Séminaire de topologie
et géométrie
différentielle

Bruce L. Reinhart

Champs de vecteurs sur les surfaces compactes

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 3 (1960-1962), exp. n° 6, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1960-1962__3__A9_0>

Faculté des Sciences de Paris
SEMINAIRE DE TOPOLOGIE
ET DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN

Avril 1962

CHAMPS DE VECTEURS SUR LES SURFACES COMPACTES

par Bruce L. REINHART

Nous considérons la structure qui se compose d'une variété compacte et un champ de vecteurs sur elle. Les relations entre les invariants topologiques de cette structure et l'existence de courbes intégrales fermées sont presque inconnues, même non étudiées. Nous donnons ici les premiers pas d'une telle étude.

Rappelonsd'abord la théorie d'obstructions pour un champ de vecteurs sur V^n.

1) Il existe toujours un champ non singulier sur le $(n-1)$- squelette.

2) Ilexiste une classe de cohomologie $\chi \in H^n(V;\mathbf{Z})$ telle qu'il existe un champ non singulier sur V si et seulement si $\chi = 0$. (classe d'Euler)

3) Deux champs f et g avec les mêmes singularités sont homotopes sur le $(n-2)$- - squelette.

4) Soit Σ l'ensemble, supposé fini, de points singuliers. Alors il existe une clas- -se de différence $d(f,g)$ dans $H^{n-1}(V,\Sigma;\mathbf{Z})$ telle que $d=0$ si et seulement si f et g sont homotopes sur le $(n-1)$- squelette.

5) Si $d=0$ il existe une deuxième différence qui est une classe dans:

$$H^n(V,\Sigma;\pi_n(S^{n-1})).$$

Nous restreignons maintnant au cas $n=2$. Alors, la deuxième différence est tou- -jours zéro, parce que $\pi_2(S^1)=0$. Pour considerer la première classe de difference com- -me invariant d'un seul champ de vecteurs, il faut définir un champ étalon. D'abord, le cas des champs non singuliers sur le tore. Soit T^2 le quotient du plan par les points en- -tiers, c'est-à-dire, l'ensemble des classes d'équivalence de la relation sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$:

$$(x,y)\sim(x+1,y)\sim(x,y+1)\ .$$

Alors le champ constant $\partial/\partial x$ sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ donne un champ e sur T^2, que nous choisis- -sons comme champ étalon. La classe de différence $d(f,e)\in H^1(T^2;\mathbf{Z})$ est un homo- -morphisme $H_1(T^2;\mathbf{Z})\to\mathbf{Z}$, et la valeur de cet homomorphisme sur une classe b est la variation de l'angle entre f et e le long d'une courbe dans h (calculée en multiples de 2π). D'autre part, étant donnée une courbe C de classe C^1 avec vecteur tangent $\dot{C}$ nulle part zéro, nous pouvons considérer la variation de l'angle entre $\dot{C}$ et e le long de C. Une telle courbe est dite *régulière*. La théorie du nombre $d(\dot{C}, e)$, dit *winding number* ou *nombre de tortuosité* a été étudié par Whitney [6] pour le cas du plan. En généra--lisant cette théorie [2] , nous trouvons quelques relations du type demandé au-dessus [1,3] .

Whitney a démontré que pour une courbe de Jordan C dans le plan, le nombre de tortuosité $w(C)$ est égal à ± 1 selon l'orientation. Pour le cas du tore, on démontre facilement [1] qu'il a les mêmes valeurs pour les courbes homotopes à zéro, mais pour les courbes de Jordan non homotopes à zéro, $w(C) = 0$. Alors, en général, nous deman--dons les propriétés suivantes pour le nombre de tortuosité sur une surface compacte orientée :

I. w est un homomorphisme du groupe de toutes les classes d'homotopie régu--lière des courbes régulières sur la surface V^2 [2, 5] dans les entiers modulo le nombre d'Euler de V^2.

II. $w(A_i) = w(B_i) = 0$ où A_i, B_i, $i = 1, \ldots, g$ sont des générateurs de $\pi_1(V^2)$ soumis à la relation :

$$\prod_{i=1}^{g} A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1} = 1$$

III. $w(C) = 1$ pour toute courbe de Jordan C homotope à zéro et orientée positi--vement.

Pour démontrer l'existence de w nous choisissons un champ étalon e avec un seul point singulier tel que II est satisfait; e existe et est unique à une homotopie près (ce qui démontre aussi l'unicité de w). Donc I et III sont vérifiés, presque trivialement [2] .

Le sens géométrique de w est donné par les propositions suivantes :

PROPOSITION 1 : *Soit Γ_i des courbes de Jordan sans point commun homotope à $A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1}$ (c'est-à-dire, les Γ_i sont les bords des anses). Si C est une courbe de Jordan, non homologue à zéro, qui ne coupe aucun Γ_i alors $w(C) = 0$.*

PREUVE. En supposant que Γ_i sépare C et la singularité de e, on coupe la surface le long de Γ_i. Soit A l'anse qui contient C. On plonge A dans un tore, et pro--longe e/A à un champ non singulier sur le tore. Parce que $w(A_i) = w(B_i) = 0$, ce champ est un champ étalon. Alors $w(C) = 0$.

Soit C n'importe quelle courbe de Jordan sur la surface. En appliquant les métho--des de [4] on trouve le nombre de points de coupure de C et Γ_i et leurs ordres cycli--ques sur C et sur Γ_i. On construit des nouvelles courbes $C_1, \ldots C_r, C_*$ en commen-

-çant à un point C et tournant à gauche à chaque point de coupure. Les C_i sont des courbes de Jordan, chacune sur une seule anse, et C_* est une courbe sur la sphère avec g trous, admettant peut-être des points multiples. Ces courbes ne sont pas régulières parce qu'elles ont un nombre fini de coins. On peut encore définir w comme la variation de l'angle, pourvu que l'on additionne le saut de l'angle pour chaque coin.

PROPOSITION 2 : *Soient r le nombre des C_i, $w_p(C_*)$ le nombre de tortuosité de C_* au sens du plan, et $\Sigma_{i=1}^{g-1} c_i^* \Gamma_i$ la classe d'homologie de C_* sur la sphère à g trous. Alors :*

$$w(C) = -r + w_p(C_*) - 2\Sigma\, c_i^* \text{ modulo } \chi$$

PREUVE. La somme $\Sigma w(C_i) + w(C_*)$ est égale à $w(C)$ plus la moitié du nombre de points de coupure, c'est-à-dire, $w(C)+r$, le deuxième terme étant dû aux sauts de l'angle aux points de coupure. Par la proposition 1, $w(C_i)=0$, alors $w(C) = -r + w(C_*)$. Supposez maintenant que le point singulier du champ étalon n'est pas sur la sphère à g trous. Alors on peut prolonger le champ étalon à un champ sur le plan avec une singularité de degré $+2$ sur chaque trou (on garde le trou bordé par Γ_g en supposant que la singularité est sur la g-ième anse). Par conséquent, $w(C_*)$ est égal à $w_p(C_*)$ plus la variation de l'angle entre ce champ et le champ étalon sur le plan, c'est-à-dire :

$$w(C_*) = w_p(C_*) - 2\Sigma\, c_i^*$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 3 : *(Haefliger). Si C est une courbe de Jordan qui est le bord de h anses, alors $w(C) = \pm(2h-1)$ modulo χ.*

La preuve est donnée dans [4] .

Regardons maintenant les courbes intégrales d'un champ V non singulier sur le tore.

THEOREME : *Si la classe de différence $d(V)$ de V est inégale à zéro, alors il existe des courbes intégrales fermées de V telles que la classe d'homologie de leur réunion est le dual de Poincaré de $d(V)$.*

PREUVE. On observe que le dual de Poincaré de $c \in H^1(T^2, \mathbf{Z})$, $c \neq 0$, est un générateur du noyau de c, considéré comme homomorphisme $H_1 \to \mathbf{Z}$. (Ce noyau est un groupe libre cyclique, donc le générateur est déterminé à un signe près). Par conséquent, le théorème démontré dans [1] peut s'exprimer comme au-dessus.

Pour les autres surfaces, considérons un champ avec une singularité. On a toujours $d(V)(C) \equiv w(C)$ modulo χ, pourvu que C est une courbe intégrale fermée de V. C'est une condition nécessaire sur $d(V)$ imposée par l'existence de C. Peut-être la non existence de certaines courbes fermées impose aussi des conditions sur $d(V)$. Mais le théorème ci-dessus ne vaut pas pour genus plus de 1 avec le champ étalon donné, parce que l'on peut trouver un champ sans courbes intégrales fermées dont la classe de dif--férence n'est pas zéro. Donc, jusqu'ici ces méthodes ne suffisent que de démontrer la non existence de certaines courbes intégrales fermées d'un champ donné. On peut poser la question suivante : Etant donnés des points singuliers, des courbes intégrales fermées et une classe de différence, trouver un champ de vecteurs avec cette classe de diffé--rence et avec ces points singuliers et courbes intégrales fermées, et aucun autre.

Finalement, nous avons le problème des variétés de dimension plus grande. Peut--on généraliser le théorème ci-dessus ? Et si la première différence est zéro, est-ce qu'il y a un théorème analogue pour la deuxième différence ? Pour la sphère S^3, on peut choisir un parallélisme. Alors, l'invariant de Hopf d'un champ donné non singulier est défini et cet invariant est la deuxième différence entre le champ donné et un des champs du parallélisme. Des exemples suggèrent la recherche d'une relation entre cet invariant et le nombre de courbes intégrales fermées. Mais ce n'est pas le même problème que la conjecture de Seifert qui est indépendant de l'invariant de Hopf.

Bibliographie

[1] B. L. REINHART. Line elements on the torus, Amer. J. Math. 81, 1959, 617-631.

[2] B. L. REINHART. The winding number on two manifolds, Ann. Inst. Fourier, 10 1960, 271-283.

[3] B. L. REINHART. Periodic orbits on two manifolds, Bol. Soc. Math. Mex. 5, 1960, 784-787.

[4] B. L. REINHART. Algorithms for Jordan curves on compact surfaces. Annals of Math. 75, 1962, à paraître.

[5] S. SMALE. Regular curves on Riemannian manifolds. Trans, Amer. Math. Soc. 87, 1958, 492-512.

[6] HASSLER WHITNEY. On regular closed curves in the plane. Compositio Math, 4, 1937, 276-286.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
LABORATOIRE
DE MATHÉMATIQUES PURES
INSTITUT FOURIER