de $V_1 - f_1(\overset{\circ}{\sigma}_n)$ et $V_2 - f_2(\overset{\circ}{\sigma}_n)$.

Somme connexe infinie. Soit V_i, $i \in Z$, une suite de variétés combinatoires de dimen-sion n et soit $V^{(k)}$ la somme connexe de $V_1, V_2, \ldots\ldots, V_k$; on a une inclusion $V^{(k)} - g_k(\sigma_n)$ dans $V^{(k)} \# V_{k+1} = V^{(k+1)}$, g_k étant un plongement de σ_n dans $V^{(k)}$. La limite inductive de $V^{(k)} - g_k(\sigma_n)$ est appelée la somme connexe infinie V^* de V_i; V^* peut aussi être obtenue à partir de $R^n - \bigcup_i h_i(\overset{\circ}{\sigma}_n)$, où les h_i sont les plongements semi-linéaires disjoints de σ_n dans R^n, et de la somme disjointe des $V_i - f_i(\overset{\circ}{\sigma}_n)$ en recollant les bords de $h_i(\sigma_n)$ et de $f_i(\sigma_n)$ suivant l'homéomorphisme semi-linéaire $h_i \circ f_i^{-1}$.

On peut définir la somme connexe infinie d'une famille V_α, $\alpha \in A$, de variétés combinatoires indexée par un ensemble A bien ordonné.

THÉOREME. *Pour une variété combinatoire compacte V les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) il existe une variété combinatoire V' telle que $V \# V'$ est combinatoirement équiva-lente à S_n.

b) V privée d'un point est combinatoirement équivalente à R^n.

c) il existe deux cellules e et e' plongées semi-linéairement dans V telles que V soit la réunion des cellules ouvertes $\overset{\circ}{e}$ et $\overset{\circ}{e}'$.

DEMONSTRATION. a) entraîne b) (cf.Mazur ou Milnor[20 e]). En effet, on a la somme infinie

$$(V \# V') \# (V \# V') \# \dots \underset{c}{\approx} V \# (V' \# V) \# (V' \# V) \# \dots$$

$$\text{d'où } S_n \# S_n \# \dots \underset{c}{\approx} V \# S_n \# S_n \# \dots$$

d'où $R_n \underset{c}{\approx} V \# R^n$, ce qui entraîne que V privée d'un point est combinatoirement équivalente à R^n, car $V \# R^n$ est combinatoirement équivalent à V privée d'un point.

Evidemment b) entraîne c). En effet, on a un homéomorphisme semi-linéaire de $V - x$ sur R^n; d'autre part, il existe dans V une cellule combinatoire e contenant x à son intérieur. L'image du bord de e dans R^n est un compact K et si σ_n est un simplexe contenant K dans son intérieur, son image dans V est une cellule e'; on a $V = \overset{\circ}{e} \cup \overset{\circ}{e}'$.

c) entraîne a) se montre comme suit:

Supposons que $V = \overset{\circ}{e} \cup \overset{\circ}{e}'$, où e et e' sont deux cellules combinatoires semi-linéairement plongées dans V. On peut supposer que $V - \overset{\circ}{e} = V_1$ est semi-linéairement plongée sur $\sigma_n \subset R^n \subset R^{n+1}$; la réunion de V_1 et du cône C sur son bord est combina-toirement équivalente à V. Soit c le sommet de C et soit $lk(c, R^{n+1})$ le complément de l'étoile ouverte dans l'étoile fermée de c relativement à une subdivision simpliciale affine de R^{n+1}; soit φ un homéomorphisme semi-lineaire de $lk(c, R^{n+1})$ sur le bord $\partial \sigma_{n+1}$ d'un simplexe σ_{n+1} (par exemple, la projection radiale). Soit V_2 l'adhérence combinatoire du $\partial \sigma_{n+1} - \varphi(V_1)$ et soit V' la variété obtenue à partir de la somme topologique de V_2 et e en recollant leurs bords; alors $V \# V'$ est obtenue à partir de la somme topologique de V_1 et V_2 en recollant leurs bords à l'aide de φ; ceci signifie que $V \# V'$ est combinatoirement équivalent à $\varphi(V_1) \cup V_2 = \partial \sigma_{n+1}$.

REMARQUE. c) entraîne b) est dû à Stallings [23], Lemme 3.

0.4. Soit V_n une variété combinatoire avec bord ∂V_n ; si $V_n \times I = I^{n+1}$, $n \leq 3$, alors V_n est homologiquement trivial; donc

1) si $n = 1$, V est une 1-cellule;

2) si $n = 2$, V étant une variété de dimension 2 à bord, V est une 2-cellule;

3) si $n = 3$, d'après les travaux de Wilder, V est une 3-cellule.

Par contre, il existe des variétés V de dimension 4 à bord non simplement connexe telles que $V \times I = I^5$.

PROPOSITION. *Soit V_n une variété combinatoire de dimension n à bord simplement connexe telle que $V_n \times I = I^{n+1}$; alors V_n est homéomorphe à une boule pour $n \geq 6$.*

DEMONSTRATION. Le bord $\partial(V_n \times I) = (V_n \times \{0\} \cup V_n \times \{1\}) \cup \partial V_n \times I$ est homéomorphe à S_n; puisque V_n est contractile, la suite exacte d'homologie relative à $(V_n, \partial V_n)$ entraîne que ∂V_n a le type d'homotopie de S_{n-1}; donc ∂V_n est homéomor--phe à S_{n-1} pour $n \geq 6$ [23, 29]. Puisque $\partial V_n \times I$, homéomorphe à $S_{n-1} \times I$, est plongé dans $\partial(V_n \times I)$, homéomorphe à S_n, il en résulte, d'après Brown-Smale [21 a], que $V_n \times \{0\}$ est une boule, car son bord est la sphère $\partial V_n \times \{0\}$.

1. Fibrations des sphères en sphères

1.1. Soit E un espace fibré de fibre S_k sur S_n de groupe structural $SO_{k+1}(k < n)$; supposons que les groupes d'homotopies $\pi_i(E) = 0$ pour $i \leq n$; la suite exacte d'homo--topie d'espace fibré montre que $k = n-1$; puisque $\pi_{n-1}(E) = 0$, la fibre S_{n-1} est contractile en E à un point et l'espace fibré n'admet pas de section. Montrons que S_{n-1} est *parallélisable* (cf. [10]); en effet, soit $\tilde{E}$ l'espace fibré principal associé à E et soit $y : \tilde{E} \to E$ l'application définie par $h \to h_y$, où $h \in \tilde{E}$ et $y \in S_{n-1}$. D'après 17.13 de [24], le noyau de $i_* : \pi_j(S_{n-1}) \to \pi_j(E)$ où i est l'inclusion de S_{n-1} dans E, est contenu dans l'image de $y'_* : \pi_j(SO_n) \to \pi_j(S_{n-1})$ où $y' = y \mid SO_n$; ceci entraîne que $y'_* : \pi_{n-1}(SO_n) \to \pi_{n-1}(S_{n-1})$ est surjectif. Donc il existe une application $s : S_{n-1} \to SO_n$ telle que $y's =$ identité; or y' est la projection correspondant à une fibration $(SO_n, S_{n-1}, SO_{n-1})$; ceci entraîne que S_{n-1} est parallélisable. Il en résulte que $n-1 = 1, 3$ ou 7 [14 c].

Si $n = 2$, E est homéomorphe à S_3. Si $n = 4$, on a $\pi_3(SO_4) = Z + Z$; Soient α_3, β_3 les classes d'homotopie définies par les applications ρ et σ de S_3 dans SO_4 telles que $\rho(q)$ soit l'application $q' \to qq'q^{-1}$ et $\sigma(q)$ l'application $q' \to qq'$, où q, q' sont des quaternions uni--taires respectivement; α_3, β_3 engendrent $\pi_3(SO_4)$ et à chaque élément $m\alpha_3 + n\beta_3$ de $\pi_3(SO_4)$, correspond un espace fibré $E_{m,n}$ de base S_4, de fibre S_3 et de groupe structural SO_4[24]. L'obstruction pour l'existence d'une section de E est égale à $n\beta_3$; en effet, le cocycle d'obstruction (§ 32, [24]) est donné par $\pm[T(x)]\,\alpha_4$(*), où T est l'application carac--téristique de la fibration et α_4 est un générateur de $\pi_4(S_4)$; donc l'espace fibré E correspond à un couple (m, n) où $n \neq 0$; puisque $\pi_4(E) = \pi_3(E) = 0$, l'opérateur $\partial : \pi_4(S_4) \to \pi_3(S_3)$ de la suite exacte d'homotopie de la fibration (E, S_4, S_3) est un isomorphisme sur $\pi_3(S_3)$. Soit $\tilde{E}$ l'espace fibré principal associé à E; si $y \in S_3$, on

(*) $[T(x)]$ est défini par $T(x)(y_o) \in [T(x)]$, $x \in S_3$, $y_o \in S_3$ (cf. Tamura [25 a]).

a le diagramme commutatif de la suite exacte d'homotopie:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_4(S_4) & \xrightarrow{\tilde{\partial}} & \pi_3(SO_4) & \longrightarrow & \ldots\ldots & & \\ \downarrow & & \downarrow y_* & & & & \\ \pi_4(S_4) & \xrightarrow{\partial} & \pi_3(S_3) & \longrightarrow & \pi_3(E) & \longrightarrow & \pi_3(S_4) = 0 \ ; \end{array}$$

donc $\partial(\alpha_4) = y_* \tilde{\partial}(\alpha_4) = y_*(m\alpha_3 + n\beta_3)$ est un générateur de $\pi_3(S_3)$; mais $y_*\beta_3$ étant l'identité, on a nécessairement $n = \pm 1$. Donc E est isomorphe à $E_{m,\pm 1}$ et il en résulte que [20 c] E est homéomorphe à S_7.

Si $n = 8$, on a $\pi_7(SO_8) = Z + Z$ et à chaque couple (m, n) correspond un espace fibré $E_{m,n}$ de fibre S_7, de groupe structural SO_8 et de base S_8; puisque l'obstruction pour l'existence d'une section de E est égale à $n\beta_8$, où β_8 est la classe définie par l'application $\beta_8 : S_7 \to SO_8$ telle que $\beta_8(x)$ soit l'application $y \to xy$, x, y étant les nombres de Cayley de module égal à 1 [24]. E correspond à un couple (m, n) avec $n \neq 0$. Puisque $\pi_8(E) = \pi_7(E) = 0$, l'application $\partial : \pi_8(S_8) \to \pi_7(S_7)$ de la suite exacte d'homotopie de (E, S_8, S_7) est un isomorphisme sur $\pi_7(S_7)$; il en résulte que E est isomorphe à $E_{m,\pm 1}$; donc E est homéomorphe à S_{15} [25 a]. Donc:

THEOREME. *Soit E un espace fibré de fibre S_k et de groupe structural SO_{k+1} sur S_n; si $\pi_i(E) = 0$ pour $i \leq n$, alors $k = n - 1$ et E est homéomorphe à S_3, S_7, ou S_{15}.*

REMARQUE. Pour que le groupe structural de l'espace fibré (E, S_4, S_3, SO_4) puisse être réduit au groupe G des translations à gauche $q \to q'q$ sur la sphère S_3 des quater--nions unitaires, il faut et il suffit que l'espace fibré associé de fibre SO_4/G admette une section, ou encore que l'élément $m\alpha_3 + n\beta_3$ caractéristique de la fibration se réduise à un multiple de β_3, c'est-à-dire $m = 0$. Cette condition exprime aussi que E admet une structure d'espace fibré principal de groupe G. L'espace E, correspondant au couple $(0, \pm 1)$, est alors isomorphe à S_7.

1.2. Plus généralement, supposons que S_n est un espace fibré de fibre connexe F sur un polyèdre localement fini et non contractile en un point; F est-elle une sphère? On sait que F est une sphère d'homologie rationnelle d'après un théorème de Borel et Serre [4 b]; *j'ignore si F est une sphère en général.*

THEOREME. *Soit S_n un espace fibré différentiable de fibre compacte et connexe F sur une variété différentiable B; alors F est une sphère d'homotopie de dimension 1, 3 ou 7.*

DEMONSTRATION. La fibre étant contractile en un point sur S_n, F est parallélisable d'aprés un théorème de C. Ehresmann [9 d]. D'autre part, on sait que F est un H-espa-

-ce [28 b]. Puisque la semi-caractéristique de F est égale à 1 et que F est parallélisable, il existe un élément dans $\pi_{2k+1}(S_k)$ dont l'invariant de Hopf est égal à 1, où $\dim F = k$, d'après un résultat de Kervaire [14 c]; donc $k = 1, 3$ ou 7 d'après Adams [2 a]. Si $k = 1$, alors F est un cercle. Si $k = 3$ ou 7, F étant un H-espace et une sphère d'homologie rationnelle, F n'a pas de torsion en dimensions impaires; donc F est une sphère d'homologie entière; d'autre part, F est simplement connexe puisque le groupe fondamen--tal de F est abélien; donc F a ses groupes d'homotopie isomorphes à ceux d'une sphère (Hurewicz) et par suite est une sphère d'homotopie (J. H. C. Whitehead).

1.3. Supposons que S_n soit muni d'une fibration de fibre S_k, de groupe structural SO_{k+1}, l'espace quotient étant un polyèdre B localement fini non contractile en un point. D'après 1. 1., il en résulte que $k = 1, 3$ ou 7. Puisque la fibre est contractile en un point sur S_n, $\pi_i(B) = \pi_i(S_n) + \pi_{i-1}(S_k)$; donc on a $\pi_i(B) = 0$ pour $i \leq k$; donc $\dim B \geq k + 1$; sinon B serait contractile; il en résulte que $n \geq 2k + 1$. De plus, n est impaire à cause de la relation $E(S_n) = E(S_k)\, E(B)$, en remarquant que $E(S_k) = 0$, où $E(X)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un espace X. La suite exacte de Gysin :

$$\ldots\ldots \longrightarrow H^i(B) \longrightarrow H^i(S_n) \longrightarrow H^{i-k}(B) \longrightarrow H^{i+1}(B) \longrightarrow \ldots\ldots$$

montre que $H^{i-k}(B) \cong H^{i+1}(B)$ pour $0 < i < n-1$, où l'isomorphisme est donné par $x \to x \cup u$, u étant la classe caractéristique de Whitney de dimension $k + 1$; le théorè--me d'isomorphisme d'Hurewicz et l'isomorphisme de Gysin entraînent que B est sans torsion et le polynôme de Poincaré de B est de la forme $1 + t^{k+1} + t^{2(k+1)} + \ldots\ldots + t^{m(k+1)}$ où $\dim B = m(k+1)$.

Si $k = 1$, l'espace fibré S_n, n impair. étant un espace fibré principal n-universel, B a le type d'homotopie de l'espace projectif complexe $P_m(C)$ où $m = (n-1)/2$, d'après le théorème de classification suivant: soient $E \to B$, $E' \to B'$ deux espaces fibrés principaux universels de même fibre F tels que $\pi_i(F) = 0$ pour $i \leq \dim B$; si $\dim B = = \dim B'$, alors B a le même type d'homotopie que B'; en effet, d'après le théorème de classification [24], [9 d], il existe deux applications $f: B \to B'$, $f': B' \to B$ telles que $f^*(E') = E'$ et $f'^*(E) = E'$; donc, on a $(ff')^*(E) = E$ et $(f'f)^*(E') = E'$ ce qui entraîne que $ff' \simeq$ identité de B, $f'f \simeq$ identité de B'.

Si $k = 3$, on a $\dim B = 4m$, $(m \geq 1)$, et $H^*(B)$ est engendré par une classe de cohomologie u de dimension 4 et de longueur (*) $m+1$ d'aprés la suite exacte de Gysin; il en résulte que $n = 4m+3$.

Si $k = 7$, la suite exacte d'homotopie:

$$\ldots\ldots \longrightarrow \pi_{i+1}(S_n) \longrightarrow \pi_{i+1}(B) \longrightarrow \pi_i(S_7) \longrightarrow \pi_i(S_n) \longrightarrow \ldots\ldots$$

(*) La longueur d'une classe de cohomologie u est le plus petit entier r tel que $u^r = 0$.

montre que $\pi_i(B) = 0$ pour $i \leq 7$, $\pi_8(B) = Z$; la suite exacte de Gysin montre que $n = 8m + 7$; supposons que n soit plus grand que 15 ; si l'anneau de cohomologie d'un espace est engendré par une classe u de dimension ≥ 8, la longueur de u est ≤ 3 d'après un théorème d'Adem [2]. D'autre part, $H^*(B)$ est engendré par une classe u de dimension 8 dont la longueur est égale à $m+1$. Considérons S_n comme le bord de la cellule e_{n+1} et soit M l'espace obtenu en identifiant dans e_{n+1} les points de chaque fibre de S_n. Supposons vérifiée la *condition (c) suivante : M est une variété*. D'après la dualité de Poincaré, $H^*(M)$ est engendré par les puissances de cup-produit de u dont la longueur est $m+2$; donc, si $m = 2$, la longueur de u serait 4; or elle est ≤ 3, d'où une contradiction; il en résulte que $m = 1$ et $n = 15$. D'après un théorème de J. H. C. Whitehead, la base B a le type d'homotopie de S_8 [28 b], donc est homéomorphe à S_8 d'aprés Stallings [23].

THEOREME. *Soit S_n un espace fibré k-sphérique sur un polyèdre localement fini non contractile B; alors $k = 1$, 3 ou 7; si $k = 1$, on a $n = 2m+1$ et B a le type d'homotopie de l'espace projectif complexe $P_m(C)$; si $k = 3$, on a $n = 4m+1$; si $k = 7$, et si la condition (c) ci-dessus est vérifiée, alors on a $n = 15$ et B est homéomorphe à S_8.*

2. Classes Caractéristiques Combinatoires ([26 b], [30]).

2.0. Soit V une variété différentiable de dimension impaire n; étant donnée une classe $z \in H^{n-4k}(V; Q)$, il existe un entier $m \neq 0$ et une application $f : V \to S_{n-4k}$ tel que $f^*(u) = mz$, où u est la classe fondamentale de S_{n-4k}; pour $n > 8k+2$, l'entier m est unique [26 b] ainsi que la classe d'homotopie de f. On peut supposer que f est transverse sur $o \in S_{n-4k}$; alors $W = f^{-1}(o)$ est une sous-variété de dimension $4k$ de V dont l'espace fibré normal est trivial. Si v (resp. w) est le cycle fondamental de V (resp. W), on a $\langle L_k(p_i) \cup mz, v \rangle = I(W) = \langle L_k(p_i), w \rangle$ d'après Hirzebruch [13], où les p_i sont les classes de Pontrjagin rationnelles de V, $I(W)$ l'indice de W, et L_k le polynôme de Hirzebruch associé à V.

2.1. Soit V une variété combinatoire de dimension n (impaire) et $z \in H^{n-4k}(V; Q)$; il existe un $m \neq 0$ et $f : V \to S_{n-4k}$ tel que $f^*(u) = mz$ et tel que $W = f^{-1}(o)$ soit une sous-variété triangulée de dimension $4k$ de V [26 b].

THEOREME 1. *Pour chaque k et pour tout $z \in H^{n-4k}(V; Q)$, il existe une seule classe $I_k \in H^{4k}(V; Q)$ telle que, pour toute sous-variété W obtenue par la construction précédente, on ait $\langle I_k \cup mz, v \rangle = I(W)$ pour $n > 8k+2$.*

DEMONSTRATION. mz étant fixé, $I(W)$ ne dépend pas du choix de W [26 b]; en effet, si f et f' sont homotopes, alors [26 a], $f^{-1}(o)$ et $f'^{-1}(o)$ sont cobordantes; et leurs indi--ces sont égaux. Soit $\pi^{n-4k}(V)$ le groupe de cohomotopie de dimension $(n\text{-}4k)$ de V; pour chaque $\bar{f} \in \pi^{n-4k}(V)$, l'application $F : \bar{f} \to I(W)$, où $W = f^{-1}(o)$, est un homomorphisme de $\pi^{n-4k}(V)$ dans Z. Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} Q \otimes \pi^{n-4k}(V) & \xrightarrow{F} & Q \\ \downarrow \varphi^* & & \downarrow \\ H^{n-4k}(V;Q) & \longrightarrow & Q \end{array}$$

où φ^* est un isomorphisme pour $n > 8k+2$ [26 b]; donc, il existe une classe $I_k \in H^{4k}(V;Q)$ telle que $\langle I_k \cup mz, v \rangle = I(W)$.

DEFINITION. *Les classes $I_k \in H^{4k}(V;Q)$ seront appelées les classes caractéristi--ques combinatoires de V; si n est pair, on pose $I_k = i^* I_k(V \times S_1)$ où $i : V \to V \times S_1$ est l'injection appliquant V sur $V \times \{x\}$, $x \in S_1$. Si $n \leq 8k+2$, on peut considérer $V \times S_N$ pour N assez grand et on définit $I_k = i^* I_k(V \times S_N)$, i étant l'injection de V dans $V \times S_N$, appliquant V sur $V \times \{x\}$, $x \in S_N$.*

2.2. Soient V et V' deux variétés combinatoires b-cobordantes de dimension n; alors, il existe (cf. définition 0. 2.) deux applications liées au b-cobordisme $\varphi : V' \to V$, $\varphi' : V \to V'$, telles que V et V' soient des équivalences d'homotopie; désignons par φ'_* (resp. φ'^*) l'isomorphisme de $H_i(V)$ sur $H_i(V')$ (resp. de $H^i(V')$ sur $H^i(V)$) défini par φ'. Soit $z \in H^{n-4k}(V';Q)$; il existe un entier $m \neq 0$ et une application $f : V' \to S_{n-4k}$ tel que mz soit réalisé [1] par une sous-variété triangulée $W'_{4k} = f^{-1}(o)$, $o \in S_{n-4k}$; alors $m\varphi'^*(z)$ est réalisé par une sous-variété W_{4k}, puisque les groupes de cohomotopie $\pi^{n-4k}(V)$ et $\pi^{n-4k}(V')$ sont isomorphes en supposant $n > 8k+2$, l'isomorphisme étant induit par l'équivalence d'homotopie de V sur V'; on a:

$$\langle I'_k \cup mz, v' \rangle = I(W'_{4k})$$

$$\text{et } \langle I_k \cup m\,\varphi'^*(z), \; \varphi'^{-1}_*(v') \rangle = I(W_{4k}).$$

LEMME. *Les sous-variétés W_{4k} et W'_{4k} sont b-cobordantes.*

DEMONSTRATION. Puisque V, V' sont b- cobordantes, il existe une variété combina--toire B à bord ∂B telle que $\partial B = V \cup V'$ et V, V' sont en équivalence d'homotopie; donc, si $z \in H^{n-4k}(V';Q) \cong H^{n-4k}(B;Q)$, l'image de z dans $H^{n-4k}(B;Q)$ est réalisée par une sous-variété triangulée C à bord (cf., [26 *b*]) dont le bord ∂C est une

(1) On dira que la classe $\tilde{z} \in H_j(V;Q)$ est réalisée par une sous-variété W de V si $\tilde{z}$ est l'image par i de la classe fondamentale de W, où i est l'inclusion de W dans V.

sous-variété de ∂B; on a $\partial C = W_{4k} \cup W'_{4k}$. Il en résulte que $I(W_{4k}) = I(W'_{4k})$; on voit facilement que W_{4k} et W'_{4k} sont en équivalence d'homotopie avec C.

L'égalité $I(W_{4k}) = I(W'_{4k})$ entraîne:

$$\langle l'_k \cup mz, v' \rangle = \langle l'_k, mz \cap v' \rangle =$$
$$\langle l_k \cup m\varphi'^*(z), \varphi'^{-1}_*(v') \rangle = \langle \varphi'^{*-1}(l_k) \cup m\varphi'^*(z)), v' \rangle =$$
$$\langle \varphi'^{*-1}(l_k) \cup mz, v' \rangle = \langle \varphi'^{*-1}(l_k), mz \cap v' \rangle ;$$

il en résulte que $l_k = \varphi'^*(l'_k)$ d'après le théorème 1.

THEOREME 2. *Soient V et V' deux variétés combinatoires h-cobordantes et soit $\varphi' : V \to V'$ l'une des équivalences d'homotopie liées au h-cobordisme; alors $\varphi'^*(l'_k) = l_k$.*

COROLLAIRE 1. *Les classes caractéristiques combinatoires l_k sont des invariants combinatoires.*

En effet, deux variétés combinatoires V, V' qui admettent des subdivisions isomorphes par un isomorphisme φ sont h-cobordantes; φ est l'équivalence d'homotopie correspondante, donc, on a $\varphi^*(l'_k) = l_k$.

Soit V une variété combinatoire *admettant une structure différentiable compatible avec la triangulation*; on a $\langle l_k \cup mz, v \rangle = I(W_{4k})$ pour $z \in H^{n-4k}(V; Q)$; d'autre part, d'aprés le théorème de l'indice de Hirzebruch, on a $\langle L_k(p_i) \cup mz, v \rangle = I(W_{4k})$, puisque W_{4k} admet une structure différentiable compatible avec la triangulation; il en résulte que $l_k = L_k(p_i)$, d'après le théorème 1.

COROLLAIRE 2. *Pour qu'une variété combinatoire V admette une structure différentiable compatible avec la triangulation, il faut que l'on ait $l_k = L_k(p_i)$.*

En remarquant que le coefficient rationnel de p_k dans $L_k(p_i)$ n'est jamais nul, on peut résoudre l'équation $l_k = L_k(p_i)$ par rapport à p_k; donc, on peut résoudre le système d'équations en fonction des p_k. On en déduit:

COROLLAIRE 3. *Si V admet une structure différentiable compatible avec la triangula--tion, alors les classes de Pontrjagin rationnelles sont des invariants combinatoires.*

3. Exemples de triangulations non différentiables.

3.0. Considérons les espaces fibrés en sphères S_3 sur S_4 de groupe structural SO_4. Soit $\xi_{m,n} = (E_{m,n}, S_4, S_3)$ l'espace fibré ayant la classe caractéristique $m\rho + n\sigma$, où ρ, σ sont les générateurs de $\pi_3(SO_4)$; soit q la projection de $E_{m,n}$ sur S_4.

Si $p_1(\xi_{m,n})$ désigne la classe de Pontrjagin de l'espace fibré $\xi_{m,n}$, on a

[20 c] :

$$p_1(\xi_{m,n}) = \pm 2(2m+n)\alpha$$

α étant un générateur de $H^4(S_4)$. Milnor [20 c] a montré que $E_{m,1}$ est homéomorphe à S_7, quel que soit l'entier m, et $\overline{E}_{m,1}$ est une π-variété [20 a] ; soit $T_{m,1}$ l'espace de Thom de $\xi_{m,1}$. Supposons que $T_{m,1}$ admette une structure différentiable compatible avec la triangulation. Il est facile de voir, utilisant la formule de l'indice, que l'on a :

$$p_2(T_{m,1}) = \frac{45+m^2}{7},$$

où $p_2(T_{m,1})$ est la deuxième classe de Pontrjagin de la variété différentiable $T_{m,1}$. Il en résulte que les variétés triangulées $T_{m,1}$ n'admettent aucune structure différentiable compatible pour $m \neq \pm 2 \mod 7$ puisque les nombres de Pontrjagin d'une variété différentiable sont des entiers. La théorie de Smale montre que $T_{m,1}$ ne sont pas même différentiables (cf. Kuiper et Eells [19] et Tamura [25 c]). *On ne connaît pas d'exemples de variétés combinatoires sans structures différentiables pour les dimensions 5, 6 ou 7.*

3.1. Soit M une variété différentiable close et simplement connexe ayant le polynôme de Poincaré $1+t^4+t^8$; puisque $\pi_i(M)=0$ pour $i=0, 1, 2, 3$ et $\pi_4(M)=Z$, M est difféomorphe à une variété différentiable $M_{m,1}$ avec $m(m+1 = 0 \mod 56$, où $M_{m,1} = \overline{E}_{m,1} \cup D_8$ est obtenu par recollement de $\overline{E}_{m,1}$ et de la boule D_8 le long de leurs bords $\partial\overline{E}_{m,1}$ et ∂D_8 au moyen d'un difféomorphisme de $\partial\overline{E}_{m,1}$ et S_7 [25 c]. Soit $\xi_{m,n}$ l'espace fibré $(E_{m,n}, S_4, S_3)$, q étant la projection de $E_{m,n}$ sur S_4; on sait que la classe de Pontrjagin p_1 de $\xi_{m,n}$ est égale à $\pm 2(2m+n)\alpha$, où α est le générateur de $H^4(S_4)$ introduit plus haut. La variété différentiable $\overline{E}_{m,1}$ a le même type d'homo--topie que S_4; soit $\overline{q}^*\alpha$ le générateur de $H^4(\overline{E}_{m,1})$, où $\overline{q}$ est la projection de $\overline{E}_{m,1}$ sur S_4. L'espace fibré tangent τ de $\overline{E}_{m,1}$ est la somme de Whitney de l'espace fibré τ' des vecteurs tangents aux fibres et de l'espace fibré ν des vecteurs normaux aux fi--bres; est isomorphe à l'espace fibré induit de $\xi_{m,1}$ par $\overline{q}$ et ν est induit de l'espace fibré tangent à S_4 par $\overline{q}$. Puisque $p_1(S_4) = 0$, on a :

$$p_1(\tau) = p_1(\tau') = \overline{q}^*p_1(\xi_{m,1}) = \pm 2(2m+1)\overline{q}^*(\alpha).$$

Soit $\overline{\alpha} \in H^4(M_{m,1})$ correspondant au générateur $\overline{q}^*\alpha \in H^4(\overline{E}_{m,1})$; alors $p_1(M_{m,1}) = \pm 2(2m+1)\overline{\alpha}$, où $m(m+1) = 0 \mod 56$. Donc, si $m=0$ et 48, l'on a :

$$\langle p_1(M_{0,1})\ M_{0,1}\rangle = \pm 2 \quad \text{et} \langle p_1(M_{48,1})\ M_{48,1}\rangle = \pm 194;$$

or le polynôme de Poincaré de chacune des variétés $M_{m,1}$ est $1+t^4+t^8$. Donc :

THEOREME 1. *Les variétés différentiables closes et simplement connexes ayant le polynôme de Poincaré $1 + t^4 + t^8$ n'admettent pas les mêmes nombres de Pontrjagin.*

Si $m = m' \bmod 12$, les variétés combinatoires $E_{m,1}$, et $E_{m',1}$ ont le même type d'homotopie; on sait que les variétés $M_{m,1}$ sont différentiables si, et seulement si, $m(m+1) = 0 \bmod 56$. Or les nombres de Pontrjagin combinatoires au sens de Thom, de $M_{m,1}$ pour $m = 0$ et $m = 12$ sont différents. Donc:

PROPOSITION: *Les nombres de Pontrjagin combinatoires au sens de Thom ne sont pas des invariants du type d'homotopie.*

3.2. D'après Feldbau [24], les classes d'équivalence des espaces fibrés *(r-1)-sphé--riques* $\xi = (E, S_n, S_{r-1})$ sur S_n sont en correspondance biunivoque avec les éléments de $\pi_{n-1}(SO_r)$; en prenant comme représentant d'un élément de $\pi_{n-1}(SO_r)$ une applica--tion différentiable de S_{n-1} dans SO_r (par rapport aux structures différentiables usuel--les), l'espace E correspondant est muni d'une structure différentiable. Nous avons:

LEMME 1. *Etant donnés deux entiers m et $r > 8$, il existe un espace fibré $\xi_m = (E_m, S_8, S_{r-1}, SO_r)$ tel que la classe de Pontrjagin $p_2(\xi_m) = \pm 6m\alpha$, α étant un générateur de $H^8(S_8)$.*

DEMONSTRATION. Puisque $\pi_7(SO_r) = Z$ $(r > 8)$ d'après Bott, il existe un espace fibré ξ_m de fibre SO_r sur S_8 correspondant à $m \in Z$ avec la classe caractéristique $m\beta$, où β est un générateur de $\pi_7(SO_r)$. Si ξ^c est l'extension complexe de ξ_m correspondant à l'inclusion $j: SO_r \to SU_r$, on a $p_2(\xi_m) = c_4(\xi^c)$; puisque $\pi_7(W_{r,r-3}) = Z$, on sait que $\partial'\beta = c_4[\xi^c] \cdot \epsilon$, où $\partial': \pi_8(S_8) \to \pi_7(W_{r,r-3})$ est l'opérateur bord de la suite exacte d'homotopie de l'espace fibré $(\tilde{E}, S_8, W_{r,r-3})$ de fibre $W_{r,r-3}$ associé à (E, S_8, SU_r) et où ϵ est un générateur de $\pi_7(W_{r,r-3})$; on a donc:

$$c_4[\xi^c] \cdot \epsilon = \partial'\alpha = q_* j_* \partial\alpha' = m q_* j_* \beta = \pm 6m\epsilon,$$

où α' est le générateur de $\pi_8(S_8)$ correspondant à $\alpha \in H^8(S_8)$ et où $q: SU_r \to W_{r,r-3}$ est la projection de l'espace fibré $(SU_r, W_{r,r-3}, SU_3)$, en tenant compte des égalités $\pi_7(SU_r) = \pi_7(W_{r,r-3})$, $\pi_6(SU_3) = Z_6$ et $\pi_6(SU_r) = 0$ $(r > 8)$.

Soit ξ_m l'espace fibré du lemme 1; on sait que $\pi^*: H^8(S_8) \to H^8(E_m)$ est un isomorphisme, où π est la projection de E_m sur S_8. Soit $p_2(E_m)$ la classe de Pontrjagin de E_m muni d'une structure différentiable de l'espèce considérée plus haut; on a $p_2(E_m) = \pm 6m\pi^*(\alpha)$. Pour un r fixé, les variétés E_m et $E_{m'}$ sont de même type d'homotopie si $m \equiv \pm m' \bmod 240$; or les classes de Pontrjagin sont des invariants combinatoires. Donc on a:

THEOREME 2. *Si* $m \equiv \pm m' \bmod 240$, *les variétés* E_m *et* $E_{m'}$ *sont du même type d'homotopie mais ne sont pas équivalentes combinatoirement.*

Dans le cas $r = 8$, on sait que $\pi_7(SO_8) = Z + Z$ avec les générateurs définis par des applications α_8, β_8 de S_7 dans SO_8 telles que $\alpha_8(x)$ soit l'application $x \to xyx^{-1}$ et $\beta_8(x)$ l'application $y \to xy$, où x, y sont les nombres de Cayley de module 1.

LEMME 2. *Etant donnés deux entiers* m *et* n, *il existe un espace fibré* $\xi_{m,n} = (E_{m,n}, S_8, S_7)$ *de groupe structural* SO_8 *sur* S_8 *avec* $p_2(\xi_{m,n}) = \pm 6(2m+n)\alpha$, $X(\xi_{m,n}) = n\alpha$, α *étant un générateur de* $H^8(S_8)$, $X(\xi_{m,n})$ *étant la classe caractéristique d'Euler-Poincaré de* $\xi_{m,n}$ *(c'est-à-dire* $X(\xi_{m,n}) \bmod 2$ *est la classe de Stiefel-Whitney de dimension 8.*

DEMONSTRATION. En vertu du théorème de la classification de Feldbau, le couple (m, n) détermine un espace fibré $\xi_{m,n}$ avec l'application caractéristique $m\alpha_8 + n\beta_8$. L'obstruction pour l'existence d'une section pour l'espace fibré associé de fibre $W_{8,5}$ est $n\alpha$, donc la classe d'Euler-Poincaré $X(\xi_{m,n}) = n\alpha$.

On sait que $\partial'(m\alpha_8 + n\beta_8) = c_4[\xi^c] \cdot \epsilon$, où $\partial' : \pi_8(S_8) \to \pi_7(W_{8,5})$ est l'o-pérateur bord de la suite exacte d'homotopie de l'espace fibré $(\tilde{E}, S_8, W_{8,5})$ associé à (E, S_8, SU_8) et où ϵ est un générateur de $\pi_7(W_{8,5})$. On a :

$$c_4[\xi^c] \cdot \epsilon = q_* j_*(m\alpha_8 + n\beta_8) = q_*(2m+n)\mu = \pm 6(2m+n)\epsilon$$

où $q : SU_8 \to W_{8,5}$ est la projection de l'espace fibré $(SU_8, W_{8,5}, SU_3)$, où μ est un générateur de $\pi_7(SU_8)$ qui est isomorphe à Z et où j est l'injection $SO_8 \to SU_8$, en tenant compte des égalités $\pi_6(SU_3) = Z_6$ et $\pi_6(SU_8) = 0$. Donc, on a $p_2(\xi_{m,n}) = \pm 6(2m+n)\alpha$.

Considérons les espaces fibrés cellulaires $\bar{\xi}_{m,1}$ associés à $\xi_{m,1}$; on sait que $E_{m,1}$ est homéomorphe à S_{15}[25 a], même combinatoirement équivalent à S_{15}[20 c].

Soit $T_{m,1}$ l'espace de Thom associé à $\xi_{m,1}$. $\bar{E}_{m,1}$ est une variété compacte avec bord; considérons une C^1triangulation de $\bar{E}_{m,1}$ qui se réduit sur le bord à une triangulation donnée de $E_{m,1}$; on en déduit une *triangulation* de $T_{m,1}$, qui devient aussi une variété combinatoire. On a $H^{2k}(T_{m,1}) = Z$ pour $k = 0, 4, 8$ et $H^{2k}(T_{m,1}) = 0$ pour les autres valeurs de k; les homomorphismes :

$$H^8(S_8) \longrightarrow H^8(\bar{E}_{m,1}) \longleftarrow H^8(T_{m,1})$$

sont des isomorphismes. Soient $\alpha' \in H^8(\bar{E}_{m,1})$, $\alpha'' \in H^8(T_{m,1})$ les éléments correspondant à $\alpha \in H^8(S_8)$; puisque $\langle \alpha' \cup \alpha', \bar{e} \rangle = \pm 1$, où $\bar{e}$ est la classe d'homologie fondamentale de $\overline{E}_{m,1}$, on a $I(T_{m,1}) = \pm 1$ et nous pouvons supposer $I(T_{m,1}) = +1$. *Supposons $T_{m,1}$ muni d'une structure différentiable compatible avec sa triangulation;* les classes $p_2(\overline{E}_{m,1})$ et $p_2(\dot{T}_{m,1})$ correspondant aux structures différentiables sont des classes $\pm 6(2m+1)\alpha'$ et $\pm 6(2m+1)\alpha''$ respectivement. Puisque $p_1(T_{m,1}) = p_3(T_{m,1}) = 0$, on a, d'après la formule de l'indice de Hirzebruch :

$$3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot I(T_{m,1}) = \langle 381\, p_4 - 19\, p_2^2 \,;\, T_{m,1} \rangle \,;$$

donc $\langle p_4(T_{m,1}), T_{m,1} \rangle = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 + 19 \cdot 6^2(2m+1)^2 / 381$ est en général un nombre rationnel non entier (par exemple pour $m = 1$ ou ± 2).

THEOREME 3. *Les variétés $T_{m,1}$, pour $m = 1$ ou $m = \pm 2$, n'admettent aucune struc--ture différentiable compatible avec leurs triangulations.*

En effet, s'il y avait une structure différentiable compatible avec la triangulation, le nombre $\langle p_4, T_{m,1} \rangle$ serait entier.

Il serait intéressant de savoir pour quelles valeurs de m, les variétés $\overline{E}_{m,1}$ sont des π-variétés.

3.4. Etant donné un difféomorphisme $f : S_m \times S_n \to S_m \times S_n$, si, dans l'espace somme $E = (D_{m+1} \times S_n) + (S_m \times D_{n+1})$, on identifie un point $(x,y) \in S_m \times S_n \subset D_{m+1} \times S_n$ avec $f(x,y) \in S_m \times D_{n+1}$, on obtient une variété différentiable M_f de dimension $m+n+1$. Soit $k(y)$ la fonction définie par $k(y) = y_{n+1}$, $y \in S_n$, où y_{n+1} est la $n+1^{\text{ième}}$ coordonnée de $y \in S_n \subset R^{n+1}$. Si le difféomorphisme f est tel que $k(y) = k(y')$ pour tout (x,y), alors M_f est combinatoirement équivalent à S_{m+n+1} [20b].

Considérons deux applications : $f_1 : S_m \to SO_{n+1}$, $f_2 : S_n \to SO_{m+1}$; posons : $x' = f_2(y)^{-1} \cdot x$, $y' = f_1(x) \cdot y$, $x \in S_m$, $y \in S_n$. Alors l'application $f : (x,y) \to (x',y')$ est un difféomorphisme de $S_m \times S_n$ sur $S_m \times S_n$. La variété différentiable M_f obtenue est un bord, c'est-à-dire : il existe une variété différentiable à bord W telle que $\partial W = M_f$ [20b]. Supposons $m \leq n$. Si $f_1 : S_m \to SO_{n+1}$ applique S_m dans $SO_n \subset SO_{n+1}$, alors l'application f correspondante vérifie la condition $k(y) = k(y')$ et M_f est une sphère combinatoire (cf., Lemme 1 et la Remarque à la fin de la page 963 de [20b]). Les variétés M_f considérées dans la suite vérifient cette condition.

INVARIANT $\lambda(M)$ DE MILNOR : Soit M une variété différentiable de dimension $4k-1$ telle que : 1) M a les mêmes groupes d'homologie rationnelle que S_{4k-1}, 2) M est un bord ∂W. Alors un nombre rationnel *mod 1*, $\lambda(M) \in Q/Z$, est défini comme suit : l'homomorphisme naturel $j : H^i(W, M; Q) \to H^i(W; Q)$ étant un isomorphisme pour $0 < i < 4k-1$, $\lambda(M)$ est la classe de :

$$(I(W) - \langle L_k(j^{-1}p_1(W), \ldots\ldots, j^{-1}p_{k-1}(W), 0), W\rangle)/s_k \mod 1,$$

où $s_k = 2^{2k}(2^{2k-1}-1)B_k/(2k)!$, B_k étant le $k^{ième}$ nombre de Bernoulli et où $I(W)$ est l'indice de la forme quadratique $a \to \langle a \cup a, W\rangle$, $a \in H^{2k}(W, M; Q)$. $\lambda(M)$ est indépendant de W [20 b].

Supposons que $m = 4r-1$, $n = 4(k-r)-1$, $k > 2r$; on sait [20b] que M_f est une sphère topologique si $s_r s_{k-r}/s_k$ est un entier ayant ses facteurs premiers $< 2(k-r)$ et on a:

$$\lambda(M_f) \equiv p_r(f_1)\, p_{k-r}(f_2)\, s_r s_{k-r}/s_k \mod 1$$

où p_r (resp., p_{k-r}) est l'homomorphisme de Pontrjagin $p_r: \pi_{4r-1}(SO_q) \to Z$ (resp., $p_{k-r}: \pi_{4(k-r)-1}(SO_q) \to Z$) défini comme suit: à chaque $f: S_{4r-1} \to SO_q$ correspond un espace fibré $\xi = (E, S_{4r}, S_{q-1})$ de groupe structural SO_q et on pose $p_r(f) = \langle p_r(\xi), S_{4r}\rangle$, $p_r(\xi)$ étant la classe de Pontrjagin de ξ.

Soit T_{4k} l'espace obtenu en identifiant le bord M_f de W avec un point; alors une C^1-triangulation de W qui induit sur M_f une subdivision d'une triangulation donnée de M_f, détermine une triangulation de T_{4k}. On a $H^i(T_{4k}; Z) = Z$ pour $i = 0, 4r, 4(k-r)$, $4k$ et $H^i(T_{4k}; Z) = 0$ pour les autres valeurs de i. Les homomorphismes:

$$H^{4k}(S_{4k}; Z) \longrightarrow H^{4k}(W; Z) \longleftarrow H^{4k}(T_{4k}, Z)$$

sont des isomorphismes. D'autre part, on sait [20 b] que $I(T_{4k}) = 0$; puisque $I(T_{4k}) = \langle L_k(p_1(T_{4k}), \ldots\ldots, p_k(T_{4k})), T_{4k}\rangle$, où L_k est le polynôme de Hirzebruch, on a $0 = \pm p_r(f_1)\, p_{k-r}(f_2)\, (s_r s_{k-r} - s_k) + s_k \langle p_k(T_{4k}), T_{4k}\rangle$. D'après Milnor [20 b] , $\langle p_k(T_{4k}), T_{4k}\rangle = \pm p_r(f_1)\, p_{k-r}(f_2)\, s_r s_{k-r}/s_k \mod 1$ est un nombre rationnel non entier si $s_r s_{k-r}/s_k$ est un entier avec ses facteurs premiers $< 2(k-r)$ pour $k \leq 14$. Or les nombres de Pontrjagin d'une variété différentiable sont des entiers, d'où une contradiction. Donc:

THEOREME 4. *Soit k un entier tel que $4 \leq k \leq 14$; alors les variétés triangulées T_{4k} n'admettent aucune structure différentiable compatible avec leurs triangulations.* *

* Ce résultat a été également annoncé par Adachi [1] (voir aussi [22 a]).

CHAPITRE DEUX

STRUCTURES DIFFERENTIABLES SUR CERTAINES VARIETES COMBINATOIRES

0. Généralités.

0. 1. Soient V une variété différentiable de dimension n à bord connexe ∂V et $f_i : \partial D^i_r \times D^i_{n-r} \to \partial V$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, k$, $r \geq 0$, $n \geq r$, des plongements dans ∂V, les ensembles images étant disjoints. Soit E l'espace somme des espaces $D^i_r \times D^i_{n-r}$ et de V; désignons par $\varphi(D^i_r \times D^i_{n-r})$ et $\varphi(V)$ les sous-espaces correspondants dans E. Identifions $\varphi(x)$ et $\varphi(f_i(x))$, pour tout $x \in \partial D^i_r \times D^i_{n-r}$. On déduit alors de E une variété V' désignée par $V \bigcup_{f_1} (D^1_r \times D^1_{n-r}) \bigcup_{f_2} \ldots\ldots, \bigcup_{f_k} (D^k_r \times D^k_{n-r})$, dont le bord est la réunion des $\varphi(D^i_r \times \partial D^i_{n-r})$ et de $\varphi(\partial V)$. V' admet une structure différentiable sauf le long des coins $\partial D^i_r \times \partial D^i_{n-r}$ pour chaque i; par arrondissement des angles [20 a], on obtient une variété différentiable $\chi(V) = (V, f_1, f_2, \ldots\ldots, f_k, r)$. $\chi(V)$ est aussi peut-être obtenu à partir de l'espace somme W des espaces $W_i = (V, f_i, r)$, en identi- -fiant les points des images de W_1, W_2, ..., W_k dans W correspondant à même point de V. Les sous-espaces $\varphi(D^i_r \times D^i_{n-r})$ sont appelés les *anses* de $\chi(V)$. Le bord de $\chi(V)$ est isomorphe à $\partial V \# \partial W_1 \# \ldots\ldots \# \partial W_k$.

Un *corps ansé ("handlebody")* est une variété différentiable de la forme $\chi(D_n) = (D_n, f_1, \ldots\ldots f_k, r)$; l'ensemble des corps ansés pour un triple (n, k, r) sera désigné par $\mathcal{H}(n, k, r)$.

Une fonction différentiable f sur une variété différentiable sera dite une *bonne fonction ("nice function"* au sens de Smale) si elle admet les points critiques non dégénérés c telle que $f(c)$ est égal à l'indice de c pour f .

0. 2. Soit M une variété différentiable close de dimension 8 et 3-connexe; d'aprés [21 a], si D_8 est une boule de dimension 8 plongée dans M, $M - \overset{\circ}{D}_8$ est un corps ansé , élément de $\mathcal{H}(8, b_4(M), 4)$ où $b_l(M)$ désigne le nombre de Betti de dimension l de M.

Si l'indice $I(M)$ de M est nul, on peut tuer le groupe d'homotopie $\pi_4(M)$ par une suite de modifications sphériques [20 d]; en effet, puisque la classe de Stiefel-Whitney w_4 de M est nulle, les éléments de la forme quadratique de M, réduit à la forme diagonale, sont pairs (*on dira que* M *est du type II*); donc si $f: S_4 \to M$ est un plongement différentiable représentant un des éléments α d'une base de $\pi_4(M)$, la classe d'homologie de $f(S_4)$ a une *auto-intersection ("self intersection")* nulle puisque $I(M)=0$ [20 d]. Soit T un voisinage tubulaire de $f(S_4)$; T est difféomorphe à $S_4 \times D_4$ (Lemme 5.11, [20 a]). Soit V la variété différentiable déduite de la somme topologique de $M-\overset{\circ}{T}$ et de $(D_5 \times S_3)$ en identifiant leurs bords, qui sont difféomorphes à $S_4 \times S_3$; alors V est 3-connexe et $\pi_4(V)=\pi_4(M)/Z\alpha$. En répétant cet argument pour V, on obtient par récurrence une variété différentiable close et 4-connexe V', donc une sphère topologique; on dira que M est χ - *équivalent* à V'.

$M-\overset{\circ}{D}_8$ est isomorphe au corps ansé $(D_8, f_1, \ldots\ldots, f_k, 4)$, où $k=b_4(M)$, construit plus haut à partir des k corps ansés $W_i=(D_8, f_i, 4)$, $1 \leq i \leq k$; chaque W_i est difféomorphe à une variété différentiable de dimension 8, $\overline{E}_{m,1}$ (voir chap. 1, 3.0), où $m(m+1)=0 \mod 56$ dont le bord est difféomorphe à S_7 [25c]. Il en résulte que M est obtenu à partir de la somme topologique de $\chi(D_8)=(D_8, f_1, \ldots\ldots, f_k, 4)$ et de D_8 en identifiant leurs bords $S_7 \# \ldots\ldots \# S_7$ et S_7 au moyen d'un difféomorphisme de S_7. Donc :

THEOREME 1. *Chaque variété différentiable M close de dimension 8 et 3-connexe est X-équivalente à une sphère topologique ou est obtenue à partir de la somme topologique de $X(D_8)=(D_8, f_1, \ldots\ldots, f_k, 4)$, où $k=b_4(M)$, et de D_8 en identifiant leurs bords $S_7 \# \ldots\ldots \# S_7$ et S_7 au moyen d'un difféomorphisme de S_7.*

D'une manière analogue pour les variétés de dimension 16, en utilisant [25c], on a :

THEOREME 1'. *Chaque variété différentiable M close de dimension 16 et 7-connexe qui n'est pas homéomorphe à S_{16}, est obtenue à partir de la somme topologique de $X(D_{16})=(D_{16}, f_1, \ldots\ldots, f_k, 8)$, où $k=b_8(M)$, et de D_{16} en identifiant leurs bords $S_{15} \# \ldots\ldots \# S_{15}$ et S_{15} au moyen d'un difféomorphisme de S_{15}.*

1. Sur certaines variétés de dimension 4k.

1.1. Soit W une π-variété différentiable compacte à bord et de dimension 4k telle que : 1) W soit $(2k-1)$-connexe, 2) l'indice $I(W)$ soit nul et 3) le bord ∂W soit une sphère d'homotopie. Alors $H_{2k}(W)$ est un groupe abélien libre d'après la dualité de Poincaré ; $\pi_{2k}(W)=H_{2k}(W)$ par l'isomorphisme de Hurewicz. Soit α un des éléments de base de $\pi_{2k}(W)$ et soit $f: S_{2k} \to W$ un plongement différentiable représentant α; ceci existe pour $k>2$ puisque W est simplement connexe [20 d]. Puisque W est parallélisable, la classe de Stiefel-Whitney w_{2k} de W est nulle; donc W est du type II, c'est-à-dire les éléments diagonaux de la forme quadratique de W sont pairs (Lemme 7, [20 d]). Puisque l'indice $I(W)$ est nul, on peut supposer que la classe d'homologie de $f(S_{2k})$ a une auto-intersection nulle (Lemme 7, [20 d]); il en résulte que l'espace fibré normal de

$f(S_{2k})$ est trivial. Soit T un voisinage tubulaire de $f(S_{2k})$; T est difféomorphe à $S_{2k}\times$ $\times D_{2k}$. Soit W' la variété différentiable obtenue à partir de la somme topologique de $W-$ $-\mathring{T}$ et de $D_{2k+1}\times S_{2k-1}$ en identifiant leurs bords; alors W' est $(2k-1)$-connexe et $\pi_{2k}(W') = \pi_{2k}(W)/Z\alpha$; en répétant cet argument pour W', on obtient par récurrence une variété différentiable $2k$-connexe W'', donc contractile. Donc :

THEOREME 2. *Soit W une variété différentiable de dimension $4k$ ayant pour bord ∂W une sphère d'homotopie telle que : 1) W soit $(2k-1)$-connexe, 2) W soit parallélisable et 3) l'indice $I(W)$ soit nul; alors W est χ-équivalent à une variété différentiable con- -tractile pour $k \geq 2$.*

REMARQUE. La condition 3) est indispensable pour la validité du théorème. En effet, Milnor a donné [20a] un exemple d'une variété différentiable W_o de dimension 12 et 5- -connexe telle que : 1) l'indice $I(W_o)$ soit 8, 2) le bord ∂W_o soit une sphère d'homo- -topie. D'après Smale [21c], le bord ∂W_o n'est pas difféomorphe à S_{11}. Sinon, la variété différentiable $\widetilde{W}_o$ obtenue à partir de la somme topologique de W_o et D_{12} en identifiant leurs bords au moyen d'un difféomorphisme de ∂W_o sur S_{11}, serait presque parallélisable puisque $\pi_5(SO_{12}) = 0$; donc [14d], l'indice $I(\widetilde{W}_o)$ de $\widetilde{W}_o$ est divisible par 32, d'où une contradiction.

1. 2. En particulier, soit M une variété différentiable close de dimension 12 et 5- -connexe; M est une π-variété; car la seule obstruction à l'existence d'un parallélisme sur M privé d'un point est un élément de $H^6(M;\pi_5(SO_{12}))=0$ car $\pi_5(SO_{12}) = 0$. D'au- -tre part, d'après la théorie de Smale [21a], si D_{12} est plongé dans M, alors $V =$ $M-\mathring{D}_{12}$ est un corps ansé, élément de $\mathcal{H}(12, b_6, 6)$. Soit $\partial\mathcal{H}(n)$ l'ensemble des variétés différentiables de la forme ∂V, où $\mathcal{H}(n) = \bigcup_k \mathcal{H}(n,k,r)$. On a:

LEMME. *L'ensemble des variétés différentiables closes de dimension 11 et 4-connexes coïncide avec l'ensemble $\partial\mathcal{H}(6)$.*

En effet, soit $W \in \mathcal{H}(6)$; puisque W est une π-variété, on peut [20d] tuer les groupes d'homotopie $\pi_i(W)$ pour $i \leq 5$ sans changer le bord ∂W. La suite exacte d'ho- -mologie de $(W, \partial W)$ montre que ∂W est 4-connexe. La réciproque résulte du fait que chaque variété différentiable V de dimension 11 et 4-connexe est le bord d'une π- -variété W' d'après Milnor [20a]; par chirurgie [20a], on déduit de W' une variété 5-connexe sans changer le bord.

Soit V' une variété différentiable de dimension 11 homéomorphe à la sphère S_{11}; d'après [20a], V' est le bord d'une variété parallélisable W' et l'indice $I(W')$ de W' est divisible par 8. Donc l'invariant $\lambda'(V')$ de V' est égale à $I(W')/2^8.31 \; mod\, 1$ et il existe au moins 992 structures différentiables inéquivalentes sur S_{11}. On a :

PROPOSITION. *Il existe au moins 992 structures différentiables inéquivalentes sur chaque variété close V de dimension 11 et 4-connexe.*

DEMONSTRATION. D'après le lemme, V est un élément de $\partial\mathcal{H}(6)$, c'est-à-dire $V = \partial W$, où W est une variété différentiable 5-connexe. Puisque W est parallélisable, on a : $p_i(W) = 0$ pour $i < 3$; donc, l'invariant $\mu(V)$ de Kuiper-Eells*, est égal à $I(W) / 2^8 . 31 \mod 1$. Puisque V est homéomorphe à $V' = V \# S_{11} \# \ldots \# S_{11}$, où la somme connexe de S_{11} est prise m fois, $1 \leq m \leq 992$, on a $\mu(V') = \mu(V) + m/992$ et il en résulte que V admet au moins 992 structures différentiables inéquivalentes.

1. 3. Soit M une variété différentiable simplement connexe et close de dimension $4k$ telle que $H_i(M) = Z$ pour $i = 0,\ 4r,\ 4(k-r),\ 4k\ (k/2 > r \geq 1)$ et $H_i(M) = 0$ pour les autres valeurs de i. D'après un théorème de Smale [21c], il existe une bonne fonction f sur M avec les *nombres types (nombres de points critiques d'indice i)* $m_i = 1$ pour $i = 0,\ 4r,\ 4(k-r),\ 4k$ et $m_i = 0$ pour les autres valeurs de i. D'après 7·2 de [21a], $X = f^{-1}[\,0,\ 4r + 1/2\,] = (D_{4k}, f_o, 4r) \in \mathcal{H}(4k, 1, 4r)$, $X' = f^{-1}[\,0, 4(k-r) + 1/2\,] = (X, f_1, 4(k-r))$ et si D_{4k} est plongé dans M, $M - \mathring{D}_{4k}$ est difféomorphe à X'. Soit $i_1 : D_{4r} \to D_{4k}$ une application telle que $i_1(\mathring{D}_{4r}) \subset \mathring{D}_{4k}$, $i_1(x) = f_o(x, 0)$ pour $x \in \partial D_{4r}$; soit $i_2 : D_{4r} \to D_{4r} \times D_{4r}$ l'application définie par $i_2(x) = (x, 0)$ pour $x \in D_{4r}$. On a une application $i : S_{4r} \to X \subset X'$ définie par i_1, i_2; supposons que i soit un plongement différentiable et soit T un voisinage tubulaire de S_{4r} dans X'; T est un espace fibré cellulaire sur S_{4r}. La suite exacte d'homotopie de $(SO_{4(k-r)}, S_{4(k-r)}, SO_{4(k-r)-1})$: $\pi_{4r-1}(SO_{4(k-r)-1}) \to \pi_{4r-1}(SO_{4(k-r)}) \to \pi_{4r}(S_{4(k-r)}) = 0$ montre que chaque application $g : S_{4r-1} \to SO_{4(k-r)}$ est homotope à une application $h : S_{4r-1} \to SO_{4(k-r)-1}$; donc ∂T est combinatoirement équivalent [20b] à S_{4k-1}. On a la suite exacte d'homologie relative pour $(X', T, X' - \mathring{T})$:

$$\ldots \to H_{i+1}(X') \to H_i(\partial T) \to H_i(T) + H_i(X' - \mathring{T}) \to \ldots ;$$

donc $\Psi_* : H_i(\partial T) \to H_i(X' - \mathring{T})$ est un isomorphisme pour $i \leq 4k$, où $\Psi : \partial T \to X' - \mathring{T}$ est l'inclusion. Puisque $X' - \mathring{T}$ est simplement connexe, ∂T est un rétracte par déformation

* $\mu(V)$ est défini pour une variété bord $V = \partial W$, où W est une variété de dimension $4k$ telle que : 1° la classe de Stiefel-Whitney w_2 de W est nulle; 2° l'homomorphisme $H^1(V; Z_2) \to H^1(W; Z_2)$ est un isomorphisme dans $H^1(W; Z_2)$; 3° les homomorphismes $H^{2k}(W, V; Q) \to H^{2k}(W; Q)$ et $H^{4i}(W, V; Q) \to H^{4i}(W; Q)$ .pour $o < i < k$, sont des isomorphismes; alors, par définition, $\mu(V) \equiv \mu(W, V) \mod 1$ où $\mu(W, V) = \langle \hat{A}_k(W), W \rangle / a_k$, où $a_k = 4/(3 + (-1)^k)$ et où $\hat{A}_k(W) = \hat{A}_k(p_1(W), \ldots p_k(W))$ est le $k^{ième}$ polynôme associé à $\sqrt{z}/2 / \sinh \sqrt{z}/2$ (p 14, [13]). $\mu(V)$ est indépendant de W et on a : $\mu(V \# V') = \mu(V) + \mu(V')$.

de $X' - \overset{\circ}{T}$; d'autre part, si $\Psi' : \partial X' \to X' - \overset{\circ}{T}$ est l'inclusion, $\partial X'$ a le même type d'homotopie que $X' - \overset{\circ}{T}$ et $\Psi'(\partial X')$ est homologue à $\Psi(\partial T)$ qui représente un générateur de $H_{4k-1}(X' - \overset{\circ}{T}; Z)$. Donc $\partial X'$ est un retracte par déformation et $\partial X'$ et ∂T sont h-cobordants; il en résulte [21a] que $\partial X'$ et ∂T sont difféomorphes, donc X' et T sont aussi difféomorphes puisque $X' - \overset{\circ}{T}$ est difféomorphe à $\partial X' \times I = \partial T \times I$. On a :

THEOREME 3. *Soit* M *une variété différentiable simplement connexe et close de dimension 4k telle que* $H_i(M_{4k}) = Z$, *pour* $i = 0,\ 4r,\ 4(k-r),\ 4k$ *et* $H_i(M_{4k}) = 0$ *pour les autres valeurs de* i; *alors* M *est obtenu par le recollement des bords de la somme topologique de* W *et de* D_{4k}, *où* W *est une variété de Milnor dont le bord est difféomorphe à* S_{4k-1}, *au moyen d'un difféomorphisme.*

Soit W la variété différentiable de dimension $4k$ construite par Milnor avec bord ∂W une sphère combinatoire telle que $H_i(W) = Z$ pour $i = 0,\ 4r\,(r \neq 0),\ 4(k-r),\ 4k$. Supposons que W soit une π-variété; considérons la variété combinatoire close $\tilde{M}$ obtenue à partir de la somme topologique de W et de D_{4k} par le recollement des bords ∂W et ∂D_{4k} au moyen d'un homéomorphisme semi-linéaire. Or les sphères topologiques ∂W de dimension $4k-1$ ne sont pas difféomorphes à la sphère S_{4k-1} pour $k \neq 3$, $2 \leq k \leq 14$ [20b]; il résulte alors du théorème 3 :

COROLLAIRE. *Les variétés combinatoires closes* $\tilde{M}$ *n'admettent aucune structure différentiable pour* $k \neq 3$ *et* $2 \leq k \leq 14$.

2. Sur certaines variétés de dimension 4k + 2.

2. 1. Soit $f_o : S_{2k} \to SO_{2k}\ (k > 1)$ une application différentiable telle que la classe d'homotopie $\bar{f}_o$ vérifie $i_* \bar{f}_o = \partial \alpha$, où $\alpha \in \pi_{2k+1}(S_{2k+1})$ est un générateur, où $\partial : \pi_{2k+1}(S_{2k+1}) \to \pi_{2k}(SO_{2k+1})$ est l'opérateur bord de la suite exacte d'homotopie de $(SO_{2k+1}, S_{2k+1}, SO_{2k})$ et où $i : SO_{2k} \to SO_{2k+1}$ est l'inclusion; puisque $i_* : \pi_{2k}(SO_{2k}) \to \pi_{2k}(SO_{2k+1})$ est surjective [24], chaque application $f : S_{2k} \to SO_{2k+1}$ est homotope à une application $f' : S_{2k} \to SO_{2k}$. Posons $f_1 = f_2 = i \circ f_o$; on a un difféomorphisme $h : S_{2k} \times S_{2k} \to S_{2k} \times S_{2k}$ définie par $(x, y) \to (x', y')$ où $y' = f_1(x).y$, $x = f_2(y').x'$. La construction de Milnor, voir chap. 1, donne une variété différentiable M_h homéomorphe à S_{4k+1}, même combinatoirement équivalente à S_{4k+1} puisque $f_1(S_{2k}) \subset SO_{2k} \subset SO_{2k+1}$ d'après le lemme 1 de [20b]. Soit W la variété différentiable obtenue par la construction de [20b] dont le bord est M_h; W est obtenu comme suit : soit T un voisinage tubulaire de la diagonale dans $S_{2k+1} \times S_{2k+1}$; T est un espace fibré cellulaire $(T, S_{2k+1}, D_{2k+1}, p)$* associé à l'espace fibré tangent à S_{2k+1}. W est obtenue par arrondissement des angles de l'espace quo-

*où $p : T \to S_{2k+1}$ est la projection.

-tient obtenu à partir de la somme topologique de T avec T en identifiant $p^{-1}(D'_{2k+1}) \approx D_{2k+1} \times \times D_{2k+1}$ avec $p^{-1}(D''_{2k+1}) \approx D_{2k+1} \times D_{2k+1}$ par $(x,y) \to (y,x)$, $x, y \in D_{2k+1}$ où D'_{2k+1} (resp. D''_{2k+1}) est une boule plongée dans S_{2k+1}. Il est facile de démontrer que $H_*(W;Z)$ est isomorphe à $H_*(S_{2k+1} \vee S_{2k+1})$; donc $H_{2k+1}(W;Z) = Z \oplus Z$.

2. 2. *Invariant d'Arf :* Soit W une variété différentiable de dimension $2n$, où n est impaire, ayant pour bord ∂W une sphère topologique; supposons que W soit $(n-1)$-con-nexe; alors $H_n(W)$ est un groupe abélien libre; en effet, $H_n(W)$ est isomorphe à $H_n(W,\partial W)$ et donc, par dualité de Poincaré, isomorphe à $H^n(W)$; il en résulte, d'après le théorème des coefficients universels, que $H^n(W)$ est abélien libre. On a $\pi_n(W) = H_n(W)$ d'après le théorème d'isomorphisme de Huréwicz; chaque élément $a \in \pi_n(W)$ peut se réaliser par un plongement $S_n \to W$ et deux plongements homotopes sont isotopes pour $n \geq 4$ d'après Whitney-Haefliger[12a]; donc, chaque plongement détermine un espace fibré normal bien défini et donc un élément d'homotopie de $\pi_{n-1}(SO_n)$; on a une application $\alpha : H_n(W) \to \to \pi_{n-1}(SO_n)$; on a $\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y) + xy(\partial i_n)$, où i_n est un générateur de $\pi_n(S_n)$, où xy est l'intersection de x et y et où $\partial : \pi_n(S_n) \to \pi_{n-1}(SO_n)$ est le bord de la suite exacte d'homotopie de (SO_{n+1}, S_n, SO_n) [14a]. On sait [2] que $\partial i_n = = [i_n, i_n] \neq 0$ si et seulement si $n \neq 1, 3, 7$, où [,] est le crochet de Whitehead. Puisque le bord ∂W est une sphère topologique, la forme bilinéaire $(x,y) \to xy$ de $H_n(W) \times \times H_n(W)$ dans Z est anti-symétrique et unimodulaire; donc, le rang est paire $r = 2s$. D'autre part on peut choisir une base symplectique de $H_n(W)$, c'est-à-dire, une base e_i, e'_i $(1 \leq i \leq s)$ tel que $e_i e_j = e'_i e'_j = 0$, $e_i e'_j = 0$ pour $i \neq j$ et $e_i e'_i = 1$. Si $n = 3, 5, 7$, mod8, $n \neq 3, 7$, on a $\pi_{n-1}(SO_n) = Z_2$; donc l'application α devient une applica--cation $\alpha_o : H_n(W) \to Z_2$ telle que $\alpha_o(x+y) = \alpha_o(x) + \alpha_o(y) + xy$; *l'invariant d'Arf* de W est défini par :

$$a(W) = \sum_{1}^{s} \alpha_o(e_i) . \alpha_o(e'_i) \qquad mod 2.$$

Soit W la variété différentiable construite dans 2.1 de dimension $4k+2$ où $k > 1$ et dont le bord ∂W est combinatoirement équivalent à S_{4k+1}; soit $\tilde{M}$ la variété combina--toire compacte close obtenue à partir de la somme topologique de W et d'une cellule e_{4k+2} en identifiant leurs bords ∂W et ∂e_{4k+2} au moyen d'un homéomorphisme semi--linéaire de ∂W sur ∂e_{4k+2}; $\tilde{M}$ est 2k-connexe et $\pi_{2k+1}(\tilde{M}) = Z \oplus Z$.

THEOREME 4. *L'invariant d'Arf $a(\tilde{M})$ de $\tilde{M}$ est égal à 1 pour $k > 1$ et $k \neq 3$.*

DEMONSTRATION. Soient $x, y \in H^{2k+1}(\tilde{M}; Z_2)$ les classes duales aux classes d'homo--logie u, v définies par des plongements différentiables de sphères $j_1, j_2 : S_{2k+1} \to \tilde{M}$, où j_1, j_2 sont les applications de S_{2k+1} (identifié à la diagonale de $S_{2k+1} \times \times S_{2k+1}$) dans W déduites par passages au quotient des injections de la diagona--le de $S_{2k+1} \times S_{2k+1}$ dans les deux exemplaires de T servant à construire W.

(x, y) est une base symplectique de $H^{2k+1}(\tilde{M}; Z_2)$, c'est-à-dire, $xx = yy = 0$, $xy = 1$. Les espaces fibrés normaux de $j_i(S_{2k+1})$, où $i = 1, 2$, dans W sont non-triviaux;en effet, ils sont isomorphes à l'espace fibré $\xi = (T, S_{2k+1}, D_{2k+2})$ (cf., 2.1)et l'espace de Thom associé à ξ admet une décomposition cellulaire $S_{2k+1} \cup_f e_{4k+2}$ + où la clas--se d'homotopie de l'application de recollement $S_{4k+1} \xrightarrow{f} S_{2k+1}$ est égale au crochet de Whitehead $[\alpha, \alpha]$; on sait que $[\alpha, \alpha] \neq 0$ pour $2k + 1 \neq 1, 3, 7$ ou $k > 1$ et $k \neq 3$.Soit $\beta \in H^{4k+2}(T_\xi)$ un générateur et soit $\nu \in H^{2k+1}(T_\xi)$ un générateur; il existeune application $g : \tilde{M} \to T_\xi$ telles que $g^*(\nu) = u'$ et $\langle g^*(\beta), T_\xi \rangle = 1$ où u'est la duale de u. Alors, l'application $f : \tilde{M} \to \Omega S_{2k+2}$ * où ΩS_{2k+2} est l'espace de lacets de S_{2k+2} ,est telle que $f^*(\nu) = u'$, $f^*(\beta) = 1$; on a donc $\alpha_0(x) = 1$; en appliquant le même raisonnement à v', la classe duale de v, on a $\alpha_0(y) = 1$; il en résulte que $a(\tilde{M}) = 1$.

2.3. Soit M une variété différentiable close de dimension $4k+2$, $k > 1$, telle que 1) M est $2k$-connexe, 2) $H_{2k+1}(M) = Z \oplus Z$; d'après Smale [21a], $V = M - \mathring{D}_{4k+2}$ est un corps ansé, élément $(D_{4k+2}, f_1, f_2, D_{2k+1})$ de $\mathcal{H}(4k+2, 2, 2k+1)$. ∂V est dif--féomorphe à S_{4k+1} et V a le même type d'homotopie que $S_{2k+1} \vee S_{2k+1}$ (espace déduit de la somme topologique $S_{2k+1} + S_{2k+1}$ par identification des deux points corres--pondant à un même point de base de S_{2k+1}). Soit $i_1 : D_{2k+1} \to D_{4k+2}$ uneapplication continue telle que $j_1(\mathring{D}_{2k+1}) \subset \mathring{D}_{4k+2}$, $j_1(x) = f_1(x, 0)$, $x \in \partial D_{2k+1}$ et soit $j_2 : D_{2k+1} \to D_{2k+1} \times D_{2k+1}$ une application définie par $j_2(u) = (u, 0)$; soit j : : $S_{2k+1} \to V$ l'application définie par j_1 (resp. j_2) sur le demi-sphère nord (resp. sud) de S_{2k+1}; on peut supposer que j est un plongement différentiable. Montrons que V est difféomorphe à une variété différentiable W comme construite dans 2.1; soit T un voi--sinage tubulaire fermé de $j(S_{2k+1})$; T est un espace fibré ξ de fibre D_{2k+1} sur $j(S_{2k+1})$. ξ détermine une application $f : S_{2k} \to SO_{2k+1}$ telle que $\partial \beta = \bar{f}$, où $\bar{f}$estla classe d'homotopie de f, $\partial : \pi_{2k+1}(S_{2k+1}) \to \pi_{2k}(SO_{2k+1})$ est l'opérateur bord de la suite exacte d'homotopie d'espace fibré $(SO_{2k+2}, S_{2k+1}, SO_{2k+1})$ et où β est un élé--ment de $\pi_{2k+1}(S_{2k+1})$. Puisque $i_* : \pi_{2k}(SO_{2k}) \to \pi_{2k}(SO_{2k+1})$, correspondantàl'in--clusion $i : SO_{2k} \to SO_{2k+1}$, est surjective[24], on a $\bar{f} = i_* \bar{f}_o$, où $\bar{f}_o$ est la classe d'ho--motopie d'une application $f_o : S_{2k} \to SO_{2k}$; donc ∂T est combinatoirement équivalen--te à S_{4k+1} et T est difféomorphe à une variété W de 2.1[20b]. Puisque $V - \mathring{T}$ est sim--plement connexe, l'inclusion $\Psi : \partial T \to V - \mathring{T}$ est un retracte par déformation. D'autrepart, si $\Psi' : \partial V \to V - \mathring{T}$ est l'inclusion, $\Psi'(\partial V)$ est homologue à $\Psi(\partial T)$ qui représenteun générateur de $H_{4k+1}(V - \mathring{T}; Z) = H_{4k+1}(\partial T; Z)$;donc Ψ' est une équivalence d'homo-

+ $S_{2k+1} \cup_f e_{4k+2}$ est l'espace obtenu de la somme topologique de $D_{4k+2} \times I$ et de S_{2k+1} par identification de $(x, 1)$ avec $f(x)$, $x \in S_{4k+1}$, où f est une application continue qui re--présente$[\alpha, \alpha]$.

* Rappelons que ΩS_{n+1} a le type d'homotopie d'un C.W. complexe infini $S_n \cup e^{2n} \cup e^{3n} \cup ..$ d'après James.

-topie. Donc ∂V et ∂T sont h-cobordantes et il en résulte, d'après Smale [21a], que ∂V et ∂T sont difféomorphes; puisque $V - \overset{\circ}{T}$ est difféomorphe à $\partial V \times I = \partial T \times I$, V est difféomorphe à T. Donc :

THEOREME 5. *Chaque variété différentiable close M de dimension $4k+2$, $(k > 1)$, telle que 1) M est $2k$-connexe, 2) $H_{2k+1}(M) = Z \oplus Z$ peut être obtenue à partir de la somme topologique d'une variété différentiable W avec bord $\partial W = S_{4k+1}$ et d'une boule D_{4k+2} par identification de ∂W et ∂D_{4k+2} au moyen d'un difféomorphisme de ∂W sur S_{4k+1}, où W est une variété de Milnor de dimension $4k+2$, $k > 1$, dont le bord ∂W est difféomorphe à S_{4k+1}.*

3. Structures différentiables sur S_{4k+1}.

Soit M une variété différentiable close de dimension $4k+1$ et $2k$-connexe; supposons que M soit une π-variété; par la construction de Thom [26a], on peut associer à M un élément $\alpha \in \pi_{n+4k+1}(S_n)$, où $n > 4k+1$. Cet élément α est représenté par une application $f : S_{n+4k+1} \to S_n$ comme suit : soit T un voisinage tubulaire de M dans R^{n+4k+1}; T est homéomorphe à $M \times \overset{\circ}{D}_n$. Donc on peut associer à tout point $u \in T$ sa projection y dans $\overset{\circ}{D}_n$. Soit $r : D_n \to S_n - \{ q \}$ l'homéomorphisme naturel; en considérant S_{n+4k+1} comme la compactification de R^{n+4k+1}, l'application $f : S_{n+4k+1} \to S_n$ est définie par :

$$f(u) = r(y), \quad u \in T.$$
$$f(x) = q \quad , \quad x \in S_{n+4k+1} - T$$

THEOREME 6. *Chaque élément $\alpha \in \pi_{n+4k+1}(S_n)$, où $n > 4k+1$, peut être obtenu par la construction de Thom à partir d'une variété différentiable qui a le type d'homotopie d'une sphère S_{4k+1} pour $k > 1$.*

DEMONSTRATION. Si $\alpha \in \pi_{n+4k+1}(S_n)$, on peut trouver une variété différentiable V, de dimension $4k+1$, plongée dans R^{n+4k+1} et munie d'un champ de repères normaux F_n; en supposant V m-connexe $(0 \leq m \leq 2k-1)$, on va montrer que l'on peut remplacer V par une variété $(m+1)$-connexe, donc, par récurrence sur m, par une sphère d'homotopie. Si $\lambda \in \pi_m(V)$ est représenté par un plongement :

$$g : S_m \times D_{l+1} \to V \ (m + l + 1 = 4k+1) \text{ pour } m \leq 2k-1$$

(c'est possible puisque V est une π-variété), alors la variété :

$$V' = (V - g(S_m \times D_{l+1})) + (D_{m+1} \times S_l)$$

et V sont cobordantes avec une variété différentiable W et g peut être choisi tel que

F_n puisse se prolonger à W [20a]; il en résulte qu'on peut modifier V par chirurgie en une variété différentiable V', $(m-1)$-connexe, avec $\pi_m(V') = \pi_m(V)/Z\lambda$. On peut finalement supposer que V est $(2k-1)$-connexe. Soit $\mu \in \pi_{2k}(V)$; si $k > 1$, il existe un plongement

$$b : S_{2k} \times D_{2k+1} \to V$$

tel que $b \mid S_{2k} \times 0$ représente μ; si μ est un élément libre, quitte à diviser μ, il existe une classe $\beta \in H_{2k+1}(V)$ dont l'intersection avec μ est 1; le cycle $b \mid x_o \times \partial D_{2k+1}$, $x_o \in S_{2k}$, est homologue à zéro dans $V - b(S_{2k} \times D_{2k+1})$, donc dans V'. On a encore $H_{2k}(V') = H_{2k}(V)/Z\mu$, et le rang de $H_{2k}(V')$ est strictement plus petit que celui de $H_{2k}(V)$ et la torsion reste la même. Si μ est un élément de la torsion, alors (cf Kervaire [14a], lemme 2.4) la classe d'homologie du cycle $b \mid x_o \times \partial D_{2k+1}$ est un élément d'ordre infini de $H_{2k}(V')$; en effet, on peut trouver par chirurgie, une variété différentiable V'' dont le rang de $H_{2k}(V'')$ est strictement plus petit que celui de $H_{2k}(V)$ et le sous-groupe de torsion est strictement plus petit; soit b_{2k}, b'_{2k} les nombres de Betti de dimension $2k$ de V et V' respectivement; on a $b'_{2k} - b_{2k} \leq 1$ et $b'_{2k} - b_{2k} = 1$ si et seulement si $b \mid x_o \times \partial D_{2k+1}$ représente dans V' un élément d'ordre infini; donc, il suffit de démontrer que $b'_{2k} + b_{2k} = 1 \bmod 2$. Si $E^*(V)$ est la semi-caractéristique de V, on a $E^*(V) + E^*(V') = E(W) + r \bmod 2$, r étant le rang de la forme définie sur $H_{2k+1}(W, \partial W; Q)$ par cup-produit; puisque $\langle u \cup u, W \rangle = 0$ pour tout $u \in H_{2k+1}(W, \partial W; Q)$, r est pair et puisque $E(W) = 1$ et $b_i = b'_i = 0$ pour $i \leq 2k-1$, on a $b'_{2k} + b_{2k} = 1 \bmod 2$ ce qu'il fallait démontrer.

REMARQUE. Ce théorème est essentiellement dû à Kervaire pour $k = 2$ (cf. lemme 2.4, [14a]).

Soit Θ_m l'ensemble des classes de b-cobordisme de variétés différentiables V dont le type d'homotopie est la sphère S_m; d'après [20a], Θ_m est un groupe abélien relativement à l'opération somme connexe $\#$. D'après Milnor [20a], Θ_m est fini pour m impair et $\neq 3$. Par le théorème précédent, on a un homomorphisme surjectif $T : \Theta_{4k+1} \to \pi_{n+4k+1}(S_n)$, où $n > 4k+1$; si l'élément α associé à une sphère d'homotopie V est nul, alors il existe une variété différentiable W de dimension $4k+2$ plongée dans R^{n+4k+2} et muni d'un champ de repères normaux ayant pour bord $\partial W = V$; W est une π-variété. Si $\Theta_m(\partial\pi)$ désigne le sous-groupe de Θ_m des classes V qui sont des bords de π-variétés, le noyau de T est isomorphe à $\Theta_{4k+1}(\partial\pi)$ et on a :

COROLLAIRE. *Pour $n > 4k+1$, on a $\Theta_{4k+1}/\Theta_{4k+1}(\partial\pi) \approx \pi_{n+4k+1}(S_n)$.*

CHAPITRE TROIS

SUR LES DEFORMATIONS DE STRUCTURES COMPLEXES

1.0. Soient Γ le pseudogroupe des automorphismes locaux analytiques complexes de l'es--pace numérique complexe C^n, B une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$ ou (analytique) complexe et Γ' le pseudogroupe des automorphismes locaux différentiables $\mathcal{C}^\infty$ (resp. ana--lytiques complexes) de B; soit $\tilde{\Gamma}$ le pseudogroupe engendré par les automorphismes lo--caux $g : (z,t) \to (h(z,t), \psi(t))$ de $C^n \times B$ tels que $\psi \in \Gamma'$ et $\varphi_t \in \Gamma$, où φ_t est l'ap--plication $z \to h(z,t), z \in C^n$, $t \in B$.

Soit E une variété différentiable (resp. analytique complexe) muni d'une structure feuilletée associée à $\tilde{\Gamma}$, c'est-à-dire définie [9d] par un atlas complet $\mathcal{Q}$ de $C^n \times B$ sur E compatible avec $\tilde{\Gamma}$; chaque feuille de cette structure est localement isomorphe à C^n et il existe une structure feuilletée différentiable sous-jacente. Supposons que E soit un es--pace fibré différentiable (resp. analytique complexe) localement trivial sur B de fibres connexes V_t et de projection $\pi : E \to B$. Il admet également une structure feuilletée diffé--rentiable sous-jacente.

DEFINITION. *Une famille différentiable de structures complexes est un espace fibré diffé--rentiable (E, π, B) dans lequel E est muni d'une structure feuilletée associée à $\tilde{\Gamma}$ dont la structure feuilletée différentiable sous-jacente est aussi sous-jacente à la structure fi--brée de E sur B.*

Dans une famille différentiable de structures complexes, chaque fibre V_t est munie d'une structure complexe qui varie différentiablement avec $t \in B$.

Soient V_o, V_1 deux variétés complexes; disons que V_o est une *déformation* de V_1 si V_o et V_1 sont les fibres d'une famille différentiable de structures complexes.

DEFINITION. *Une famille différentiable E est localement triviale au voisinage de la fibre V_{t_o} lorsque la structure feuilletée induite sur un voisinage $\pi^{-1}(U)$ de V_{t_o}, U étant un voisinage ouvert de t_o, est isomorphe à celle de l'espace produit $V_{t_o} \times U$, V_{t_o} étant mu--nie de sa structure complexe. On dira qu'une structure complexe sur V est localement ri--gide lorsque toute famille différentiable de structures complexes contenant une fibre isomorphe à V est localement triviale au voisinage d'une fibre quelconque.*

Une famille différentiable de structures complexes E est *localement triviale* si, pour chaque point t de B, la famille est triviale dans un voisinage de la fibre V_t. La fa-

-mille E est *triviale* si E est isomorphe à $V \times B$.

Dans la suite les fibres V_t de E sont supposées compactes et connexes.

Soient (E, π, B) une famille différentiable de structures complexes, V_t fibre de E et Θ_t le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes verticaux sur V_t; soit $H^p(V_t, \Theta_t)$ le groupe de cohomologie de dimension p de V_t à coefficients dans Θ_t; on a [16a] :

THEOREME. *Pour chaque point $t_o \in B$, il existe un voisinage U de t_o dans B telque $\dim H^p(V_t, \Theta_t) \leq \dim H^p(V_{t_o}, \Theta_{t_o})$ pour $t \in U$.*

Soit T_t l'espace tangent à t de B; un champ φ de vecteurs tangents à E défini sur V_t, $\varphi: V_t \to T_t \times \tau(V_t)$, est *holomorphe le long de* V_t si $\varphi(z) = (U_z, X_z)$ est tel que X_z soit un champ de vecteurs holomorphe sur V_t ; il est dit *projetable* si v_z est un vecteur de T_t indépendant de z. Un champ de vecteurs défini sur un voisinage U d'une fibre V_{t_o} et holomorphe le long des fibres est projetable s'il induit sur chaque fibre V_t, $t \in U$, un champ de vecteurs projetable.

Soient Π le faisceau des germes de champs de vecteurs localement projetables et holomorphes le long des fibres et Θ le faisceau des germes de champs des vecteurs ver-ticaux holomorphes le long des fibres; on a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \to \Theta \to \Pi \to \Lambda \to 0$$

où Λ est le faisceau quotient de Π par Θ; si Π_t et Λ_t sont les faisceaux induits par Π et Λ sur V_t, on a une suite exacte de cohomologie :

$$\ldots \to H^o(V_t, \Pi_t) \to H^o(V_t, \Lambda_t) \xrightarrow{\delta_t} H^1(V_t, \Theta_t) \to \ldots$$

Puisque V_t est connexe, on a un isomorphisme $i : T_t \to H^o(V_t, \Lambda_t)$; soit $\rho_t : T_t \to H^1(V_t, \Theta_t)$ l'application composée $\delta_t \circ i$. On a le théorème de Frölicher et Nijenhuis [10] :

THEOREME. *Si $H^1(V_{t_o}, \Theta_{t_o}) = 0$ pour un point $t_o \in B$, alors il existe un voisinage U de t_o dans B tel que les fibres V_t, $t \in U$, sont isomorphes.*

DEMONSTRATION. Puisque $H^1(V_{t_o}, \Theta_{t_o}) = 0$, il existe un voisinage U de t_o tel que $\dim H^1(V_t, \Theta_t) = 0$ pour $t \in U$. Si $\bar{H}^p(\Theta_u)$ est le faisceau défini par le pré-faisceau $U \to H^p(\pi^{-1}(U), \Theta)$, on a $\bar{H}^1(\Theta_u) = 0$; la suite exacte de cohomologie.

$$0 \to \bar{H}^o(\Theta_u) \to \bar{H}^o(\Pi_u) \to \bar{H}^o(\Lambda_u) \to \bar{H}^1(\Theta_u) \to \ldots$$

montre qu'il existe un champ transversal d'éléments de contact C de $\dim B$ sur $\pi^{-1}(U)$ holomorphe le long des fibres et le théorème résulte du lemme suivant (*cf* [9c]).

LEMME. *Tout chemin différentiable d'origine $t \in U$ et de but $t' \in U$ est la projection d'une courbe intégrale de C complexe analytique le long des fibres d'origine $x \in V_t$ et de but $x' \in V_{t'}$; l'application $x \to x'$ est un homéomorphisme complexe analytique de V_t sur $V_{t'}$.*

Il résulte alors du théorème 6.2 de [16a] :

COROLLAIRE. *Si, dans une famille différentiable (E, π, B) de structures complexes, $H^1(V_t, \Theta_t) = 0$ pour $t \in B$, alors la famille est localement triviale.*

1. 1. *Déformation d'une G-structure complexe :* Soit V une variété complexe à n dimension complexe; une G-structure complexe, où G est un sous-groupe de Lie de groupe linéaire complexe L'_n, est une réduction de groupe structural L'_n de l'espace fibré tangent complexe à G [9b]. Dans un voisinage d'un point de V une G-structure complexe est déterminée par $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, où les ω sont n formes complexes de Pfaff linéairement indépendantes, définissant une section locale de l'espace fibré principal $H'(V)$ des corepères complexes du 1er ordre de V; en un point de V, ω est un corepère distingué pour la G-structure complexe. L'espace $H'(V)$ est un sous-espace fibré de l'espace fibré principal $H(V)$ des corepères réels du 1er ordre de V. L'existence d'une G-structure complexe est équivalente à l'existence d'une section dans l'espace fibré associé $H'(V)/_G$ et les structures d'une même classe d'homotopie de sections sont isomorphes [9b].

Soit (E, π, U) une famille différentiable de structures complexes, les fibres étant des variétés complexes V_t sur un domaine U contenant l'origine dans R^m; la structure est définie par un atlas $\mathfrak{A}$ de $C^n \times U$ dans E. Soit f une carte locale appartenant à $\mathfrak{A}$, la source de f étant le produit $U_1 \times U_2$, où U_1 est un ouvert de C^n, U_2 un ouvert de U. Soit ξ un vecteur tangent à C^n au point $z \in U_1$ l'application $z \to f(z, t) = y$ fait correspondre à ξ un vecteur tangent $\tilde{f}(\xi, z, t)$ à V_t en y. Soit $\tilde{T}(E)$ l'espace des vecteurs tangents aux fibres V_t de E; les applications $\tilde{f}$ forment un atlas de $C^n \times (C^n \times U)$ sur $\tilde{T}(E)$ définissant sur $\tilde{T}(E)$ une structure d'espace fibré à fibre C^n, à groupe structural L'_n et de base E. Puisque E est difféomorphe au produit $V_o \times U$ où U est contractile en un point, $\tilde{T}(E)$ est isomorphe à l'espace fibré $\tau(V_o) \times U$, considéré comme espace fibré vectoriel complexe sur $V_o \times U$ d'après le corollaire du théorème 1 de [9d]. Donc :

THEOREME 1 : *Soit (E, π, B) une famille différentiable de structures complexes sur une variété différentiable B; alors, il existe pour chaque point de B un voisinage U tel que les espaces fibrés tangents complexes des fibres V_t, $t \in U$, sont isomorphes.*

Supposons que, de plus, une fibre V_{t_o}, $t_o \in B$, soit munie d'une G-structure complexe ; puisque les G- structures complexes sont en correspondance biunivoque avec les sections de l'espace fibré $H'(V_{t_o})/G$, on a :

COROLLAIRE. *Si, dansune famille différentiable de structures complexes* (E, π, B), *une fibre* $V_{t_o} = \pi^{-1}(t_o)$, $t_o \in B$, *admet une* G*-structure complexe, alors il existe un voisinage* U *de* t_o *tel que les fibres* V_t, $t \in U$, *admettent une* G*-structure complexe.*

2. Familles différentiables de structures riemanniennes.

Soit (E, B, V) un espace fibré différentiable de fibres isomorphes à V. L'espace $\tilde{T}'(E)$ des vecteurs tangents aux fibres de E est un espace fibré vectoriel de base E et de groupe structural L_n, où n est la dimension de V. Une restriction du groupe structural à O_n définit une métrique riemanienne le long des fibres. On l'obtient par une section de l'espace fibré associé à $\tilde{T}'(E)$ à fibres isomorphes à L_n/O_n ; si cette section est différentiable, on a une métrique riemannienne différentiable le long des fibres ou une *famille différentiable de structures riemanniennes.*

Si de plus on se donne une famille d'isomorphismes d'une fibre fixe V sur les autres fibres définissant sur (E, B, V) une structure d'espace fibré différentiable à groupe structural G formé d'isomorphismes de V, admettant la structure d'espace fibré différentiable donné comme structure sous-jacente, alors (E, B, V) est muni d'une *structure d'espace fibré riemannien.* On a : *

THEOREME 2. *Soit* (E, I, V) *un espace fibré différentiable muni d'une métrique riemannienne, deux fois différentiables, le long des fibres, la base* I *étant l'intervalle* $0 \leq t \leq 1$. *Supposons que sur chaque fibre la métrique riemannienne soit complète. Si le sous-espace fibré* E' *de* E *au-desuus de l'intervalle semi-ouvert* $0 < t \leq 1$ *est un espacefibré riemannien ayant pour groupe structural le groupe* G *de tous les isomorphismes de* V_1 *supposé transitif dans* V_1, *alors* V_o *est isomorphe à* V_1 *et* E *est aussi un espace fibré riemannien à groupe structural* G.

DEMONSTRATION. Considérons un relèvement différentiable $t \to x_t$ de l'intervalle $[0, 1]$ dans E. L'espace fibré principal H' associé à E' est l'espace des isomorphismes de la fibre V_1 sur les fibres V_t pour $0 < t \leq 1$. Soit G_1 le sous-groupe d'isotropie de V_1 au point x_1; l'espace fibré E' s'identifie à l'espace fibré quotient H'/G_1 et H' est un espace fibré principal de base H'/G_1; le chemin (x_t) pour $0 < t \leq 1$ se relève en un chemin (h_t) de H'. Soit r_1 un repère orthonormé dans l'espace tangent $T_{x_1}(V_1)$ à x_1 de V_1; il lui correspond un repère orthonormé $h_t(r_1) = r_t$ au point x_t. Par suite de la compacité de l'ensemble des repères orthonormés des fibres attachés aux points d'un voisinage compact de x_o dans E, la fonction continue $t \to r_t$ admet une valeur d'adhérence suivant

* Je dois l'idée de cette démonstration à M. Ehresmann.

le filtre des voisinages de 0. On peut trouver une suite de valeurs t_n de t tendant vers 0 telle que r_{t_n} tende vers un repère r_o. Soit l_t l'application linéaire de l'espace tangent $T_{x_1}(V_1)$ à x_1 de V_1 sur l'espace tangent $T_{x_t}(V_t)$ à x_t de V_t qui applique r_1 sur r_t; soit u un vecteur unitaire tangent à V_1 d'origine x_1 et soit y l'extrémité de l'arc de géo--désique d'origine x_1 tangent à u et de longueur s; on a $y = \psi(s, u)$, où ψ est une fonc--tion différentiable de (s, u). Soit y_t l'extrémité de l'arc de géodésique dans V_t d'origi--ne x_t, tangent au vecteur $l_t(u)$ et de longueur s; on a $y_t = \psi(s, u, t)$, où $\psi(s, u, 1) = \psi(s, u)$ et ψ est une fonction différentiable de (s, u, t). Pour $t > 0$, on a $y_t = h_t(y)$; lorsque t_n tend vers 0, $h_{t_n}(u)$ tend vers un vecteur $h_o(u)$ et $h_{t_n}(y)$ tend vers un point $h_o(y) = \psi(s, u, 0)$. Si y est l'extrémité de deux arcs géodésiques, c'est-à-dire, $y = \psi(s, u) = \psi(s', u')$, alors $h_t(y) = \psi(s, u, t) = \psi(s', u', t)$ pour $t > 0$; il en résulte que $\psi(s, u, 0) = \psi(s', u', 0)$. On définit ainsi une application différentiable h_o de V_1 dans V_o. Puisque V_o est complète, h_o est surjective. E étant isomorphe à $V_o \times I$ il existe une ap--plication différentiable de E sur V_o qui se réduit sur V_t à un homéomorphisme différen--tiable de V_t sur V_o et appliquant la métrique riemannienne de V_t sur une métrique rie--mannienne $(ds^2)_t$ de V_o, fonction différentiable de t. Montrons que h_o est bijective: soient y, z deux points distincts de V_1 et montrons que $h_o(y) \neq h_o(z)$; comme h_t est un isomorphisme des structures riemanniennes de V_1 sur V_t, la distance de $h_t(y)$ à $h_t(z)$ dans la métrique $(ds^2)_t$ est une constante d et égale à celle de y à z dans V_1. Soit $d_t(\xi, \eta)$ la distance de deux points ξ et η de V_o pour $(ds^2)_t$; supposons que $h_o(y) = h_o(z)$; on a :

$$d = d_t(h_t(y), h_t(z)) < d_t(h_o(y), h_t(y)) + d_t(h_o(z), h_t(z));$$

$h_t(y)$ et $h_t(z)$ tendent vers $h_o(y)$ lorsque t tend vers 0 et les distances $d_t(h_o(y), h_t(y))$ et $d_t(h_o(z), h_t(z))$ tendent vers 0. Donc $d = 0$, ce qui est contraire à l'hypo--thèse. Montrons que h_o est un isomorphisme. Soit U_1 un voisinage normal géodésique de x_1 dans V_1; pour chaque $y \in U_1$, il existe une seule géodésique d'origine x_1 et d'ex--trémité y; l'application h_o fait correspondre à tout arc géodésique d'origine x_1 un arc géodésique d'origine x_o et à un système de coordonnées normales dans U_1 un système de coordonnées normales dans un voisinage U_o de x_o dans V_o. Donc la restriction de h_o à U_1 est un isomorphisme. Puisque l'arc de géodésique d'origine x_1 et d'extrémité $y = \psi(a, u)$ est compact, il existe un nombre positif ϵ tel qu'il existe un système de coor--données géodésiques de centre $y = \psi(s, u)$ dans V_1 et de centre $\psi(s, u, 0) = h_o(y)$ de rayon ϵ pour $0 < s < a$. Si h_o est un isomorphisme local au voisinage de y dans V_1, la restriction de h_o à une boule de centre y et de rayon $< \epsilon$ est un isomorphisme. En ef--fet, soit r'_1 un repère orthonormé d'origine y dans V_1 et soit $h_o(r'_1)$ le repère corres-

-pondant dans V_o; par les arcs de géodésiques correspondants d'origine y et $h_o(y)$, on établit comme précédemment une application différentiable h'_o de V_1 sur V_o et on voit que $h'_o = h_o$. Soit s_1 la borne supérieure des valeurs s tel que h_o soit un isomorphisme local d'un voisinage de $\psi(s,u)$ de V_1 dans V_o; alors, on peut trouver un s' tel qu'il existe une boule géodésique de centre $\psi(s',u)$ qui contienne $\psi(s_1,u)$; en répétant l'argument précédant, on montre que h_o est un isomorphisme local dans un voisinage de $\psi(s_1,u)$, d'où une contradiction. Donc h_o est un isomorphisme local au voisinage de chaque point et comme h_o est bijectif et surjectif, il en résulte que h_o est un isomor-phisme.

Montrons que E est un espace fibré riemannien sur I. Soit R l'ensemble des repères orthonormés des fibres V_t aux points x_t, pour $0 \leq t \leq 1$. Soit G'_1 le groupe liné-aire d'isotropie. R est un espace fibré principal (trivial) sur I, à groupe structural O_n; on identifie r avec l'isomorphisme linéaire r' qui applique le repère r_1 sur r. $R/_{G'_1}$, l'espace des classes de repères $h'_t G'_1$, est un espace fibré trivial sur I de fibres isomor-phes à O_n/G'_1. Soit R' le sous-espace de R formé par la réunion des classes $h'_t G'_1$, h'_t étant l'isomorphisme linéaire correspondant à h_t, pour $0 \leq t \leq 1$. On montre que R' se déduit de R par restriction du groupe structural O_n à G'_1, c'est-à-dire que R' se projette dans $R/_{G'_1}$ sur une courbe qui est un relèvement de I dans $R/_{G'_1}$. En effet, l'appli-cation $t \to h'_t G'_1$, pour $0 \leq t \leq 1$, est un relèvement de l'intervalle semi-ouvert $0 < t \leq$ ≤ 1 dans $R/_{G'_1}$. De plus, comme h'_o est adhérent à l'ensemble des repères h'_t, le point $h'_o G'_1$ de $R/_{G'_1}$ est adhérent à l'ensemble des points $h'_t G'_1$. L'ensemble réunion H' des classes d'isomorphismes $h_t G_1$ forme alors un espace fibré isomorphe à R'. Cet espace fibré H' définit sur (E, I, V) une structure d'espace fibré riemannien. On en déduit que l'ensemble H des isomorphismes de V_1 sur V_t, pour $0 \leq t \leq 1$, est aussi un espace fi-bré principal à groupe structural G.

THEOREME 3. *Soit (E, I, V) un espace fibré différentiable de fibres compactes V_t sur l'intervalle I muni d'une métrique riemannienne, deux fois différentiable, le long des fibres et tel que le sous-espace fibré E' de E sur $0 < t \leq 1$ soit un espace fibré rieman-nien ayant pour groupe structural le groupe de toutes les isométries de V_1; alors V_o est est isomorphe à V_1.*

DEMONSTRATION. Puisque V_1 est compacte, son groupe des isométries est un groupe de Lie compact; soit $t \to \dot{h}_t$ un relèvement de $0 < t \leq 1$ dans l'espace fibré H' associé à E', où h_t est un isomorphisme de V_1 sur V_t. Soit r_t le repère orthonormé de V_t trans-formé par h_t d'un repère orthonormé r_1 de V_1. Puisque V_o est compact, la fonction continue $t \to r_t$ admet une valeur d'adhérence r_o suivant le filtre des voisinages de O.

Comme dans le théorème 2, on définit une application différentiable h_o de V_1 dans V_o et le même raisonnement montre que V_1 est isomorphe à V_o.

3. Déformation de variétés hermitiennes symétriques.

3.1. On sait que, d'après les beaux travaux de E. Cartan [8], les espaces hermitiens symétriques irréductibles sont tous simplement connexes et il y a deux classes des espaces $\mathcal{C}$ et $\mathfrak{D}$:

1) Les espaces de la classe $\mathcal{C}$ sont compacts; ce sont les quotients :

$SU_{m+n}/SU_m \times SU_n \times T^1$, SO_{2n}/U_n, SP_n/U_n, $SO_{n+2}/SO_n \times T^1 (n > 2)$, $E_6/SP_{10} \times T^1$, $E_7/E_6 \times T^1$,

où SU_n est le groupe unitaire unimodulaire à n variables, SP_n le groupe symplectique à $2n$ variables, E_6 et E_7 les groupes simples exceptionnels de dimension 27 et 56 .

2) Les espaces de la classe $\mathfrak{D}$ sont non compacts et ils sont isomorphes aux domaines bornés symétriques.

THEOREME 4. *Toute structure complexe homogène compatible avec la structure différentiable usuelle sur un espace de la classe $\mathcal{C}$ est isomorphe à la structure complexe naturelle ou à sa conjuguée.*

DEMONSTRATION. Soit V un espace de la classe $\mathcal{C}$; soit K son groupe d'automorphismes qui est un groupe de Lie simple et soit L son groupe d'isotropie à un point. Soit S une structure complexe homogène sur V, c'est-à-dire $V = G/H$, G étant un groupe de Lie complexe. Puisque V est simplement connexe et la caractéristique d'Euler-Poincaré $E(V) \neq 0$, il existe un sous-groupe compact maximal K' de G qui opère transitivement sur V. Puisque le nombre de Betti de V pour la dimension 2 est égal à 1, K' est simple et $V = K'/L'$, où $L' = H \cap K'$, est hermitien symétrique irréductible.

D'après le calcul des nombres de Betti des espaces simplement connexes dela classe $\mathcal{C}$ en fonction de K et L [9a], K est isomorphe à K' par un isomorphisme qui applique L sur L'. De cet isomorphisme de K sur K' on déduit un isomorphisme dela structure complexe naturelle sur la structure S. Il suffit de démontrer que V admet une seule structure invariante par le groupe K. Puisque V est irréductible le centralisateur N du groupe linéaire d'isotropie est une algèbre sans diviseur sur les réels; donc d'après Frobenius, N est isomorphe au corps des nombres réels R, des nombres complexes C ou des quaternions H. N n'est pas isomorphe à R; démontrons que $N = C$; si $N = H$ on a une structure presque quaternionnienne homogène sur V, c'est-à-dire il existe [9b] une 2-forme différentielle complexe Ω invariante de rang maximal en tout point;puisque V est symétrique, Ω est fermée. Localement Ω s'écrit $dz_1\, dz_2 + \ldots + dz_{p-1} dz_p$. On a

$\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$ où Ω_1 et Ω_2 sont deux formes quadratiques extérieures réelles fermées non proportionnelles. Donc le nombre de Betti de dimension *2* serait supérieur à *1*, or il est égal à *1*, d'où contradiction. La valeur I_x du tenseur I définissant la structure pres- -que complexe est donc un des deux éléments du centralisateur dont le carré est égal à -1.

COROLLAIRE. *Les espaces de classe $\mathcal{C}$ admettent une seule métrique kählerienne homogène, à un facteur constant près.*

REMARQUE. En effet, d'après les travaux de Wang [27] on a le résultat suivant : *une variété complexe compacte, homogène et simplement connexe V' ayant b_2 égal à 1 est un espace hermitien symétrique irréductible V;* puisque $b_2 = 1$, la caractéristique d'Euler-Poincaré $E(V') \neq 0$ [27]; donc, il existe un sous-groupe compact maximal K' du groupe des automorphismes de V' qui opère transitivement sur V'. On a $V' = K'/L'$, où K' est semi-simple et puisque $b_2 = 1$, K' est simple et L' est le centralisateur d'un tore dans K' [27]; il en résulte que V' est un espace hermitien symétrique irréductible *Signalons que l'on ne connait pas d'exemple d'une variété complexe V' ayant le type d'homotopie d'un espace hermitien symétrique irréductible V mais non isomorphe à V.*

3. 2. Soit (E, π, B) une famille différentiable de structures complexes; si une fibre V_{t_o}, $t_o \in B$, est un espace de la classe $\mathcal{C}$, on a $H^1(V_{t_o}, \Theta_{t_o}) = 0$; donc $H^1(V_t, \Theta_t) = 0$ dans un voisinage de t_o et la famille est localement rigide [5].

PROPOSITION. *Soit (E, π, I) une famille différentiable de structures complexes sur l'intervalle I dans laquelle chaque fibre V_t est un espace de la classe $\mathcal{C}$ pour $t > 0$; si la métrique kählerienne le long des fibres définies pour $t > 0$ admet un prolongement différentiable hermitien à $t = 0$, alors V_o est isomorphe à V_t et la famille est triviale.*

DEMONSTRATION. On a $dim_c H^o(V_t, \Theta_t) = dim_r I(V_t) = k$* pour $t > 0$, où $I(V_t)$ est le plus grand groupe d'isométries de V_t; donc on a $dim_c H^o(V_o, \Theta_o) \geq k$. La diffé- -rentielle covariante $D_t \Omega_t$, $t \in I$, est une fonction continue de t, où Ω_t est la forme de Kähler associée à la métrique de V_t; donc $D_o \Omega_o$ est nulle et V_o est kählerienne. D'autre part, d'après le théorème 2, le groupe $I(V_o)$ opère transitivement sur V_o; puis- -que V_o est Kähler-Einsteinne, le groupe des automorphismes analytiques de V_o con- -tient le groupe $I(V_o)$; donc V_o est homogène complexe et d'après le théorème 4, V_o est un espace de la classe $\mathcal{C}$. Il en résulte [5] que $H^1(V_o, \Theta_o) = 0$ et la famille est triviale.

*$\dim_c$ (resp. $\dim_r$) désigne la dimension complexe (resp. réel)

THEOREME 5. *Toute variété kählerienne compacte V_o dont la structure complexe est une déformation différentiable de la structure complexe d'un espace hermitien symétrique compact et irréductible V_1 est isomorphe à V_1.*

DEMONSTRATION. Supposons que V_o et V_1 soient les fibres d'une famille différen--tiable (E, π, I) de structures complexes; puisque la famille est localement rigide, on peut supposer que les fibres V_t sont des espaces de la classe $\mathcal{C}$ pour $t > 0$. Pour démontrer le théorème, il suffit de démontrer que la famille (E, π, I) est kählerienne; en effet, d'après [17b], il existe un prolongement de la métrique kählerienne de V_o dans un voisinage de O; en utilisant le fait qu'il existe (d'après Chow) une seule métrique kählerienne (une métrique de Hodge) sous-jacente à la structure complexe canonique de V_1, on peut appliquer la proposition précédente.

3. 3. Soit D un domaine borné symétrique irréductible *(un domaine de Cartan)* de C^n, $n > 1$; soit H un sous-groupe discontinu du groupe des automorphismes de D tel que :

1) le quotient $V = D/_H$ soit compact.
2) l'identité soit le seul élément de H ayant des points fixes dans D.

Soit Θ le faisceau des germes des champs holomorphes sur V; d'après Calabi et Vesentini [7], on a $H^1(V, \Theta) = 0$ pour $n > 1$. Donc la structure complexe de V est localement rigide. On a :

THEOREME 6. *Soit (E, π, I) une famille différentiable de structures complexes uni--formisables par un domaine de Cartan D pour $t > 0$. Si la famille est kählerienne, alors V_o est aussi uniformisable par D et la famille (E, π, I) est triviale.*

DEMONSTRATION. Soit $(\tilde{E}, \varphi)$ le revêtement universel de E; chaque $\tilde{V}_t = \varphi^{-1}(V_t) = \varphi^{-1}\pi^{-1}(t)$ est le revêtement universel de V_t. On a une métrique Kählerienne le long des fibres $\tilde{V}_t$ de $\tilde{E}$. Puisque V_t est compact, $\tilde{V}_t$ est complète; donc le groupe d'iso--métries $I(\tilde{V}_o)$ de $\tilde{V}_o$ est transitif d'après le théorème 2. Puisque $\tilde{V}_o$ est kähler-Eins--tein, le groupe $I(\tilde{V}_o)$ est contenu dans le groupe des automorphismes analytiques $A(\tilde{V}_o)$ de $\tilde{V}_o$; donc $\tilde{V}_o$ est homogène complexe. V_o étant compact, $A(\tilde{V}_o)$ est unimodulaire d'après le lemme* suivant. Il en résulte [11] que $\tilde{V}_o$ est symétrique; donc $\tilde{V}_o$ est iso--morphe à un domaine borné symétrique. Puisque $\tilde{V}_o$ est symétrique, on a $H^1(V_o, \Theta_o) = 0$ [7]; il en résulte que V_o est isomorphe à V_t et la famille est triviale.

LEMME. *Soit G un groupe localement compact et H un sous-groupe discret tel que $G/_H$ admette un volume fini; alors G est unimodulaire.*

En effet, d'après le résultat sur la mesure de Haar sur $G/_H$, on a $\Delta_G(g) =$

* Je dois l'idée de cette démonstration à M. Saito.

$= \chi(g)\Delta_H(g)$, $g \in H$, où χ est un caractère de G et où $\Delta_G(g)$ (*resp.* $\Delta_H(g)$) est une fonction continue de g; puisque H est unimodulaire, on a $\Delta_H(g) = 1$. Soit $\mu(V)$ le volume de $V = G/_H$; on a $\mu(V) = \mu(gV) = \chi(g)\mu(V)$ pour $g \in H$. Donc $\chi(g) = 1$ et G est unimodulaire.

4. Déformations de surfaces analytiques complexes.

Soit (E, π, B) une famille différentiable de surfaces analytiques complexes sur B dans laquelle une fibre V_{t_o} est une surface kählerienne compacte ayant $c_1^2(V_{t_o}) > 0$, où $c_1^2(V_t)$ est la valeur de $c_1^2 = c_1 \cup c_1$ sur le cycle fondamental de V_t, c_1 étant la classe de Chern de V_t; on sait [15b] que V_{t_o} est alors une surface algébrique. Puisque V_{t_o} est kählerien, il existe, d'après [17a], un voisinage U de t_o tel que chaque fibre V_t, $t \in U$, soit kählerienne; puisque $c_1^2(V_{t_o}) = c_1^2(V_t)$ en vertu du théorème 1, V_t est algébrique.

THEOREME 7. *Chaque déformation d'une surface kählerienne compacte V telle que $c_1^2(V) > 0$ est algèbrique.*

DEMONSTRATION. Il suffit de démontrer le théorème pour une famille (E, π, I) où I est l'intervalle $0 \leq t \leq 1$; d'après ce qui précède, on peut supposer que V_t est une surface kählerienne compacte ayant $c_1^2(V_t) > 0$ pour $t > 0$. Montrons que V_o est algébrique. Soit $M(V_o)$ le corps des fonctions méromorphes sur V_o; on sait [15b] que $dim.\, M(V_o) \leq 2$. Si $dim.\, M(V_o) = 0$, alors $p_g = 0$ ou 1, où p_g est le genre géométrique de V_o [15c]; supposons que $p_g = 1$; puisque $c_1^2(V_o) > 0$, on a $dim.\, M(V_o) \geq 1$ d'après le théorème de Riemann-Roch [15b], d'où une contradiction. Donc on a $p_g = 0$. Soit K_t l' espace fibré canonique de V_t de fibre C, la droite complexe, et soit $c \in H^2(V_t, Z)$ sa classe caractéristique. Soit U un voisinage de 0; puisque $p_g = dim\, H^2(V_o, \Omega_o) = 0$, et que V_t est algébrique, il existe un diviseur D_t associé à K_t; soit C_t une courbe contenue dans D_t telle que $(C_t^2) > 0$ et soit F_t l'espace fibré en droites complexes associé à C_t. D'après la proposition 13.2 de [17a] , il existe un espace fibré $\mathcal{H} \in H^1(\pi^{-1}(U), O^*)$, où O^* est le faisceau multiplicatif des germes de fonctions différentiables sur $\pi^{-1}(U)$ qui sont holomorphes le long des fibres, tel que $\delta^*(\mathcal{H}) = c$ et $\mathcal{H}_t = F_t$ pour $t \in U$. On a $dim\, H^o(V_o, \Omega(F_o)) \geq dim\, H^o(V_t, \Omega(F_t))$, où $\Omega(F_t)$ est le faisceau des germes de sections holomorphes de F_t. Donc, le système linéaire complet $|F_o|$ contient un diviseur $D > 0$; soit $D = \Sigma m_i C_i$, C_i étant les courbes irréductibles sur V_o. Puisque la classe d'homologie de D est duale à c, l'une des courbes, soit C_1, n'est pas homologue à zéro; donc on a $(C_1^2) > 0$ et V_o est algébrique [15c], d'où encore une contradiction. Donc $dim\, M(V_o) \geq 1$; si $dim\, M(V_o) = 1$, on aura [15b] $c_1^2(V_o) \leq 0$ ce qui est impossible. Il en résulte que $dim\, M(V_o) = 2$ et V_o est algébrique [15b].

4.2. Dans le produit cartésien $P_2(C) \times P_1(C)$ du plan projectif (x_o, x_1, x_2) par la droite projective (y_1, y_2), considérons les surfaces algébriques Σ_n définies par $x_1 y_1^n - x_2 y_2^n = 0$, $n \geq 0$; Hirzebruch a montré qu'elles sont homéomorphes à $S_2 \times S_2$ ou à la somme connexe de $P_2(C)$ avec lui-même et pour deux valeurs différentes de n elles sont analytiquement inéquivalentes. Σ_n est appelé une *surface de Hirzebruch*; Σ_o est la quadrique complexe.

Soit E une famille différentiable de surfaces complexes compactes V_t sur $I = [0, 1]$; dans laquelle une fibre V_1 est une quadrique complexe $S_2 \times S_2$; puisque $H^1(V_1, \Theta_1) = 0$, la famille est localement rigide. Donc, on peut supposer que V_t est une quadrique complexe pour $t > 0$; puisque $c_1^2(V_t) > 0$, V_o est une surface algébrique d'après le théorème 7. D'autre part, on peut supposer que E est une famille kählerienne [17 b]; donc la variété Riemannienne V_o est isomorphe à V_1 d'après le théorème 3; V_1 étant une variété kähler-einsteinienne, V_o est einsteinienne donc la courbure de Ricci de V_o est positive. En vertu du théorème d'annulation de Kodaira, on a $H^i(V_o, \Omega^o(iK)) = 0$, $i \neq n$, où iK est la somme de i exemplaires de l'espace fibré canonique K de V_o [15 c]; donc, on a $p_g = 0$ et le genre $P_2 = \dim H^2(V_o, \Omega^o(2K)) = 0$. V_o étant simplement connexe, V_o est rationnelle d'après la critère de Castelnuova-Enriques; il en résulte, d'après Andréotti [3], que V_o est une surface de Hirzebruch. Donc :

THEOREME 8. *Une déformation d'une quadrique complexe est une quadrique complexe ou une surface de Hirzebruch.*

REMARQUE. Puisque $c_1^2 > 0$ pour le plan projectif, une déformation d'un plan projectif est une surface algébrique V; d'après le théorème 5, V est isomorphe à $P_2(C)$ comme il a été montré par Kodaira et Spencer [17 a].

5. Sur les variétés kähleriennes homogènes à courbure positive.

5.1. Soit V une variété kählerienne homogène à courbure de Riemann strictement positive; alors V est compacte et la courbure de Ricci est positive; soit G le groupe des automorphismes de V; si G admet un centre non discret, l'espace homogène $V = G/H$ admet une partie localement unitaire [18]; alors la courbure de Riemann ne serait pas strictement positive, d'où une contradiction. G étant compact, G est donc semi-simple. Montrons que G est simple; sinon G/H est isomorphe au produit des espaces riemanniens K_i/L_i avec K_i simple; alors la courbure de Riemann ne serait pas strictement positive. Donc G est simple et H admet un centre non discret [18]; il en résulte que V est un espace hermitien symétrique irréductible. D'après la classification de E. Cartan on voit que le seul espace hermitien symétrique à courbure strictement positive est l'espace projectif complexe $P_n(C)$. Donc :

THEOREME 8. *Chaque variété kählerienne homogène à courbure de Riemann strictement positive est isomorphe à l'espace projectif complexe.*

Si $V = G/H$ est une variété kählerienne homogène dont la courbure de Ricci est strictement positive, alors G est semi-simple. D'autre part, V est simplement connexe et la caractéristique d'Euler-poincaré est positive. Donc V est rationnelle d'après Goto. *On peut conjecturer que toute variété kählerienne compacte V à courbure de Ricci stric-tement positive est rationnelle.* On sait [15a] que V est algébrique; si $\dim V = 2$, alors V est rationnelle d'après 4.2.

5. 2. Soit V' une variété kählerienne difféomorphe à un espace hermitien symétrique compact et irréductible V; on a $b_2(V') = \sum_{p,q} h^{p,q} = 1$, donc $h^{p,q} = 0$ pour $p \neq 1$, $q \neq 1$; d'après [15a] V' est algébrique. Soit $g \in H^2(V'; Z)$ un générateur tel que la classe fondamentale de V', pour sa métrique kählerienne, coïncide avec g; on a $\langle g^n, V' \rangle = 1$. Puisque V' est algébrique, le genre arithmétique $\chi_a(V')$ est égal à 1. D'autre part, les classes de Pontrjagin sont les images réciproques par un difféomorphisme des classes de V et la classe de Chern $c_1(V')$ est égale à λg, $\lambda \in Z$; la classe totale de Pontrjagin est donnée par $p = \sum_o^\infty p_k = (1+g^2)^\mu$, où μ est donné par $c_1(V) = \mu g$. On sait [4] que μ est égal à $m+n$, $2n-2$, $n+1$, n, 12 ou 18 pour les espaces de la classe $\mathcal{C}$ rangés dans l'ordre indiqué plus haut. Si $\dim V'$ est impair, la classe de Stiefel-Whitney w_2 de V' est nulle; alors $\beta c_1(V') = 0$, où $\beta : H^2(V'; Z) \to H^2(V'; Z_2)$ est l'homomorphisme de Bockstein, de même $\beta c_1(V) = 0$; donc $\lambda = \mu \bmod 2$. Soit $c_1(V') = (\mu + 2s)g$, $s \in Z$. D'après le théorème de Riemann-Roch [13], le genre de Todd est donné par le coefficient de g^n dans la formule $e^{(s+\frac{1}{2}\mu)g}(\frac{g}{2} sh \frac{g}{2})^\mu$. Donc on a $\binom{\mu-1+s}{\mu-1} = 1$ et puisque $\dim V$ est impair, ceci est possible seulement si $s = 0$ (cf. lemme 2, [16]); il en résulte que $c_1(V') = c_1(V) = \mu g$ et la classe de Chern $c_1(V')$ de V' est positive*. Puisque $h^{2,0} = 0$, le groupe des diviseurs sur V' est isomorphe à Z; soit D le diviseur positif défini par une section hyperplane de V' supposé réalisé comme sous-variété algébrique de l'espace projectif complexe et soit ν l'entier positif déterminé par D; on a (cf. lemme 4, [16]) le genre $\chi(V', D) = \sum (-1)^p \dim H^p(V', \Omega^o(D))$ est égal à $\binom{\mu-1+\nu}{\mu-1}$, donc $\dim L(D) = \dim H^o(V', \Omega^o(D)) = \binom{\mu-1+\nu}{\mu-1}$ car $H^p(V', \Omega^o(D)) = 0$ pour $p \neq 0$; on désigne ici par $\Omega^o(D)$ le fais-ceau des germes de sections holomorphes de l'espace fibré E en droites complexes associé à D et par $L(D)$ l'espace vectoriel des fonctions méromorphes g définies sur V' tels que $\varphi_i = g f_i$ est holomorphe sur un ouvert U_i d'un recouvrement (U_i) de V', où f_i est une fonction méromorphe sur U_i représentant D; $L(D)$ s'identifie à l'espace vectoriel $\Gamma(E)$ des sections holomorphes de E. On sait que la variété V est rationnelle

* Si la conjecture qui affirme que $c_1(V') > 0$ entraîne l'existence d'une métrique kählerienne dont la courbure de Ricci est positive est vrai, alors on peut montrer que cette métrique coincide avec la métrique kählerienne canonique de V.

et le nombre ν correspondant est égal à 1; il existe alors une application birationnelle f de V dans $P_l(C)$, où $l=\mu-1$. Soit $\sigma_o, \sigma_1, .. \sigma_l$ une base de $\Gamma(E)=L(D)$. Si $\varphi\in\Gamma(E)$ est une section de E, $\varphi(z)\in E$ est représentée par le couple $(z, \varphi_i(z))$ dans la carte locale sur E associé à φ_i; on a $\varphi_i(z)=f_{ij}(z)\varphi_j(z)$, $z\in U_i\cap U_j$, et les fonctions f_{ij} déterminent les changements de cartes locales $(z,u)=(z,f_{ij}(z)u)$. Alors $|D|=\{D_\lambda \mid \lambda\in f(V)\subset P_l(C)\}$ est un système linéaire complet défini par le diviseur $D_\lambda=((D_\lambda)_i)$, $(D_\lambda)_i=\lambda_o\sigma_{oi}(z)+\dots+\lambda_l\sigma_{li}(z)$, $\lambda\in f(V)$, où les λ_i sont les coordonnées homogènes du point $\lambda\in P_l(C)$ et où σ_{ji} est la fonction définie sur U_i associée à σ_j, comme φ_i est associée à φ. Soit B la base de $|D|$, c'est-à-dire, $B=\bigcap_\lambda D_\lambda$; on peut montrer (cf. Lemme 9 [16]) que les fonctions méromorphes $h_j(z)=\sigma_{ji}(z)/\sigma_{oi}(z)$, $j=1,2,\dots l$, sont algébriquement indépendantes. Alors l'application $h: V'-B\to V=f(V)\subset P_l(C)$ définie par :

$$h(z)=(\sigma_{oi}(z),\dots,\sigma_{li}(z))=(1,f_1(z),\dots,f_l(z))$$

est régulière. Soient $\mathfrak{L}$ l'espace vectoriel des polynomes homogènes de degré ν en $u=(u_o,u_1,\dots,u_l)$ et $\Psi_o,\dots,\Psi_N$ une base de $\mathfrak{L}$; on a $\dim\mathfrak{L}=N+1=\binom{l+\nu}{l}$, $l=\mu-1$ et l'application $s: u\to(\Psi_o(u),\dots,\Psi_N(u))$ est un plongement de $P_l(C)$ dans $P_N(C)$. Soit $\psi_{ri}(z)=\Psi_r(\sigma_{oi}(z),\dots,\sigma_{li}(z))$; on associe à chaque Ψ_r une section holomorphe $\psi_r: z\to(z,\psi_{ri}(z))$ de l'espace fibré en droite complexe associé à νD; alors, les sections $\psi_o,\psi_1,\dots,\psi_N$ sont linéairement indépendantes, $\dim L(\nu D)=$ $=N+1=\binom{l+\nu}{l}$, $l=\mu-1$. Puisque $c(\nu D)$ est positive, l'application :

$$\psi: z\to(\psi_{oi}(z),\psi_{1i}(z),\dots,\psi_{Ni}(z))$$

est un plongement de V' dans $P_N(C)$ pour ν assez grand [15a]. Donc, l'une des coordonnées $\psi_{ri}(z)$ est différente de zéro et B est vide; il en résulte que $h: V'\to P_l(C)$ est régulière et la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[rr] \arrow[dr, "\psi"'] & & f(V)\subset P_l(C) \arrow[dl, "s"] \\ & P_N(C) & \end{tikzcd}$$

montre que h est birégulière sur $\varphi(V)$. Donc * :

THEOREME 9. *Soit V' une variété kählerienne de dimension complexe impaire difféo-morphe à une variété hermitienne symétrique compacte et irréductible V; alors V' est complexe analytiquement isomorphe à V.*

*Ce théorème est démontré pour les espaces projectifs complexes dans [16].

Bibliographie.

[1] ADACHI, M. On certain triangulated manifolds, Proc. Jap. Academy XXXVI (1960) pp. 461-465.

[2] ADEM, J. The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 38 (1953), pp. 7.

[2a] ADAMS, J.F. Non-existence of elements of Hopf invariant 1, Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), pp. 279-282.

[3] ANDREOTTI, A. Complex structures of manifolds, Symposium in honor of S. Lef--schetz, Princeton (1957) pp. 53-71.

[4] BOREL, A. et HIRZEBRICH, F. Homogeneous spaces and characteristic classes I, II, III, Amer. Journ. Math. So. (1958), pp. 453-538, 81 (1959).

[4a] BOREL, A. Impossibilité de fibrer une sphère par un produit de sphères, C.R. Acad. Sci. Paris 230 (1950), pp. 943-945.

[5] BOTT, R.

a) Homogeneous vector bundles, Ann. of Math. 66 (1957) pp. 203-248.

b) avec Milnor, J. On the parallelisability of the spheres, Bull. Amer. Math. Soc., 64 (1958), p. 87.

[6] CAIRNS, S.S.

a) Triangulated manifolds and differentiable manifolds, Lectures in topology, Michigan (1941) pp. 143-157.

b) Manifold smoothing problem, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), p. 237.

[7] CALABI, E. et VESENTINI, E. On compact locally symmetric kähler manifolds, Ann. of Math. 71 (1960) pp. 472-507.

[8] CARTAN, E.

a) Sur une classe remarquable d'espace de Riemann, Bull. Soc. Math. France 54 (1926) pp. 214-264 et 55 (1927) pp. 114-134.

b) La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs, Gauthier Villars (1930) Mem. Sc. Math. Fasc. 42, Paris.

c) Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 11 (1936) pp. 116-162.

[9] EHRESMANN, C.

a) Sur la topologie de certains espaces homogènes, Thèse, Ann. of Math. 35 (1934) pp. 396-443.

b) Sur les espaces fibrés, Coll. de Topologie Alg., CNRS, Paris (1941), pp. 3-15.

c) Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Coll. de topologie, 1950 (Bruxelles) pp. 29-55.

d) Sur la théorie des variétés feuilletées, Rendiconti di Matematica, série V, Vol, X, Roma 1951.

[10] J. FELDBAU (sous le nom de J. LABOUREUR). Les structures fibrées sur la sphère et le problème du parallélisme, Bull. Soc. Math. France, 70 (1941), pp. 181-186

[11] FROLICHER, A et NIJENHUIS, A. A theorem on stability of comples structures, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. 43 (1957) pp. 239-241.

[12] HANO, J. On kählerien homogeneous spaces of unimodular Lie groups, Amer. Journ. Math. 76 (1957) pp. 885-900.

[12a] HAEFLIGER, A. Plongements différentiables de variétés dans variétés, Comm. Math. Helv. 36 (1961), pp. 47-82.

[13] HIRZEBRUCH, F. Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Springer 1956.

[14] KERVAIRE, M, a) A manifold which does not admit any differentiable structure, Comm. Math. Helv. 34 (1960) pp. 257-270.

b) et Milnor, J. W. Groups of Homotopy Spheres I, mimeographed, New York UNIVERSITY, Dec. 1961.

c) On relative characteristic classes, Amer. Jour. Math. 79 (1957), pp. 517-558.

d) et Milnor, J. Bernoulli numbers, homotopy groups.... Proc. Int. Cong. of Math. Edimburgh (1958).

[15] KODAIRA, K. a) On kähler varieties of restricted type, Ann. Math. 60 (1954) pp. 28-48.

b) On compact analytic surfaces, Analytic Functions, Princeton 1960, pp. 121-135.

c) On compact complex analytic surfaces I, Ann. of Math. 71 (1960) pp. 111-152.

[16] KODAIRA, K et HIRZEBRUCH, F. On the complex projective spaces, Jour. de Math. 36 (1957), pp. 201-216.

[17] KODAIRA et SPENCER, D. C. a) On deformations of complex analytic structures I-II, Ann. of Math. 67 (1958) pp. 329-466.

b) On deformations of complex analytic structures III, Ann. of Math. 71 (1960) pp. 43-76.

[18] KOSZUL, J. L. Sur la forme hermétienne canonique des espaces homogènes complexes, Can. Jour. Math., 7 (1955), pp. 562-576.

[19] KUIPER, N. H et EELLS, J (jr). Manifolds which are like projective planes, mimeographed (à paraitre).

[20] MILNOR, J.

a) Differentiable manifolds which are homotopy spheres, mimeographed Prince-

-ton Univ. 1959.

b) Differentiable structures on spheres, Amer. Journ. Math., 81 (1959) pp. 962-
-972.

c) On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, Ann. of Math. 64 (1956), pp. 399-
-405.

d) A procedure for killing the homotopy groups of differentiable manifolds, Sym-
-posia in Pure Math. A.M.S. (1961), pp. 39-55.

e) Sommes de variétés différentiables et..., Bull. Soc. Math. France 87 (1959),
pp. 439-444.

[21] SMALE, S.

a) Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, Ann. of Math. 74 (1961), pp. 391-406.

b) Differentiable and combinatorial structures on manifolds, Ann. of Math. 74 (1961) pp. 498-502.

c) On the structure of manifolds (mimeographed) à paraître.

[22] SRINIVASACHARYULU, K.

a) Exposés de séminaire dirigé par C.Ehresmann, 1959-60.

b) i) C.R.A.S. t 250 (1960) pp. 2316-2317.

ii) C.R.A.S. t 254 (1962) pp. 58-60.

c) C.R.A.S. t 252 (1961) pp. 3377-3378.

[23] STALLINGS, J. Polyhedral homotopy spheres, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960) pp. 485-488.

[24] STEENROD, N. Topology of fiber bundles, Princeton 1951.

[25] TAMURA, I.

a) Homeomorphy classification of total spaces of sphere bundles over spheres, Journ. Math. Soc. Japan, 10 (1959) pp. 29-43.

b) Remarks on differentiable structures on spheres, Journ. Math. Soc. Japan, 13 (1961) pp. 383-386.

c) 8-Manifolds admitting no differentiable structure, Journ. Math. Soc. Japan, 13 (1961) pp. 377-382.

[26] THOM, R.

a) Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comm. Math. 28 (1954) pp. 17-85.

b) Les classes caractéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées, Sympo-
-sium Inter. de Top. Alg. Mexico (1958) pp.

[27] WANG, H.C. Closed manifolds with homogeneous complex structure, Amer. Journ. Math. 76 (1954) pp. 1-32.

[28] WHITEHEAD, J.H.C.

a) On C^1 - complexes, Ann. of Math. 41 (1940) pp. 809-824.

b) et SPANIER. E.H. On the fibre space in which the fibre is contractible, Com- -mentari Math. Helv. 29 (1955), pp. 1-8.

[29] ZEEMAN, C. The generalized Poincaré conjecture, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961) p. 270.

[30] ROHLIN, V.A. et ŠVARC, A.S. The combinatorial invariance of Pontrjagin classes, Dokl. Akal. Nauk SSSR (N.S) 114 (1957), pp. 490-493.