Olav Arnfinn Laudal

Cohomologie et homologie pour les ensembles ordonnés

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 3 (1960-1962), exp. nº 5, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1960-1962__3__A8_0>

Faculté des Sciences de Paris
SEMINAIRE DE TOPOLOGIE ET DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN

Janvier 1962

COHOMOLOGIE ET HOMOLOGIE POUR LES ENSEMBLES ORDONNES

par *OLAV ARNFINN LAUDAL*

Introduction.

Dans (1) et, plus tard, dans (2) R. Deheuvels a exposé une théorie générale d'homologie et de cohomologie pour des ensembles ordonnés. Nous nous proposons dans cet exposé d'introduire un peu différemment des foncteurs homologiques et cohomolo-giques associés à un ensemble ordonné quelconque et de démontrer quelques théorèmes qui sont, d'après notre connaissance, nouveaux, et qui peuvent être déduits des résul-tats généraux de (3) d'une façon naturelle.

Dans § 1 nous traiterons une généralisation immédiate d'un résultat démontré dans (3), qui sera le résultat clef dans ce qui suit. Pour faciliter l'exposition nous introduisons dans § 2 la notion de système projectif-inductif, et nous obtenons quelques diagrammes utiles reliant les foncteurs (définis d'une façon naturelle sur la catégorie des systèmes projectif-inductifs),

$$R^{\bullet} \varinjlim \varprojlim_{\theta} \ (resp.\ L_{\bullet} \varprojlim \varinjlim_{\theta}) \ \ et\ \ L_{\bullet} \varinjlim \varprojlim_{\theta} \ (resp.\ R^{\circ} \varprojlim \varinjlim_{\theta})$$

aux foncteurs $\varinjlim_{(p)} \varprojlim_{\theta}^{(q)}$ (resp. $\varprojlim^{(p)} \varinjlim_{(q)}$)

Dans § 3 nous abordons la théorie d'homologie et de cohomologie des ensembles ordonnés. L'exposition diffère de celle de Deheuvels mais nous avons l'impression que les foncteurs qui en résultent sont les mêmes.

Enfin, dans § 4 nous démontrons les théorèmes généraux que nous avons en vue. A titre d'exemple nous avons aussi, dans § 5 traité le cas des préfaisceaux.

Pour les notations on se rapporte à (3). Ainsi nous désignons par $Hom(\underset{\sim}{C}, \underset{\sim}{D})$ la catégorie des foncteurs sur la catégorie $\underset{\sim}{C}$ à valeurs dans la catégorie $\underset{\sim}{D}$. Ici la caté-gorie $\underset{\sim}{C}$ sera toujours la catégorie associée à un ensemble ordonné Γ (voir (3)) et on va supposer, pour simplifier, que $\underset{\sim}{D}$ est la catégorie Mod_L des modules sur un anneau unitaire L fixé. Cependant, on pouvait très bien considérer n'importe quelle catégorie $\underset{\sim}{D}$ vérifiant les conditions 1, 2 et 3 de l'introduction de (3). En particulier les isomor-phismes de bifoncteurs (i) et (ii) de § 1 subsistent pour toute catégorie abélienne $\underset{\sim}{D}$ pourvu que les limites projectives et inductives relatives existent dans $\underset{\sim}{D}$. Notons aussi que pour démontrer (i) (resp. (ii)) nous n'avons fait usage que des conditions 1) et 2) (resp. 1') et 2')) sur $\varkappa$.

Si $\underset{\sim}{C}$ est une catégorie, nous noterons par $\underset{\sim}{C}^o$ la catégorie duale. Si E est un ensemble, nous noterons par $\mathcal{P}E$ l'ensemble des parties de E.

1. Foncteurs $\underset{\varkappa}{\overleftarrow{lim}}$ et $\underset{\varkappa}{\overrightarrow{lim}}$ Relatifs.

Soit Γ un ensemble ordonné et soit $\Gamma_o \subset \Gamma$ un sous-ensemble; notons par $\hat{\Gamma}_o \subset \Gamma$ le sous-ensemble minimal contenant Γ_o tel que, si $\gamma' \in \hat{\Gamma}_o$ et si $\gamma < \gamma'$, alors $\gamma \in \hat{\Gamma}_o$, et par $\check{\Gamma}_o \subset \Gamma$ le sous-ensemble minimal contenant Γ_o tel que, si $\gamma \in \check{\Gamma}_o$ et si $\gamma < \gamma'$, alors $\gamma' \in \check{\Gamma}_o$.

DEFINITION. *Soit F un objet dans $Hom(\Gamma, Mod_L)$ et soit d un objet dans Mod_L, alors nous dirons que d est la limite projective de F relative à Γ_o, notée $\underset{(\Gamma, \Gamma_o)}{\overleftarrow{lim}} F$ si :*

1) Il existe pour tout $\gamma \in \Gamma$ un $\pi_\gamma : \underset{(\Gamma, \Gamma_o)}{\overleftarrow{lim}} F \to F_\gamma$ tel que si $\gamma < \gamma'$ alors $\pi_\gamma = F(\gamma < \gamma') \circ \pi_{\gamma'}$

2) Pour tout $\gamma \in \Gamma_o$, $\pi_\gamma = 0$.

3) d est universel pour cette propriété.

On voit facilement que $\underset{(\Gamma, \Gamma_o)}{\overleftarrow{lim}} F$ est isomorphe à $Hom(L_{\Gamma, \Gamma^o}, F)$ où L_{Γ, Γ_o} est l'objet $\{(L_{\Gamma, \Gamma_o})_{\gamma}, \partial_\gamma^{\gamma'}\}$ défini par:

Si $\gamma \in \hat{\Gamma}_o$ alors $(L_{\Gamma, \Gamma_o})_\gamma = 0$.

Si $\gamma \notin \hat{\Gamma}_o$ alors $(L_{\Gamma, \Gamma_o})_\gamma = L$.

Si $\gamma < \gamma'$ et si $\gamma \notin \hat{\Gamma}_o$ alors $\partial_\gamma^{\gamma'} : (L_{\Gamma, \Gamma_o})_{\gamma'} \to (L_{\Gamma, \Gamma_o})_\gamma$ est l'identité.

Si $\gamma \in \hat{\Gamma}_o$ alors $\partial_\gamma^{\gamma'}$ est nul.

Donc, on a :

$$\underset{(\Gamma, \Gamma_o)}{\overleftarrow{lim}}^{(n)} F \simeq Ext^{(n)}(L_{\Gamma, \Gamma_o}, F)$$

Dualement on définit $\underset{(\Gamma, \Gamma_o)}{\overrightarrow{lim}}$ et on trouve $Hom(\underset{(\Gamma, \Gamma_o)}{\overrightarrow{lim}}_{(n)} F, R) \simeq Ext^{(n)}(F, R_{\Gamma, \Gamma_o})$.

où R est un L-module injectif et R_{Γ, Γ_o} dual à L_{Γ, Γ_o}.

Soient $\varkappa : \Gamma_1 \to \mathcal{P}\Gamma_2$ une application, Γ'_2 un sous-ensemble de Γ_2, et $\varkappa^{-1}(\gamma_2)$ l'ensemble $\{\gamma_1 | \gamma_2 \in \varkappa(\gamma_1)\}$. Notons $\varkappa_o(\gamma_1) = \varkappa(\gamma_1) \cap \Gamma'_2$, $\varkappa_o^{-1}(\gamma_2) = \{\gamma_1 | \gamma_2 \in \varkappa_o(\gamma_1)\}$.

Supposons que $\varkappa$ satisfasse aux conditions suivantes:

a) Si $\gamma_1 < \gamma'_1$ alors $\varkappa(\gamma_1) \subset \varkappa(\gamma'_1)$.

b) Si $\gamma_2 < \gamma'_2$ et si $\gamma'_2 \in \varkappa(\gamma_1)$ alors $\gamma_2 \in \varkappa(\gamma_1)$.

c) Pour tout $\gamma_2 \in \Gamma_2$, $\varkappa^{-1}(\gamma_2)$ est connexe (voir (2)).

d) Pour tout $\gamma_2 \in \Gamma_2$, $\varinjlim_{(\varkappa^{-1}(\gamma_2), \varkappa_o^{-1}(\gamma_2))}$ est exacte.

Alors à tout objet G de $Hom(\Gamma_2, Mod_L)$ nous pouvons associer un objet $\varprojlim_{(\varkappa, \varkappa_o)} G$ de $Hom(\Gamma_1, Mod_L)$ défini par:

$$\Big(\varprojlim_{(\varkappa, \varkappa_o)} G\Big)_{\gamma_1} = \varprojlim_{(\varkappa(\gamma_1), \varkappa_o(\gamma_1))} G$$

Ceci définit bien un foncteur:

$$\varprojlim_{(\varkappa, \varkappa_o)} : Hom(\Gamma_2, Mod_L) \to Hom(\Gamma_1, Mod_L)$$

Dualement on définit un foncteur:

$$\varinjlim_{(\varkappa, \varkappa_o)} : Hom(\Gamma_1, Mod_L) \to Hom(\Gamma_2, Mod_L)$$

par $\Big(\varinjlim_{(\varkappa, \varkappa_o)} F\Big)_{\gamma_2} = \varinjlim_{(\varkappa^{-1}(\gamma_2), \varkappa_o^{-1}(\gamma_2))} F$ et on va démontrer que $\varinjlim_{(\varkappa, \varkappa_o)}$ est adjoint au foncteur $\varprojlim_{(\varkappa, \varkappa_o)}$. Pour cela il faut montrer qu'il existe une transformation naturelle:

$$\beta : I_{\Gamma_1} \to \varprojlim_{(\varkappa, \varkappa_o)} \varinjlim_{(\varkappa, \varkappa_o)}$$

Pour un objet F dans $Hom(\Gamma_1, Mod_L)$ nous avons par définition de $\varinjlim_{(\varkappa, \varkappa_o)}$ une flêche $F_{\gamma_1} \xrightarrow{\amalg \gamma_1 \gamma'_2} \Big(\varinjlim_{(\varkappa, \varkappa_o)} F\Big)_{\gamma'_2}$ pour tout $\gamma'_2 \in \varkappa(\gamma_1)$, si $\gamma'_1 \in \Gamma'_1$ alors $\amalg \gamma_1 \gamma'_2 = 0$.

Si $\gamma_2 < \gamma'_2$ alors le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} F_{\gamma_1} \arrow[r, "\amalg \gamma_1 \gamma'_2"] \arrow[dr, "\amalg \gamma_1 \gamma_2"'] & \Big(\varinjlim_{(\varkappa, \varkappa_o)} F\Big)_{\gamma'_2} \arrow[d] \\ & \Big(\varinjlim_{(\varkappa_1, \varkappa_o)} F\Big)_{\gamma_2} \end{tikzcd}$$

Donc par définition de $\varprojlim_{(\varkappa, \varkappa_o)}$ nous obtenons une flêche :

$$F_{\gamma 1} \xrightarrow{\beta_{\gamma 1}} \Big(\varprojlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} \varinjlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} F\Big)_{\gamma 1}$$

d'où la transformation naturelle β.

Il s'agit de démontrer que $\varinjlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} F$ est libre au-dessus de F. Pour cela soit $h \in Hom(\varinjlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} F, G)$ et considérons l'application $h \to \varprojlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} h \circ \beta$ de $Hom(\varinjlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} F, G)$ dans $Hom(F, \varprojlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} G)$.

Il faut démontrer que cette application est un isomorphisme. Soit :

$$\alpha : \varinjlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} \varprojlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} \to I_{\Gamma_2}$$

la transformation naturelle duale à β. Il suffit de démontrer que les applications

1) $h \to \alpha \circ \varinjlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} (\varprojlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} h \circ \beta)$.

2) $k \to \varprojlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} (\alpha \circ \varinjlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} k)$.

sont les identités dans $Hom(\varinjlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} F, G)$ resp. dans $Hom(F\ \varprojlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} G)$. Pour cela regardons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & (\varinjlim F)_{\gamma_2} \arrow[rr, "h"] & & G_{\gamma_2} \arrow[dr, "u = id"] & \\
F_{\gamma 1} \arrow[ur, dash] \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "i"] & (\varprojlim \varinjlim F)_{\gamma_1} \arrow[u, "j"] \arrow[rr, dash, "\varprojlim h"] \arrow[dr] & & (\varprojlim G)_{\gamma_1} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[dr] & G_{\gamma 2} \\
(\varinjlim F)_{\gamma_2} \arrow[rr, "s"] & & (\varinjlim \varprojlim \varinjlim F)_{\gamma_2} \arrow[rr, "t"] & & (\varinjlim \varprojlim G)_{\gamma_2} \arrow[u, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Pour tout $\gamma_2 \in \varkappa(\gamma_1)$ nous avons $\alpha_{\gamma 2} \circ t_{\gamma 2} \circ s_{\gamma 2} \circ i = u \circ h_{\gamma 2} \circ i$ donc $\alpha \circ t \circ s = h$. Or, on a $t \circ s = \varinjlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} (\varprojlim_{(\varkappa,\varkappa o)} h \circ \beta)$ donc 1) est l'identité. De même on voit que 2) est l'identité

D'où un isomorphisme de bifoncteurs en F et G.

(i) $Hom(\varinjlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} F, G) \simeq Hom(F\ \varprojlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} G)$.

Il est facile de voir comment on peut obtenir les suites spectrales de $(\varkappa, \varkappa_o)$.

En particulier nous trouvons une suite spectrale donnée par :

$$E_2^{p \cdot q} = \varprojlim_{\Gamma 1}{}^{(p)} \varprojlim_{(\varkappa,\varkappa_o)}{}^{(q)} G$$

aboutissant à :

$$\sum_{n \geq 0} \varprojlim_{(\Gamma 2, \Gamma'_2)}{}^{(n)} G$$

puisque $\varinjlim_{(\varkappa,\varkappa_o)} L = L_{\Gamma 2 - \Gamma'_2}$ et puisque $\varinjlim_{(\varkappa,\varkappa_o)}$ est exacte.

Dualement, soient $\varkappa : \Gamma_1 \to \mathcal{P}\Gamma_2$ une application Γ'_2 un sous-ensemble de Γ_2 et $\varkappa^{-1}(\gamma_2)$ l'ensemble $\{\gamma_1 | \gamma_2 \in \varkappa(\gamma_1)\}$. Notons $\varkappa_o(\gamma_2) = \varkappa(\gamma_2) \cap \check{\Gamma}'_2$, $\varkappa_o^{-1}((\gamma_2) = \{\gamma_1 | \gamma_2 \in \varkappa_o(\gamma_1)\}$.

Supposons que $\varkappa$ satisfasse aux conditions suivantes:

a') Si $\lambda < \lambda'$ alors $\varkappa(\lambda') \subset \varkappa(\lambda)$.

b') Si $\gamma_2 < \gamma'_2$ et si $\gamma_2 \in \varkappa(\gamma_1)$ alors $\gamma'_2 \in \varkappa(\gamma_1)$.

c') Pour tout $\gamma_2 \in \Gamma_2$ $\varkappa^{-1}(\gamma_2)$ est connexe (voir (2)).

d') Pour tout $\gamma_2 \in \Gamma_2$, $\varprojlim_{\{\varkappa^{-1}(\gamma_2), \varkappa_o^{-1}(\gamma_2)\}}$ est exacte.

Alors, à tout objet F de $Hom(\Gamma_2, Mod_L)$, nous pouvons associer un objet $\varinjlim_{(\varkappa, \varkappa_o)} F$ dans $Hom(\Gamma_1, Mod_L)$ défini par:

$$(\varinjlim_{(\varkappa, \varkappa_o)} F)_{\gamma_1} = \varinjlim_{(\varkappa(\gamma_1), \varkappa_o(\gamma_1))} F$$

Ceci définit un foncteur:

$$\varinjlim_{(\varkappa, \varkappa_o)} : Hom(\Gamma_2, Mod_L) \to Hom(\Gamma_1, Mod_L).$$

Dualement on définit un foncteur:

$$\varprojlim_{(\varkappa, \varkappa_o)} : Hom(\Gamma_1, Mod_L) \to Hom(\Gamma_2, Mod_L)$$

en posant:

$$(\varprojlim_{(\varkappa, \varkappa_o)} G)_{\gamma_2} = \varprojlim_{(\varkappa^{-1}(\gamma_2), \varkappa_o^{-1}(\gamma_2))} G$$

On démontre de la même manière que ci-dessus que $\varprojlim_{(\varkappa, \varkappa_o)}$ est coadjoint au foncteur $\varinjlim_{(\varkappa, \varkappa_o)}$, c'est-à-dire que l'on a un isomorphisme canonique.

(ii) $Hom(\varinjlim_{(\varkappa, \varkappa_o)} F, G) \simeq Hom(F, \varprojlim_{(\varkappa, \varkappa_o)} G)$

D'où une suite spectrale donnée par:

$$E^2_{p.q} = \varinjlim_{\Gamma_1}{}^{(p)} \varinjlim_{(\varkappa, \varkappa_o)}{}^{(q)} F$$

aboutissant à :

$$\sum_{n \geq 0} \varinjlim_{(\Gamma_2, \Gamma'_2)}{}^{(n)}$$

2. Systèmes projectifs-inductifs.

Soient Γ et Λ deux ensembles ordonnés, et soit $\theta : \Gamma \to \mathcal{P}\Lambda$ une application asujettie à la condition suivante:

1) Si $\gamma < \gamma'$ alors $\theta(\gamma) \subset \theta(\gamma')$.

Soit Π_θ l'ensemble $\{(\gamma, \lambda) \gamma \in \Gamma, \lambda \in \theta(\gamma)\}$. Π_θ est un sous-ensemble de $\Gamma \times \Lambda$, donc ordonné d'une manière naturelle. Soit F un objet dans la catégorie $Hom.(\Pi_\theta, Mod._L)$, alors on dira que F est un objet *projectif-inductif sur l'ensemble* Λ *relatif à* θ. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $(\varprojlim_\theta F)_\gamma = \varprojlim_{\theta(\gamma)} F$, est un objet dans $Mod._L$, et si $\gamma < \gamma'$ alors l'application canonique $(\varprojlim_\theta F)_{\gamma'} \to (\varprojlim_\theta F)_\gamma$, vérifie les conditions de compatibilités usuelles, donc on a défini un foncteur:

$$\varprojlim_\theta : Hom.(\Pi_\theta, Mod._L) \to Hom.(\Gamma, Mod._L)$$

Il sera interessant de considérer le foncteur composé:

$$\varinjlim_\Gamma \varprojlim_\theta : Hom.(\Pi_\theta, Mod._L) \to Mod._L .$$

Puisque $Hom.(\Pi_\theta, Mod._L)$ contient suffisamment d'objets projectifs et injectifs, nous pouvons considérer la suite dérivée du foncteur $T = \varinjlim_\Gamma \varprojlim_\theta$, soit:

$$\ldots L_n T, \ldots L_1 T, \tilde{L}_o T, \tilde{R}^o T, R^1 T, \ldots R^n T, \ldots$$

c'est un δ-foncteur exact (voir(4)).

De même, à tout objet G dans $Hom.(\Pi_\theta^o, Mod._L)$ on associe l'objet $\varinjlim_\theta G$ dans $Hom.(\Gamma^o, Mod._L)$, défini par $(\varinjlim_\theta G)_\gamma = \varinjlim_{\theta(\gamma)^o} G$. Le foncteur composé $S = \varprojlim_{\Gamma^o} \varinjlim_\theta$ ad--met une suite de foncteurs dérivés, soit:

$$\ldots L_n S, \ldots L_1 S, \tilde{L}_o S, R^o S, R^1 S, \ldots R^n S, \ldots,$$

c'est un δ-foncteur exact.

Supposons que θ satisfait à la condition.

2) Si $\lambda < \lambda'$ et si $\lambda' \in \theta(\gamma)$, alors $\lambda \in \theta(\gamma)$.

Il en résulte:

(i) Si F est un objet Π-injectif de $Hom.(\Pi_\theta, Mod._L)$, alors F est Π-injectif dans $Hom.(\theta(\gamma), Mod.)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

(ii) Si F est un objet Π-projectif dans $Hom.(\Pi_\theta^o, Mod._L)$, alors F est Π-projectif dans $Hom.(\theta(\gamma)^o, Mod._L)$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma$.

(iii) Le foncteur $\varprojlim_\theta{}^{(n)}$ *resp.* $\varinjlim_{\theta}{}_{(n)}$, n-ième dérivé du foncteur $\varprojlim_\theta$ (*resp.* $\varinjlim_\theta$) est donné par $(\varprojlim_\theta{}^{(n)})_\gamma = \varprojlim_{\theta(\gamma)}{}^{(n)}$ (*resp.* $(\varinjlim_\theta{}_{(n)})_\gamma = \varinjlim_{\theta(\gamma)^o}{}_{(n)}$).

Considérons maintenant le double-complexe:

I. $\quad Hom_\Gamma(\varprojlim_\theta F^\bullet, R^\bullet)$

où $F^\bullet$ est une résolution Π-injective de l'objet F dans $Hom.(\Pi_\theta, Mod._L)$ et où $R^\bullet$ est une résolution injective d'un objet constant R dans $Hom.(\Gamma, Mod._L)$, R étant un L-mo-

-dule injectif. On déduit du double-complexe I. deux suites spectrales, données par

$$'E_2^{p,q} = R^p \varinjlim_{\Gamma}{}^{(-q)} \varprojlim_{\theta} F$$

$$''E_2^{p,q} = \varinjlim_{\Gamma}{}^{(-p)} \varprojlim_{\theta} F$$

aboutissant à la même chose. Donc, si $\varinjlim_{\Gamma}{}_{(p)} = 0$ pour $p \geq 2$, nous trouvons un diagram- -me:

$$(iv)\qquad \begin{tikzcd}[column sep=small]
0 & & & & 0 \arrow[dl] \\
& \varinjlim_{\Gamma}{}_{(1)} \varprojlim_{\theta}{}^{(n+1)} F \arrow[ul] & & R^{(n+1)} \varinjlim_{\Gamma}{}_{(1)} \varprojlim_{\theta} F \arrow[dl] & \\
& & K^n F \arrow[ul] \arrow[dl] & & \\
& R^n \varinjlim_{\Gamma} \varprojlim_{\theta} F \arrow[dl] & & \varinjlim_{\Gamma} \varprojlim_{\theta}{}^{(n)} F \arrow[ul] & \\
0 & & & & 0 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

dans lequel les suites sont exactes.

En considérant le double-complexe:

II. $\quad Hom.(\varprojlim_{\theta} F_{\bullet}, R^{\bullet})$

où $F_{\bullet}$ est une résolution Π-projective de F dans $Hom.(\Pi_{\theta}, Mod._L)$, nous trouvons deux suites spectrales, données par:

$$'E^2_{p,q} = \varinjlim_{\Gamma}{}_{(p)} L_q \varprojlim_{\theta} F$$

$$''E^2_{p,q} = L_p \varinjlim_{\Gamma}{}_{(q)} \varprojlim_{\theta} F$$

aboutissant à la même chose.

Supposons maintenant vérifiées les conditions 1.2. et de plus, les conditions suivantes:

3) Γ est une partie de $\mathcal{P}\Lambda$, ordonné par inclusion, telle que $\Lambda \in \Gamma$ et $\theta: \Gamma \to \mathcal{P}\Lambda$ est l'application canonique.

4) Λ contient un plus grand élément λ_o.

5) Pour tout $\gamma \in \Gamma$, si $\lambda \in \Lambda$ est tel que $\lambda' < \lambda$ pour tout $\lambda' \in \theta(\gamma)$ alors $\lambda = \lambda_o$.

6) Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\theta(\gamma)$ est connexe (voir(2)).

Dans ce cas on peut voir que $'E^2_{p,q} = 0$ si $p \neq 0$ ou bien si $q \neq 0$, et on a $'E^2_{o,o} = F_{(\Lambda, \lambda_o)}$.

Donc si $\varinjlim_{\Gamma}{}_{(p)} = 0$ pour $p \geq 2$, on trouve:

(v) $$L_o \varinjlim_{\Gamma} \varprojlim_{\theta} F = F_{(\Lambda\,,\,\lambda_o)}$$

(vi) $$L_n \underset{\Gamma}{\varinjlim}{}_{(p)} \varprojlim_{\theta} F = 0 \qquad \text{pour tout } p \geq 0\,, \text{ si } n \geq 1\,.$$

En particulier on a :

(vii) $$L_n T = 0 \qquad \text{si } n \geq 1$$

(viii) $$\tilde{L}_o T F \subset F_{(\Lambda\,,\,\lambda_o)}$$

Passons maintenant au foncteur S, et considérons le double complexe :

III. $$\underset{\Gamma^o}{Hom}\,(L\,,\, \varinjlim_{\theta} G_\bullet)$$

où $L.$ est une résolution projective de l'objet constant L dans $Hom\,(\Gamma^o,\, Mod_L)$ et où $G.$ est une résolution $\amalg$-projective de l'objet G dans $Hom(\Pi^o_\theta,\, Mod_L)$. Il en résulte deux suites spectrales données par :

$$'E_2^{p\,.\,q} = L_{\cdot p} \underset{\Gamma^o}{\varprojlim}{}^{(q)} \varinjlim_{\theta} G$$

$$''E_2^{p\,.\,q} = \underset{\Gamma^o}{\varprojlim}{}^{(p)} \underset{\theta}{\varinjlim}{}_{(\cdot q)} G$$

aboutissantes à la même chose. Supposons que $\underset{\Gamma^o}{\varprojlim}{}^{(p)} = 0$ pour $p \geq 2$ alors nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & 0 \\
& L_n \varprojlim\limits_{\Gamma^o} \varinjlim\limits_{\theta} G \arrow[dr] & & \varprojlim\limits_{\Gamma^o} \underset{\theta}{\varinjlim}{}_{(n)} G \arrow[ur] & \\
(ix) & & K_n G \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& \underset{\Gamma^o}{\varprojlim}{}^{(1)} \underset{\theta}{\varinjlim}{}_{(n+1)} G \arrow[ur] & & L_{n+1} \underset{\Gamma^o}{\varprojlim}{}^{(1)} \varinjlim\limits_{\theta} G \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & & & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel les suites sont exactes.

De même le double complexe :

IV $$Hom\,(L\,.\, \varinjlim_{\theta} G^\bullet)$$

où $G^{\bullet}$ est une résolution Π-injective de G dans $Hom.(\Pi_{\theta}^{o}, Mod._{L})$, admet deux suites spectrales données par :

$$'E_2^{p,q} = R^p \varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(q)} \varinjlim_{\theta} G$$

$$''E_2^{p,q} = \varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(p)} R^q \varinjlim_{\theta} G$$

aboutissant à la même chose. Si les conditions 1),....6) sont satisfaites et si de plus on a :

7) Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\theta(\gamma)$ contient un nombre fini d'éléments $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ tels que, pour tout $\lambda \in \theta(\gamma)$ il existe un i tel que $\lambda < \lambda_i$; alors on peut voir que $''E_2^{p,q} = 0$ si $p \neq 0$ ou bien si $q \neq 0$, et $''E_2^{o,o} = G_{(\Lambda, \lambda_o)}$.
Si alors $\varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(p)} = 0$ pour $p \geq 2$ on a :

(x) $$R^o \varprojlim_{\Gamma^o} \varinjlim_{\theta} G = G_{(\Lambda, \lambda_o)}.$$

(xi) $$R^n \varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(p)} \varinjlim_{\theta} G = 0 \qquad \text{pour tout } p \geq 0, \text{ si } n \geq 1.$$

En particulier il en résulte :

(xii) $$R^n S = 0 \text{ si } n \geq 1 \text{ et}$$

(xiii) $$\tilde{R}^o S G \text{ est un quotient de } G_{(\Lambda, \lambda_o)}.$$

Il est facile de voir que le L module $K^n F$ (resp. $K_n G$), homologie du double complexe $\amalg_* \varprojlim_{\theta} F^{\cdot}$ (resp. $\Pi^* \varinjlim_{\theta} G.$) (voir(3)) ne dépend pas de la résolution $F^{\cdot}$(resp. $G.$) choisie. De plus, $K^n F$ (resp. $K_n G$) dépend fonctoriellement de F(resp. G) et le fonc--teur :

$$F \to K^{\bullet} F$$

$$(\text{ resp. } G \to K_{\bullet} G)$$

est un δ-foncteur (resp. ∂-foncteur) exact sur la catégorie $Hom(\Pi_{\theta}, Mod_L)$ (resp. $Hom(\Pi_{\theta}^o, Mod_L)$) à valeurs dans Mod_L.

Si Γ est filtrant alors on a par (iv) un isomorphisme fonctoriel en F :

(xiv) $$K^n F \simeq \varinjlim_{\Gamma} \varprojlim_{\theta}{}^{(n)} F \simeq R^n T F$$

Supposons maintenant, que Γ contient un plus petit élément, soit γ_o. Il résulte alors de (ix) un isomorphisme fonctoriel en G.

$$K_n G \simeq L_n \varprojlim_{\Gamma^o} \varinjlim_{\theta} G \simeq \varinjlim_{\theta(\gamma_o)}{}_{(n)} G$$

Par contre, si Γ ne contient pas un plus petit élément on va voir que $L_n S = 0$ pour tout $n \geq 0$. En effet, soit G un objet $\amalg$-projectif dans $Hom(\Pi_\theta^o, Mod_L)$ défini par une famille de L-modules projectifs $\{\overline{G}_{(\gamma,\lambda)}\}$ alors, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a :

$$\varinjlim_{\theta(\gamma)^o} G = \coprod_{\substack{\gamma' < \gamma \\ \lambda' \in \theta(\gamma')}} \overline{G}_{(\gamma',\lambda')}$$

donc :

$$S\,G = \varprojlim_{\Gamma^o} \varinjlim_{\theta} G = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \coprod_{\substack{\gamma' < \gamma \\ \lambda' \in \theta(\gamma')}} \overline{G}_{(\gamma',\lambda')} = 0$$

Donc, si $\varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(p)} = 0$ pour $p \geq 2$, il résulte de (ix) un isomorphisme fonctoriel en G :

$$(\mathrm{xv}) \qquad K_n G \simeq L_{n+1} \varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(1)} \varinjlim_{\theta} G$$

REMARQUE : Soit Λ_1 un sous-ensemble de Λ et soit $\theta_1(\gamma) = \theta(\gamma) \cap \hat{\Lambda}_1$. Comme ci-dessus, on fabrique des foncteurs $T_{\Lambda_1} = \varinjlim_{\Gamma} \varprojlim_{(\theta,\theta_1)}$ et $K^{\bullet}_{\Lambda_1}$ (resp. $S^{\Lambda 1} = \varprojlim_{\Gamma^o} \varinjlim_{(\theta,\theta_1)}$ et $K_{\bullet}^{\Lambda 1}$) sur la catégorie $Hom(\Pi_\theta, Mod_L)$ (resp. $Hom(\Pi_\theta^o, Mod_L)$) à valeurs dans Mod_L. Il en résulte des foncteurs dérivés $R^n T_{\Lambda_1}$ et $L_n T_{\Lambda_1}$ (resp. $L_n S^{\Lambda 1}$ et $R^n S^{\Lambda 1}$) et on constate que les diagrammes et formules ci-dessus subsistent.

3. Cohomologie et Homologie d'un ensemble ordonné.

Soit Λ un ensemble ordonné, soit Γ une partie de $\mathcal{P}\Lambda$ telle que si $\gamma \in \Gamma$ et si $\lambda < \lambda'$, $\lambda' \in \gamma$ alors $\lambda \in \gamma$ On dira alors que γ est un filtre. Γ étant une partie de $\mathcal{P}\Lambda$, est un ensemble ordonné par inclusion. Nous avons une application évidente :

$$\theta : \Gamma \to \mathcal{P}\Lambda$$

vérifiant les conditions 1) et 2) de § 2. A tout objet $F = \{F_\lambda, \eta_\lambda^{\lambda'}\}$ dans $Hom.(\Lambda, Mod._L)$ il est associé un objet $\partial F = \{F'_{(\gamma,\lambda)}, \mu^{(\gamma',\lambda')}_{(\gamma,\lambda)}\}$ dans $Hom.(\Pi_\theta, Mod._L)$, défini par $F'_{(\gamma,\lambda)} = F_\lambda, \mu^{(\gamma',\lambda')}_{(\gamma,\lambda)} = \eta_\lambda^{\lambda'}$. De même à tout objet $G = \{G_\lambda, \iota_\lambda^{\lambda'}\}$ dans $Hom.(\Lambda^o, Mod.L)$ il est associé un objet $\partial^o G = \{G'_{(\gamma,\lambda)}, \nu^{(\gamma',\lambda')}_{(\gamma,\lambda)}\}$ dans $Hom.(\Pi_\theta^o, Mod._L)$ défini par $G'_{(\gamma,\lambda)} = G_\lambda\ \nu^{(\gamma',\lambda')}_{(\gamma,\lambda)} = \iota_\lambda^{\lambda'}$. On obtient ainsi deux foncteurs exacts :

$$\partial : Hom.(\Lambda, Mod._L) \to Hom.(\Pi_\theta, Mod._L)$$

$$\partial^o : Hom.(\Lambda^o, Mod._L) \to Hom.(\Pi^o_\theta, Mod._L)$$

Il en résulte un δ - foncteur (resp. un ∂ - foncteur) exact:

1) $$K^\bullet \circ \partial : Hom.(\Lambda, Mod._L) \to Mod._L (\text{resp.}$$

2) $$K_\bullet \circ \partial^o : Hom.(\Lambda^o, Mod._L) \to Mod._L).$$

DEFINITION. *On appelle foncteur de Γ - cohomologie de Λ le δ - foncteur exact 1), et on le note* $H^\bullet = (\ldots H^{-n}, \ldots H^o, \ldots H^n, \ldots)$.

DEFINITION. *On appelle foncteur de Γ - homologie de Λ le ∂ - foncteur exact 2), et on le note* $H_\bullet = (\ldots H_{-n}, \ldots H_o, \ldots H_n, \ldots)$.

REMARQUE. Si on se donne un sous-ensemble Λ_1 de Λ, on obtient (voir la remarque de § 2 des foncteurs de Γ - cohomologie et de Γ - homologie relatifs, notés:

$$H^\bullet_{\Lambda_1} \quad resp. \quad H^{\Lambda_1}_\bullet .$$

Comme on a déjà vu, §2.(xiv) et (xv), on a des isomorphismes fonctoriels:

(i) $$H^n_{\Lambda_1} \simeq (R^n \varinjlim_{\Gamma} \varprojlim_{(\theta, \theta_1)}) \circ \partial \quad \text{si } \Gamma \text{ est filtrant.}$$

(ii) $$H^{\Lambda_1}_n \simeq (L_{n+1} \varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(1)} \varinjlim_{(\theta, \theta_1)}) \circ \partial^o \quad \text{si } \varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(p)} = 0 \text{ pour } p \geq 2 \text{ et si}$$

Γ ne contient pas un plus petit élément.

(iii) $$H^{\Lambda_1}_n \simeq (L_n \varprojlim_{\Gamma^o} \varinjlim_{(\theta, \theta_1)}) \circ \partial^o \quad \text{si } \Gamma \text{ contient un plus petit élément } \gamma_o .$$

$$\simeq \varinjlim_{(\gamma_o, \gamma_o^1)}{}^{(n)}$$

Si P (*resp.* Q) est un foncteur sur $Hom.(\Pi_\theta, Mod._L)$ (*resp.* $Hom.(\Pi^o_\theta, Mod._L)$), on ne sait pas à priori, que $(R^n P) \circ \partial = R^n(P \circ \partial)$ (*resp.* $(L_n Q) \circ \partial^o = L_n(Q \circ \partial^o)$. Or, il résulte de §2.(iii) que l'on a:

(iv) $$R^n(\varinjlim_{\Gamma} \varprojlim_{(\theta, \theta_1)} \circ \partial) = (R^n \varinjlim_{\Gamma} \varprojlim_{(\theta, \theta_1)}) \circ \partial \quad \text{si } \Gamma \text{ est filtrant.}$$

(v) $$L_n(\varprojlim_{\Gamma^o} \varinjlim_{(\theta,\theta_1)} \circ \partial^o) = (L_n \varprojlim_{\Gamma^o} \varinjlim_{(\theta,\theta_1)}) \circ \partial^o$$ si Γ contient un plus petit élément.

Supposons que $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \gamma = \phi$ alors on vérifie facilement que $L_n(S \circ \partial^o) = 0$ pour tout $n \geq 0$, donc, en utilisant §2 (iii) et (ix) on trouve :

(xi) $$(L_n \varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(1)} \varinjlim_{(\theta,\theta_1)}) \circ \partial^o = L_n(\varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(1)} \varinjlim_{(\theta,\theta_1)} \circ \partial^o)$$

si $\varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(p)} = 0$ pour $p \geq 2$.

Dès maintenant, chaque fois que nous parlerons de cohomologie d'un ensemble ordonné Λ nous allons supposer que Γ est filtrant. Donc, on a un isomorphisme de fonc-teurs :

(vii) $$H^{\cdot}_{\Lambda_1} = R^{\cdot}(\varinjlim_{\Gamma} \varprojlim_{(\theta,\theta_1)} \circ \partial)$$

De même, chaque fois que nous parlerons d'homologie d'un ensemble ordonné Λ nous allons supposer que $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \gamma = \phi$ et $\varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(p)} = 0$ pour $p \geq 2$. Donc on a un isomorphisme de foncteurs :

(viii) $$H_n^{\Lambda_1} = L_{n+1}(\varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(1)} \varinjlim_{(\theta,\theta_1)} \circ \partial^o)$$

4. Théorèmes fondamentaux.

Soient Ω et Λ deux ensembles ordonnés, soit Γ une partie de $\mathcal{P}\Lambda$ composée de filtres, et soit $\theta : \Gamma \to \mathcal{P}\Lambda$ l'application canonique. Considérons une application :

$$\varkappa : \Omega \to \mathcal{P}\Lambda$$

vérifiant les conditions a), b), c) et d) du §1. Soit Λ_1 un sous-ensemble de Λ et posons pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma_1 = \gamma \cap \hat{\Lambda}_1$. Pour tout filtre γ de Λ, soit $\varkappa_\gamma$ l'application $\Omega \to \mathcal{P}\gamma$ définie par $\varkappa_\gamma(\omega) = \varkappa(\omega) \cap \gamma$, alors on constate que $\varkappa_\gamma$ satisfait aux condi-tions a), ... d) du §1. Supposons que :

e) $\Lambda \in \Gamma$

et posons $\theta_1(\gamma) = \theta(\gamma) \cap \hat{\Lambda}_1$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\varkappa^1_\gamma(\omega) = \varkappa_\gamma(\omega) \cap \hat{\Lambda}_1$. Soit F un objet dans $Hom(\Lambda, Mod_L)$ et soit $F^{\cdot}$ une résolution Π-injective de F dans $Hom(\Lambda, Mod_L)$ Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $\gamma < \gamma'$ on vérifie que la flêche :

$$r^{\gamma'}_{\gamma} : \varprojlim_{(\varkappa_{\gamma'}, \varkappa^1_{\gamma'})} F^n \to \varprojlim_{(\varkappa_\gamma, \varkappa^1_\gamma)} F^n$$

est une surjection dans $Hom.(\Omega, Mod._L)$. Soit G un objet dans $Hom.(\Omega, Mod._L)$ alors on a, pour $\gamma < \gamma'$, $\lambda \epsilon \gamma$:

$$(\underset{(\varkappa_{\gamma'}, \varkappa^1_{\gamma'})}{\overrightarrow{lim.}}\ G)_\lambda = (\underset{(\varkappa_{\gamma}, \varkappa^1_{\gamma})}{\overrightarrow{lim.}}\ G)_\lambda.$$

Considérons alors le double complexe (i) de §1 :

$$\underset{\Omega}{Hom}(L., \underset{(\varkappa_\gamma, \varkappa^1_\gamma)}{\overleftarrow{lim}} F^\cdot) \simeq Hom(\underset{\gamma}{lim}\ \underset{(\varkappa_\gamma, \varkappa^1_\gamma)}{\overrightarrow{}} L., F^\cdot)$$

où $L.$ est une résolution projective de l'objet constant L dans $Hom(\Omega, Mod_L)$ et passons à la limite inductive suivante Γ. Puisque le système inductif $\{(\underset{(\varkappa_\gamma, \varkappa^1_\gamma)}{\overleftarrow{lim}} F^n)_\gamma, r^{\gamma'}_\gamma\}$ dans la catégorie $Hom(\Omega, Mod_L)$ est surjectif et puisque L_m pour tout m est un objet projectif dans $Hom(\Omega, Mod_L)$ et enfin puisque Γ contient un plus grand élément, on trouve que $\underset{\Gamma}{\overrightarrow{lim}}$ commute avec $\underset{\Omega}{Hom}$.[1] On a donc un isomorphisme de double complexe :

$$\text{(i)} \qquad \underset{\Omega}{Hom}(L., \underset{\Gamma}{\overrightarrow{lim}}\ \underset{(\varkappa_\gamma, \varkappa^1_\gamma)}{\overleftarrow{lim}} F^\cdot) \simeq \underset{\Gamma}{\overrightarrow{lim}}\ \underset{\gamma}{Hom}(\underset{(\varkappa_\gamma, \varkappa^1_\gamma)}{\overrightarrow{lim}} L., F^\cdot)$$

THEOREME 1 : *Supposons que Γ est filtrant, alors il existe une suite spectrale donnée par :*

$$E_2^{p,q} = \underset{\Omega}{\overleftarrow{lim}}^{(p)} H^q_{\varkappa_1(\omega)}(\varkappa(\omega), F)$$

dont le terme E_∞ est le gradué associé à une filtration convenable de $H^\cdot_{\Lambda_1}(\Lambda, F)$, la cohomologie de $\varkappa(\omega)$ étant celle associée à la partie Γ_ω de $\mathcal{P}\varkappa(\omega)$ définie par $\Gamma_\omega = \{\gamma' \mid \gamma' = \varkappa(\omega) \cap \gamma, \gamma \in \Gamma\}$.

DEMONSTRATION : D'après l'isomorphisme (i) la cohomologie du double complexe:

$$\text{(ii)} \qquad \underset{\Gamma}{\overrightarrow{lim}}\ \underset{\gamma}{Hom}(\underset{(\varkappa_\gamma, \varkappa^1_\gamma)}{\overrightarrow{lim}} L., F^\cdot)$$

est l'aboutissement de la suite spectrale donnée par :

$$E_2^{p,q} = \underset{\Omega}{\overleftarrow{lim}}^{(p)} R^q \underset{\Gamma}{\overrightarrow{lim}}\ \underset{(\varkappa_\gamma, \varkappa^1_\gamma)}{\overleftarrow{lim}} F = \underset{\Omega}{\overleftarrow{lim}}^{(p)} H^q_{\varkappa_1(\omega)}(\varkappa(\omega), F)$$

D'autre part, par exactitude de $\underset{\Gamma}{\overrightarrow{lim}}$ dans la catégorie des groupes abéliens, $\underset{\Gamma}{\overrightarrow{lim}}$ commute avec la cohomologie. Or, par hypothèse $\underset{(\varkappa_\gamma, \varkappa^1_\gamma)}{\overrightarrow{lim}}$ est exact donc $H_q(\underset{(\varkappa_\gamma, \varkappa^1_\gamma)}{\overrightarrow{lim}} L.) = 0$

1) pourvu que L_m est "de type fini". On peut s'arranger pour que ceci soit vrai, si on suppose que Ω contient un sous-ensemble fini Ω_o tel que $\underset{\Omega}{\overleftarrow{lim}}^{(n)} \simeq \underset{\Omega_o}{\overleftarrow{lim}}^{(n)}$ pour tout $n \geq 0$.

si $q \neq 0$, et $H_o(\underset{(\overrightarrow{\varkappa_\gamma}, \varkappa^1_\gamma)}{lim.} L.) = \underset{(\overrightarrow{\varkappa_\gamma}, \varkappa^1_\gamma)}{lim.} L = L_{\gamma, \gamma_1}$, donc la deuxième suite spectrale du double complexe (ii) dégénère, et on trouve:

$$H^n(\underset{\overrightarrow{\Gamma}}{lim.} Hom.(\underset{\overrightarrow{\gamma}}{lim.} L., F^\bullet)) = H^n(\underset{\overrightarrow{\Gamma}}{lim.} \underset{\gamma}{Hom.}(L_{\gamma,\gamma_1}, F^\bullet)) =$$

$$= H^n(\underset{\overrightarrow{\Gamma}}{lim.} \underset{\overleftarrow{(\gamma,\gamma_1)}}{lim.} F^\bullet) = H^n_{\Lambda_1}(\Lambda, F).$$

Q. E. D.

Soit maintenant $\mathfrak{X}$ une partie de $\mathcal{P}\Omega$ composée de filtres, telle que si $\chi \in \mathfrak{X}$ alors la réunion $\varkappa(\chi)$ des $\varkappa(\omega)$ pour $\omega \in \chi$ est un filtre dans Λ. Supposons vérifiées les conditions suivantes:

f) Γ est filtrant.

g) Pour tout $\chi \in \mathfrak{X}$ et tout $\lambda \in \Lambda$ on a, $\varkappa^{-1}(\lambda) \cap \chi$ est connexe et $\underset{\overrightarrow{\varkappa^{-1}(\lambda) \cap \chi}}{lim.}$ est exact.

Soit pour tout $\chi \in \mathfrak{X}$, $(\varkappa/\chi)$ la restriction de $\varkappa$ à χ, alors la condition g) assure que $(\varkappa/\chi)$ satisfait aux conditions a), b) et c), d) de § 1, donc on a pour tout $\chi \in \mathfrak{X}$, et pour toute résolution $\amalg$-projective L. de l'objet constant L dans $Hom.(\chi, Mod._L)$, un isomorphisme de double-complexes:

(iii) $$\underset{\chi}{Hom.}(L., \underset{\overrightarrow{\Gamma}_\chi}{lim.} \underset{\overleftarrow{(\varkappa_\gamma, \varkappa^1_\gamma)}}{lim.} F^\bullet) \simeq \underset{\overrightarrow{\Gamma}_\chi}{lim.} \underset{\gamma}{Hom.}(\underset{\overrightarrow{((\varkappa/\chi)_\gamma, (\varkappa/\chi)^1_\gamma)}}{lim.} L., F^\bullet)$$

où Γ_χ est le sous-ensemble de Γ des γ tels que $\gamma \subset \varkappa(\chi)$. Soit pour tout $\chi \in \mathfrak{X}$, $C.(\chi)$ la résolution $\amalg$-projective standard de l'objet constant L dans $Hom.(\chi, Mod._L)$ (voir(3)). Si $\chi' < \chi$ alors il existe une flèche canonique $C.(\chi') \to i^*C.(\chi)$ dans $Hom.(\chi', Mod._L)$ où $i: \chi' \to \chi$ est le foncteur canonique. Il en résulte des morphismes de double-complexes: [2]

$$\underset{\chi}{Hom.}(C.(\chi), \underset{\overrightarrow{\Gamma}_\chi}{lim.} \underset{\overleftarrow{(\varkappa_\gamma, \varkappa^1_\gamma)}}{lim.} F^\bullet) \to \underset{\chi'}{Hom.}(C.(\chi'), \underset{\overrightarrow{\Gamma}_{\chi'}}{lim.} \underset{\overleftarrow{(\varkappa_\gamma, \varkappa^1_\gamma)}}{lim.} F^\bullet)$$

et

$$\underset{\overrightarrow{\Gamma}_\chi}{lim.} \underset{\gamma}{Hom.}(\underset{\overrightarrow{((\varkappa/\chi)_\gamma, (\varkappa/\chi)^1_\gamma)}}{lim.} C.(\chi), F^\bullet) \to \underset{\overrightarrow{\Gamma}_{\chi'}}{lim.} \underset{\gamma}{Hom.}(\underset{\overrightarrow{((\varkappa/\chi')_\gamma, (\varkappa/\chi')^1_\gamma)}}{lim.} C.(\chi'), F^\bullet)$$

2) Il faut supposer que χ contient un sous-ensemble fini χ_o tel que $\underset{\overleftarrow{\chi}}{lim}^{(n)} \simeq \underset{\overleftarrow{\chi_o}}{lim}^{(n)}$ pour tout $n \geq 0$, voir 1).

commutant avec l'isomorphisme (iii). Considérons alors l'isomorphisme de double-comple-
-xes :

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ \mathfrak{X}}} \operatorname{Hom}_\chi(C.(\chi), \lim_{\substack{\rightarrow \\ \Gamma}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ (\varkappa_\gamma, \varkappa_\gamma^1)}} F^\cdot) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \mathfrak{X}}} \lim_{\substack{\rightarrow \\ \Gamma_\chi}} \operatorname{Hom}_\gamma(\lim_{\substack{\rightarrow \\ ((\varkappa/\chi)_\gamma, (\varkappa/\chi)_\gamma^1)}} C.(\chi), F^\cdot)$$

et calculons les suites spectrales des deux complexes, on trouve :

COROLLAIRE. *Supposons que $\mathfrak{X}$ est filtrant, alors il existe une suite spectrale donnée par :*

$$E_2^{p,q} = H^p(\Omega, \underline{H}^q_{\varkappa_1}(F))$$

où $\underline{H}^q_{\varkappa_1}(F)$ est l'objet dans $\operatorname{Hom}.(\Omega, \operatorname{Mod}._L)$ défini par $H^p_{\varkappa_1}(F)_\omega = H^p_{\varkappa_1(\omega)}(\varkappa(\omega), F)$ et dont le terme E_∞ est le gradué associé à une filtration convenable de :

$$H^\cdot_{\Lambda_1}(\Lambda, F)$$

Soit maintenant G un objet dans $\operatorname{Hom}.(\Lambda^o, \operatorname{Mod}._L)$, et supposons que $\varkappa : \Omega^o \to \mathcal{P}\Lambda^o$ vérifie les conditions a', b', c' et d', du § 1

THEOREME 2. *Supposons que soient satisfaites les conditions suivantes :*

1) Ω contient un sous-ensemble fini Ω_1, tel que $\lim\limits_{\substack{\rightarrow \\ \Omega_1^o(n)}} \simeq \lim\limits_{\substack{\rightarrow \\ \Omega^o(n)}}$ pour tout $n \geq 0$.

2) On a, $\bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} \gamma = \phi$

3) $\lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ \Gamma^o}}{}^{(p)} = 0$ pour $p \geq 2$.

Dans ce cas il existe une suite spectrale donnée par :

$$E^2_{p,q} = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \Omega^o}}{}^{(p)} H_q^{\varkappa_1(\omega)}(\varkappa(\omega), G)$$

dont le terme E_∞ est le gradué associé à une filtration convenable de :

$$H_\cdot^{\Lambda_1}(\Lambda, G)$$

l'homologie de $\varkappa(\omega)$ étanr la Γ_ω-homologie.

DEMONSTRATION. Pour commencer, remarquons que si Γ contient un plus petit élément, alors la conclusion est une conséquence immédiate de §1.(ii) et §3(iii).
Dans le cas non trivial on sait depuis §1.(ii) que l'on a un isomorphisme fonctoriel en G

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ \Omega^o}} \lim_{\substack{\rightarrow \\ (\varkappa_\gamma, \varkappa_\gamma^1)}} G \simeq \lim_{\substack{\rightarrow \\ (\gamma^o, \gamma_1^o)}} G$$

donc un isomorphisme fonctoriel :

$$\varprojlim^{(1)}_{\Gamma^o} \varinjlim_{\Omega^o} \varinjlim_{(\varkappa_\gamma,\, \varkappa^1_\gamma)} G \simeq \varprojlim^{(1)}_{\Gamma^o} \varinjlim_{(\theta,\, \theta_1)} G$$

Or, on va montrer que $\varprojlim^{(1)}_{\Gamma^o}$ et $\varinjlim_{\Omega^o}$ commutent. Cela résultera du lemme suivant:

LEMME. *Soit Ω un ensemble ordonné fini, et soit Γ un ensemble ordonné tel que $\varprojlim^{(p)}_{\Gamma} = 0$ pour tout $p \geq 2$, alors pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a le diagramme suivant:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & 0 \\
& \varprojlim^{(1)}_{\Gamma} \varinjlim^{(n+1)}_{\Omega} \arrow[dr] & & \varinjlim^{(n+1)}_{\Omega} \varprojlim^{(1)}_{\Gamma} \arrow[ur] & \\
& & R^n \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& \varinjlim^{(n)}_{\Omega} \varprojlim_{\Gamma} \arrow[ur] & & \varprojlim_{\Omega} \varinjlim^{(n)}_{\Omega} \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & & & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel les suites sont exactes.

En particulier, pour $n = -1$, on a un isomorphisme de foncteurs:

$$\varprojlim^{(1)}_{\Gamma} \varinjlim_{\Omega} \simeq \varinjlim_{\Omega} \varprojlim^{(1)}_{\Gamma}$$

DEMONSTRATION. Soit F un objet dans $Hom.(\Omega\times\Gamma, Mod.)$ et considérons le double-complexe:

$$\coprod_{(\Omega,\Omega)}{}_{*} \prod^{*}_{(\Gamma,\Gamma)} F$$

(voir(3( ). Puisque Ω est fini, on voit qu'en chaque degré, $\coprod_*$ est indexé par un ensemble fini. Il en résulte que $\coprod_*$ commute avec $\prod^*$, d'où un isomorphisme de double-complexes.

$$\coprod_{(\Omega,\Omega)}{}_{*} \prod^{*}_{(\Gamma,\Gamma)} F \simeq \prod^{*}_{(\Gamma,\Gamma)} \coprod_{(\Omega,\Omega)}{}_{*} F$$

Les suites spectrales de ce double-complexe sont données par:

$$'E_2^{p,q} = \varinjlim_{\Omega}{}_{(-p)} \varprojlim_{\Gamma}{}^{(q)} F$$

$$''E_2^{p,q} = \varprojlim_{\Gamma}{}^{(p)} \varinjlim_{\Omega}{}_{(-q)} F$$

d'où la conclusion.

Q. E. D.

On a donc un isomorphisme fonctoriel en G:

(v) $$\varinjlim_{\Omega^o} \varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(1)} \varinjlim_{(\varkappa_\gamma, \varkappa_\gamma^1)} G \simeq \varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(1)} \varinjlim_{(\theta, \theta_1)} G$$

Si on démontre que, pour G $\amalg$-projectif dans $Hom.(\Lambda^o, Mod._L)$, on a:

(vi) $$\varinjlim_{\Omega^o}{}_{(n)} (\varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(1)} \varinjlim_{(\varkappa_\gamma, \varkappa_\gamma^1)} G) = 0 \quad \text{pour } n \geq 1,$$

alors on sait que la suite spectrale du foncteur composé:

$$\varinjlim_{\Omega^o} (\varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(1)} \varinjlim_{(\varkappa_\gamma, \varkappa_\gamma^1)} G)$$

donnée par:

$$E^2_{p,q} = \varinjlim_{\Omega^o}{}_{(p)} L_q (\varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(1)} \varinjlim_{(\varkappa_\gamma, \varkappa_\gamma^1)}) G$$

aboutit à:

$$L.(\varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(1)} \varinjlim_{(\theta, \theta_1)}) G$$

d'où le théorème 2. Montrons donc (vi). Compte tenu de §1.(ii), si G est projectif dans $Hom.(\Lambda^o, Mod._L)$ alors $\varinjlim_{(\varkappa_\gamma, \varkappa_\gamma^1)} G$ est projectif dans $Hom.(\Omega^o, Mod._L)$, le foncteur $\varprojlim_{(\varkappa_\gamma, \varkappa_\gamma^1)}$ étant par hypothèse exact.

Utilisant le lemme on voit que pour démontrer (vi) il suffit de montrer que, si G est $\amalg$-projectif, alors on a:

(vii) $$\varprojlim_{\Gamma}{}^{(1)} \varinjlim_{\Omega}{}_{(n)} \varinjlim_{(\varkappa_\gamma, \varkappa_\gamma^1)} G = 0 \quad \text{pour } n \geq 1$$

(viii) $$\varprojlim_{\Gamma} \varinjlim_{\Omega} {}^{(n)}\varinjlim_{(\varkappa_\gamma, \varkappa_\gamma^1)} G = 0 \quad \text{pour } n \geq 0$$

Or, $\varinjlim_{(\varkappa_\gamma, \varkappa_\gamma^1)} G$ étant projectif, (vii) est trivial, et il suffit quant à (viii) de montrer que

$$\varprojlim_{\Gamma} \varinjlim_{\Omega} \varinjlim_{(\varkappa_\gamma, \varkappa_\gamma^1)} G = 0$$

ce qui est immédiat.

Q. E. D.

De même, avec les données ci-dessus, sous les conditions f) et g), on va démontrer le corollaire suivant.

COROLLAIRE. *Supposons que soient satisfaites les conditions suivantes:*

1. *Tout* $\chi \in \mathfrak{X}$ *contient un sous-ensemble fini* χ_1 *tel que:*

$$\varinjlim_{\chi_1^o}{}^{(n)} \simeq \varinjlim_{\chi^o}{}^{(n)} \quad \textit{pour tout } n \geq 0$$

2. *On a* $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma = \phi, \ \bigcap_{\chi \in \mathfrak{X}} \chi = \phi$

3. $\varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(p)} = 0, \ \varprojlim_{\mathfrak{X}^o}{}^{(p)} = 0 \qquad$ *pour tout* $p \geq 2$.

Dans ce cas il existe une suite spectrale donnée par:

$$E^2_{p,q} = H_p(\Omega, \underline{H}^{\varkappa_1}_q(G))$$

où $\underline{H}^{\varkappa_1}_q(G)$ *est l'objet dans* $Hom.(\Omega^o, Mod._L)$, *donné par* $\underline{H}^{\varkappa_1}_q(G)_\omega = H^{\varkappa_1(\omega)}_q(\varkappa(\omega), G)$, *dont le terme* E^∞ *est le gradué associé à une filtration convenable de:*

$$H^{\Lambda_1}_\bullet(\Lambda, G)$$

DEMONSTRATION. Puisque Γ^o_χ, par hypothèse est cofinal dans Γ^o, on a, en remplaçant Ω par χ dans (v), un isomorphisme fonctoriel en G:

(ix) $$\varinjlim_{\chi^o} \varprojlim_{\Gamma^o_\chi}{}^{(1)} \varinjlim_{((\varkappa/\chi)_\gamma, (\varkappa/\chi)^1_\gamma)} G \simeq \varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(1)} \varinjlim_{(\theta, \theta_1)} G$$

Il en résulte:

(x) $$\varprojlim_{\mathfrak{X}^o} \varinjlim_{\chi^o} \varprojlim^{(1)}_{\Gamma^o_\chi} \varinjlim_{((\varkappa/\chi)_\gamma (\varkappa/\chi)^1_\gamma)} G \simeq \varprojlim^{(1)}_{\Gamma^o} \varinjlim_{(\theta, \theta_1)} G$$

(xi) $$\varprojlim^{(1)}_{\mathfrak{X}^o} \varinjlim_{\chi^o} \varprojlim^{(1)}_{\Gamma^o_\chi} \varinjlim_{((\varkappa/\chi)_\gamma (\varkappa/\chi)^1_\gamma)} G = 0$$

D'autre part, il résulte de la suite spectrale du foncteur composé $\varprojlim^{(1)}_{\mathfrak{X}^o} \varinjlim_{\chi^o}$, qui aboutit à $L.(\varprojlim^{(1)}_{\mathfrak{X}^o} \varinjlim_{\Gamma^o})$, une suite exacte :

(xii) $$0 \to \varprojlim_{\mathfrak{X}^o} \varinjlim_{\chi^o}{}_{(n-1)} \to L_n(\varprojlim^{(1)}_{\mathfrak{X}^o} \varinjlim_{\chi^o}) \to \varprojlim^{(1)}_{\mathfrak{X}^o} \varinjlim_{\chi^o}{}_{(n)} \to 0$$

Ceci dit, calculons les suites spectrales du foncteur composé :

$$(\varprojlim^{(1)}_{\mathfrak{X}^o} \varinjlim_{\chi^o}) \circ (\varprojlim^{(1)}_{\Gamma^o_\chi} \varinjlim_{((\varkappa/\chi)_\gamma (\varkappa/\chi)^1_\gamma)})$$

elles sont données par :

$$'E^2_{p\,.\,q} = L_p(\varprojlim^{(1)} \varinjlim_{\chi^o}) L_q(\varprojlim^{(1)}_{\Gamma^o_\chi} \varinjlim_{((\varkappa/\chi)_\gamma (\varkappa/\chi)^1_\gamma)}) = H_{p-1}(\Omega, \underline{H}^{\varkappa_1}_{q-1}(*))$$

$$''E^2_{p\,.\,q} = L_p(L_q(\varprojlim^{(1)}_{\mathfrak{X}^o} \varinjlim_{\chi^o})(\varprojlim^{(1)}_{\Gamma^o_\chi} \varinjlim_{((\varkappa/\chi)_\gamma (\varkappa/\chi)^1_\gamma)}))$$

Or, on sait que pour G $\amalg$- projectif, on a :

$$\varinjlim_{\chi^o}{}_{(n)} \varprojlim^{(1)}_{\Gamma^o_\chi} \varinjlim_{((\varkappa/\chi)_\gamma (\varkappa/\chi)^1_\gamma)} G = 0 \qquad \text{si } n \geq 1$$

donc, par (xi) et (xii) :

$$L_q(\varprojlim^{(1)}_{\mathfrak{X}^o} \varinjlim_{\chi^o})(\varprojlim^{(1)}_{\Gamma^o_\chi} \varinjlim_{((\varkappa/\chi)_\gamma (\varkappa/\chi)^1_\gamma)})G = 0 \qquad \text{si } q \neq 1$$

De plus, par (x) et (xii) on a :

$$L_1(\varprojlim^{(1)}_{\mathfrak{X}^o} \varinjlim_{\chi^o})(\varprojlim_{\Gamma^o_\chi} \varinjlim_{((\varkappa/\chi)_\gamma (\varkappa/\chi)^1_\gamma)})G =$$

$$= (\varprojlim_{\mathfrak{X}^o} \varinjlim_{\chi^o})(\varprojlim^{(1)}_{\Gamma^o_\chi} \varinjlim_{((\varkappa/\chi)_\gamma (\varkappa/\chi)^1_\gamma)})G =$$

$$= \varprojlim^{(1)}_{\Gamma^o} \varinjlim_{(\theta, \theta_1)} G$$

Il en résulte :

$$''E^2_{p,q} = 0 \quad \text{si } q \neq 1$$

$$''E^2_{n,1} = L_n(\varprojlim_{\Gamma^o}{}^{(1)} \varinjlim_{(\theta,\theta_1)}) = H^L_{n-1}(\Lambda,*),$$

d'où le corollaire.

Q. E. D

5. Cohomologie des préfaisceaux. Homologie des copréfaisceaux.

La théorie générale exposée ci-devant, donne pour les espaces topologiques, une théorie Čechiste.

L'ensemble ordonné associé à l'espace topologique X, et qui jouera le rôle de Λ dans §3, sera évidemment l'ensemble O_X de tous les ouverts non vides de X, ordonné par inclusion ($i.e.\ O < O'$ si et seulement si $O \subset O'$).

Soit, pour tout recouvrement ouvert de U de X, U_X l'ensemble de tous les ouverts de X contenu dans un élément de U, alors U_X est un filtre de O_X, au sens de §3. L'ensemble M_X des U_X, U parcourant l'ensemble des recouvrements ouverts de X, jouera le rôle de Γ dans §3.

On a :

(i) Pour tout espace topologique X, M_X filtrant.

(ii) Si X est T_1, et ne contient pas de points isolés, alors on a : $\bigcap_{m \in M_X} m = \phi$.

(iii) Si X est compact métrique, alors :

a) $\varprojlim_{M^o_X}{}^{(p)} = 0$ si $p \geq 2$.

b) Il existe un sous-ensemble cofinal M_1 dans M_X, tel que tout $m \in M_1$ contient un sous-ensemble fini m_1 pour lequel on a : $\varinjlim_{m^o_1}{}_{(p)} \simeq \varinjlim_{m^o}{}_{(p)}$ pour tout $p \geq 0$.

En effet, (i) et (ii) étant triviaux, il reste à vérifier (iii). Or, X étant métrique compacte on sait qu'il existe un sous-ensemble dénombrable cofinal dans l'ensemble de tous les recouvrements ouverts de X, formé de recouvrements finis. Il suffit alors de démontrer que, si U est un recouvrement ouvert fini, alors U_X contient un sous-ensemble fini m_1 tel que :

$$\varinjlim_{U^o_X}{}_{(p)} \simeq \varinjlim_{m^o_1}{}_{(p)} \text{ pour tout } p \geq 0.$$

ce qui résulte de la Proposition 4.3 de (3).

La cohomologie d'un espace topologique quelconque, au sens du §3 est, compte tenu de (i) et du §3 (vii) canoniquement isomorphe à la cohomologie de Čech ordinaire.

Le théorème 1 et son corollaire s'appliquent et on obtient les suites spectrales de Leray associées à une application continue, un recouvrement quelconque, un système inductif de sous-espaces, etc... Bornons nous à expliciter une suite spectrale, moins connue que les autres, reliant la cohomologie ordinaire à la cohomologie relative (voir Grothendieck, Séminaire J. H. E. S. 1962. exposé n° 1). Dans le corollaire du théorème 1, posons $\Omega = \Lambda = O_X$, $\mathfrak{X} = \Gamma = M_X$ et soient Λ_1 le sous-ensemble de Λ, $\{O \mid O \in O_X, O \cap Y = \phi\}$ Y étant une partie quelconque de X, et $\varkappa$ l'application $O_X \to \mathcal{P} O_X$ définie par $\varkappa(O) = \{O' \mid O' \in O_X, O' \subset O\}$. On posera :

$$H_Y^q(X, F) = H_{\Lambda_1}^q(\Lambda, F), \quad \underline{H}_Y^q(F) = \underline{H}_{\varkappa_1}^q(F)$$

Par définition de $\underline{H}_Y^q(F)$ on a : $\underline{H}_Y^q(F)_V = {}'H^q_{\varkappa_1(V)}(\varkappa(V), F)$ où $'H^\bullet$ est la Γ_V -cohomologie de $\varkappa(V)$, la partie Γ_V de $\mathcal{P}\varkappa(V)$ étant définie par $\Gamma_V = \{m' \mid m' \subset \varkappa(V), m' = m \cap O_V, m \in M_X\}$. En utilisant le corollaire 2 du théorème 2 de (3), on trouve facilement que :

$${}'H^q_{\varkappa_1(V)}(\varkappa(V), F) = H^q_{\overline{V} \cap Y}(\overline{V}, F')$$

où F' est le préfaisceau $i_*(F/V)$ sur $\overline{V}$ défini par l'injection canonique $i : V \to \overline{V}$.

On peut donc écrire à nouveau le corollaire du théorème 1, et on a :

(iv) Il existe une suite spectrale donnée par :

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \underline{H}_Y^q(F))$$

aboutissant à $H_Y^\bullet(X, F)$.

L'homologie d'un espace topologique X diffère, compte tenu du §2(ix), de l'homologie de Čech au sens classique, même si on suppose que X est compact métrique. Cependant, dans ce cas, il résulte de (ii), (iii) et du §3(viii) que l'homologie est un ∂-foncteur universel sur la catégorie des copréfaisceaux sur X. Aussi, dans ce cas, le théorème 2 et son corollaire s'appliquent. On trouve alors des suites spectrales associées à une application continue d'un espace métrique compact dans un autre, un recouvrement fini d'un espace métrique compact, etc... Nous n'allons pas expliciter ces choses, la procédure étant immédiate. Cependant, il y a lieu de retenir la suite spectrale, duale à celle de (iv). Le corollaire du théorème 2 donne en effet le résultat suivant :

(v) Supposons que X est un espace métrique compact, et soit Y une partie quelconque de X, alors il existe une suite spectrale donnée par :

$$E^2_{p,q} = H_p(X, \underline{H}_q^Y(G))$$

aboutissant à $H^Y_\bullet(X, G)$.

le copréfaisceau $\underline{H}_q^Y(G)$ étant donné par $\underline{H}_q^Y(G)_V = H_q^{Y \cap \overline{V}}(\overline{V}, G')$, où $G' = i_*(G/V)$.

Il en résulte une sorte de dualité, analogue à celle pour la cohomologie déduite de (iv) (voir Grothendieck, Séminaire J. H. E. S. 1962. exposé 1. Remarque). Nous y reviendrons plus tard.

Bibliographie.

[1] R. DEHEUVELS. Comptes rendus, 250 , 1960 , p. 2492 .

[2] R. DEHEUVELS. Séminaire Dubreuil-Pisot 1961 .

[3] O.A. LAUDAL . Sur la limite projective et la théorie de dimension I , Séminaire Ehresmann 1961.

[4] H. CARTAN et S. EILENBERG. Homological Algebra. Princeton 1956 .