Séminaire de topologie et géométrie différentielle

Olav Arnfinn Laudal

Sur la limite projective et la théorie de la dimension. II

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 3 (1960-1962), exp. nº 5, p. 15-23
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1960-1962__3__A7_0>

Janvier 1962

SUR LA LIMITE PROJECTIVE ET LA THEORIE DE LA DIMENSION. II

par OLAV ARNFINN LAUDAL

Introduction. Soit $\underline{C}$ une catégorie et considérons la catégorie des foncteurs sur $\underline{C}$ à valeurs dans Mod_L, notée $Hom(\underline{C}, Mod_L)$. Nous dirons que $dim\,\underline{C}$ est plus petit ou égal à n si, pour tout objet F dans $Hom(\underline{C}, Mod_L)$, $\varprojlim^{(q)} F = 0$ pour $q > n$. Il est clair que, par le Corollaire de la Proposition 2.1 de (1), $dim\,\underline{C}$ est égal à la dimension projective de l'objet L dans $Hom(\underline{C}, Mod_L)$.

Nous pouvons aussi démontrer que si C est un arbre alors $dim\, C \leq 1$. En effet, soit L_o l'objet $\amalg$-*projectif* de $Hom(C, Mod_L)$ défini par la famille $\{\overline{L}^o_c\}_{c\in C}$ où $\overline{L}^o_c = L$ pour tout $c \in C$. Nous avons une surjection évidente $L_o \xrightarrow{i} L$. Il faut démontrer que $ker\, i$ est un objet projectif dans $Hom(C, Mod_L)$. Or soit pour tout $c \in C$, R_c l'ensemble des $c' > c$ minimaux. Posons $\overline{L}'_c = \coprod_{c'\in R_c} L_{c'}$ où $L_{c'} = L$ pour tout c'. Appliquons $\overline{L}^1_c$ dans $(ker\, i)_c$ par l'application $\overline{j}_c$ définie par: Soit $1_{c'} \in L_{c'} \subset \overline{L}^1_c$ alors $\overline{j}_c(1_{c'}) = (1_{c'}, -1_c) \in \overline{L}^o_{c'} \oplus \overline{L}^o_c$. Soit L_1 l'objet $\amalg$-projectif défini par la famille $\{\overline{L}^1_c\}_{c\in C}$. Il existe alors une application $L_1 \xrightarrow{j} ker\, i$. Il faut voir que j est un isomorphisme. Pour cela il suffit de remarquer que C étant un arbre les éléments de $(ker\, i)_{co}$ de la forme $(1_{c'}, -1_c) \in \overline{L}^o_{c'} \oplus \overline{L}^o_c$, $c' \in R_c$, $c > c_o$ forment une base de $(ker\, i)_{co}$.

En particulier nous avons $dim\, \mathbf{Z}^+ = 1$.

Nous allons supposer dès maintenant que $\underline{C}$ est un ensemble ordonné Γ. Un objet F dans $Hom(\Gamma, Mod_L)$ se note $\{F_\gamma, \eta^{\gamma'}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ où $\eta^{\gamma'}_\gamma = F(\gamma < \gamma')$. Nous dirons qu'un tel *système projectif* F est de *type fini, fini*, etc. si chacun des F_γ a ces propriétés et nous dirons que F est *surjectif* si pour tout $\gamma < \gamma'$ l'application $\eta^{\gamma'}_\gamma$ est un homomor-phisme surjectif.

Soit Γ' un sous-ensemble de Γ. Considérons l'application canonique $\Delta^\Gamma_{\Gamma'}$: $\varprojlim_\Gamma F \to \varprojlim_{\Gamma'} F$. Nous dirons alors que F est *flasque* si pour tout choix de $\Gamma' \subset \Gamma$ l'application $\Delta^\Gamma_{\Gamma'}$ est surjective.

Il est facile de construire des systèmes projectifs qui sont surjectifs mais non flasques. Cependant, si $\Gamma = \mathbf{Z}^+$ tout système projectif surjectif est flasque, et il n'existe essentiellement qu'un seul ensemble ordonné avec cette propriété, comme l'a montré Henkin (3).

1. La condition de Mittag-Leffler.

Soit Γ un ensemble ordonné filtrant à droite par $<$.

DEFINITION 1 : *Nous dirons que le système projectif* $\{F_\gamma, \eta_\gamma^{\gamma'}\}_{\gamma\in\Gamma}$ *est* essentiel--lement nul *si, pour tout* $\gamma\in\Gamma$ *il existe un* $\gamma' > \gamma$ *tel que* $\eta_\gamma^{\gamma'}$ *est nul.*

DEFINITION 2 : *Soit* $\{F_\gamma, \eta_\gamma^{\gamma'}\}_{\gamma\in\Gamma}$ *un système projectif. Nous dirons alors que* F *vérifie la* condition de Mittag-Leffler [1] *si, pour tout* $\gamma\in\Gamma$, *il existe un* $\gamma' > \gamma$ *tel que pour tout* $\gamma'' > \gamma'$ *nous avons :*

$$im\ \eta_\gamma^{\gamma''} = im\ \eta_\gamma^{\gamma'}$$

DEFINITION 3 : *Deux systèmes projectifs* $\{F_\gamma, \eta_\gamma^{\gamma'}\}_{\gamma\in\Gamma}$ *et* $\{G_\lambda, \rho_\lambda^{\lambda'}\}_{\lambda\in\Lambda}$ *seront dits isomorphes s'il existe une application croissante biunivoque* $\pi: \Gamma \to \Lambda$ *telle que:* $F_\gamma = G_{\pi(\gamma)}$, $\eta_\gamma^{\gamma'} = \rho_{\pi(\lambda)}^{\pi(\lambda')}$ *pour tout couple* $\gamma < \gamma'$ *de* Γ.

DEFINITION 4: *Soient* $\{F_\gamma, \eta_\gamma^{\gamma'}\}_{\gamma\in\Gamma}$ *et* $\{G_\lambda, \rho_\lambda^{\lambda'}\}_{\lambda\in\Lambda}$ *deux systèmes projectifs. Nous dirons que* F *et* G *sont équivalents si existent un système projectif* $\{H_i, \mu_i^{i'}\}_{i\in I}$ *et deux sous-ensembles cofinals* I_1, I_2 *de* I *tels que* $\{H_i, \mu_i^{i'}\}_{i\in I_1}$ *est isomorphe à* F *et* $\{H_i, \mu_i^{i'}\}_{i\in I_2}$ *est isomorphe à* G.

Par le corollaire de la Proposition 4.3 de (1) nous savons que si F et G sont équivalents alors il existe un isomorphisme:

$$\varprojlim_{\Gamma}{}^{(n)} K\circ F \simeq \varprojlim_{\Lambda}{}^{(n)} K\circ G$$

pour tout foncteur K sur Mod_L à valeurs dans Mod_L.

PROPOSITION : *Le système projectif* F *satisfait à la condition de Mittag-Leffler si, et seulement si, il est équivalent à un système projectif surjectif.*

DEMONSTRATION : Si F est équivalent à un système surjectif alors F vérifie triviale--ment la condition de Mittag-Leffler.

Soit f une fonction croissante $\Gamma \to \Gamma$ telle que pour tout $\gamma' > f(\gamma)$, $im\,\eta_\gamma^{\gamma'} = im\,\eta_\gamma^{f(\gamma)}$. Une telle fonction existe par l'hypothèse. Soit H le système projectif défini par:

1) Nous avons dans (2) utilisé le mot " stable " pour cette propriété.

$$\Pi = \{ (\gamma, \gamma') \mid \gamma < \gamma' \} \subset \Gamma \times \Gamma$$

$$H_{(\gamma,\gamma')} = im\,\eta_{\gamma}^{\gamma'} \quad \text{pour} \quad (\gamma, \gamma') \in \Pi .$$

Si $(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}') > (\gamma, \gamma')$ c'est-à-dire si $\bar{\gamma} > \gamma, \bar{\gamma}' > \gamma'$ alors $\mu_{(\gamma,\gamma')}^{(\bar{\gamma},\bar{\gamma}')} = \eta_{\gamma}^{\bar{\gamma}}$ restriction à $im\,\eta_{\bar{\gamma}}^{\bar{\gamma}'}$.

Soient :

$$\Delta = \{ (\gamma, \gamma) \mid \gamma \in \Gamma \} \subset \Pi$$

$$\Delta_f = \{ (\gamma, f(\gamma)) \mid \gamma \in \Gamma \} \subset \Pi$$

alors il est facile de vérifier que $\{ H_{(\gamma,\gamma')}, \mu_{(\gamma,\gamma')}^{(\bar{\gamma},\bar{\gamma}')} \}_{(\gamma,\gamma') \in \Delta}$ est isomorphe à F et que $\{ H_{(\gamma,\gamma')}, \mu_{(\gamma,\gamma')}^{(\bar{\gamma},\bar{\gamma}')} \}_{(\gamma,\gamma') \in \Delta_f}$ est surjectif.

Q. E. D.

REMARQUE : De la même manière on voit que F est essentiellement nul si, et seulement si, F est équivalent à un système nul.

Si pour tout γ il existe un $\gamma' > \gamma$ tel que $im\ \eta_{\gamma}^{\gamma'}$ est de type fini, fini etc. alors F est équivalent à un système de type fini, fini etc.

Pour $\Gamma = \mathbf{Z}^+$ tout système surjectif est flasque donc si F vérifie la condition de Mittag-Leffler nous avons $\underleftarrow{lim}^{(q)} F = 0$ pour tout $q \geq 1$. Puisque $dim\ \mathbf{Z}^+ = 1$ il revient au même de dire que $\underleftarrow{lim}^{(1)} F = 0$.

Nous nous proposons de trouver des conditions pour que la réciproque soit vraie. Ce n'est pas vrai, en général, comme le montre l'exemple suivant.

Soit M un module complet, séparé, c'est-à-dire un module contenant une famille $\{M_n\}_{n \in \mathbf{Z}^+}$ de sous-modules telle que $M_n \supset M_{n+1}$, $\bigcap_{n \geq 0} M_n = 0$, $M_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}^+$ et telle que : $M \simeq \underleftarrow{lim}\, M/M_n$, alors le système projectif $\{M_n, id\}_{n \in \mathbf{Z}^+}$ ne satisfait pas à la condition de Mittag-Leffler.

Pourtant nous pouvons considérer la suite exacte

$$0 \to M_n \to M \to M/M_n \to 0$$

comme une suite exacte de systèmes projectifs. Donc il vient une suite exacte :

$$0 \to \underleftarrow{lim}\, M_n \to \underleftarrow{lim}\, M \to \underleftarrow{lim}\, M/M_n \to \underleftarrow{lim}^{(1)} M_n \to 0$$

Or $\underleftarrow{lim}\, M = M \simeq \underleftarrow{lim}\, M/M_n$ donc $\underleftarrow{lim}\, M_n = 0$ et $\underleftarrow{lim}^{(1)} M_n = 0$

Nous allons voir que cet exemple est typique.

THEOREME 1 : *Soit $\{F_n, \eta_n^{n'}\}_{n \in \mathbf{Z}^+}$ un système projectif tel que :*

1) $\underleftarrow{lim}^{(q)} F = 0$ pour $q = 0, 1$.

2) il existe un n_o tel que pour tout $n \geq n_o$ F_n n'est pas complet séparé.

Dans ce cas F est essentiellement nul.

COROLLAIRE 1 : Soit $\{F_n, \eta_n^{n'}\}_{n \in \mathbf{Z}^+}$ un système projectif tel que :

1) $\lim^{(1)} F = 0$.

2) Soit $\pi_n : \varprojlim F \to F_n$ l'application canonique, alors il existe un n_o tel que pour tout $n \geq n_o$ $F_n / im\ \pi_n$ n'est pas complet séparé.

Dans ce cas F vérifie la condition de Mittag-Leffler.

COROLLAIRE 2 : Soit F un système projectif surjectif tel que $\varprojlim F$ n'est pas complet séparé alors il existe un n_o tel que le système $\{F_n, \eta_n^{n'}\}_{n \geq n_o}$ est constant.

COROLLAIRE 3 : Soit F un système projectif tel que :

1) $\varprojlim^{(1)} F = 0$.

2) il existe un n_o tel que $F_n / im\ \pi_n$ n'est pas complet séparé pour aucun $n \geq n_o$.

3) $\varprojlim F$ n'est pas complet séparé.

Dans ce cas il existe pour tout n des $n_2 \geq n_1 \geq n$ tels que l'application $\pi_{n_1} : \lim F \to im\ \eta_{n_1}^{n_2}$ est un isomorphisme.

DEMONSTRATION DU THEOREME 1. Soit H le système projectif défini par:

$$\Pi = \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+.$$

$$H_{(m,n)} = im\ \eta_{min(m,n)}^{max(m,n)}.$$

$$\mu_{(m,n)}^{(m',n')} = \text{restriction de } \eta_{min(m,n)}^{min(m',n')} \text{ à } H_{(m',n')}.$$

Puisque la diagonale $\Delta \subset \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ est cofinale dans Π et puisque $H_{(n,n)} = F_n$ nous avons: $\varprojlim^{(n)} F \simeq \varprojlim^{(n)} H$ pour tout $n \geq 0$. D'autre part nous avons:

$$\varprojlim_{\Pi} H = \varprojlim_m \varprojlim_n H_{(n,m)}$$

Considérons la suite spectrale du Corollaire 3. du Th. II de (1), donnée par:

$$E_2^{p,q} = \varprojlim_m{}^{(p)} \varprojlim_n{}^{(q)} H_{(n,m)}$$

Parce que $dim\, \mathbf{Z}^+ = 1$ nous avons $E_2^{p,q} = 0$ si $p > 1$ ou bien $q > 1$. Or, $\{\varprojlim_n H_{(n,m)}\}_{m \in \mathbf{Z}^+}$ étant un système projectif surjectif est flasque, donc $E_2^{1,o} = 0$.

Il vient alors:

$$\varprojlim_{\Pi}{}^{(1)} H = \varprojlim_m \varprojlim_n{}^{(1)} H_{(n,m)}$$

Nous allons montrer que le système projectif $\{\varprojlim_n{}^{(1)} H_{(n,m)}\}_{m \in \mathbf{Z}^+}$ est surjectif.

Pour m fixé, la suite exacte

$$0 \to H_{(n,m)} \to F_m \to F_m / H_{(n,m)} \to 0$$

peut être considéré comme une suite exacte de systèmes projectifs sur $\{n \mid n \in \mathbf{Z}^+,\ n \geq m\}$. Il en résulte la suite exacte :

$$\text{(i)} \qquad 0 \to \varprojlim_n H_{(n,m)} \to F_m \to \varprojlim_n F_m / H_{(n,m)} \to \varprojlim_n{}^{(1)} H_{(n,m)} \to 0$$

Pour $m' > m$ considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
\to F_{m'} & \to & \varprojlim_n F_{m'}/H_{(n,m')} & \xrightarrow{\partial'} & \varprojlim_n{}^{(1)} H_{(n,m')} & \to & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \eta^{m'}_m} & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle k} & & \\
\to F_m & \to & \varprojlim_n F_m/H_{(n,m)} & \xrightarrow{\partial} & \varprojlim_n{}^{(1)} H_{(n,m)} & \to & 0
\end{array}$$

Il s'agit de démontrer que k est surjectif. Soit alors $a \in \varprojlim_n{}^{(1)} H_{(n,m)}$. Il existe un $b \in \varprojlim_n F_m / H_{(n,m)}$ tel que $\partial(b) = a$. Or, $b = \sum_{n=m}^{\infty} b_n$ où $b_m \in F_m$ et $b_n \in H_{(n,m)}$ pour $n \geq m$. Nous pouvons supposer que $b_n = 0$ pour $n < m'$. En effet, par exactitude nous avons $\partial(b - \sum_{n=m}^{m'} b_n) = \partial(b) = a$. Soit donc $c_n \in F_n$ tel que $\eta^n_m(c_n) = b_n$ pour tout $n \geq m'$. L'élément $c = \sum_{n=m'}^{\infty} \eta^n_{m'}(c_n)$ existe dans $\varprojlim_n F_{m'}/H_{(n,m')}$ et il est clair que $j(c) = b$. Donc, par commutativité :

$$k \circ \partial'(c) = \partial \circ j(c) = a$$

c'est-à-dire k est surjectif.

Supposons maintenant que : $\lim^{(q)} F = 0$ pour $q = 0, 1$.
Puisque :

$$\varprojlim F = \varprojlim_m \varprojlim_n H_{(n,m)}$$
$$\varprojlim{}^{(1)} F = \varprojlim_m \varprojlim_n{}^{(1)} H_{(n,m)}$$

et puisque les deux systèmes projectifs

$$\{\varprojlim_n H_{(n,m)}\}_{m \in \mathbf{Z}^+} \quad \text{et} \quad \{\varprojlim_n{}^{(1)} H_{(n,m)}\}_{m \in \mathbf{Z}^+} \qquad \text{sont surjectifs}$$

il est clair que pour tout $m \geq 0$ nous avons :

$$\varprojlim_n H_{(n,m)} = \bigcap_{n \geq m} \operatorname{im} \eta^n_m = 0$$

$$\varprojlim_n{}^{(1)} H_{(n,m)} = 0$$

Tenant compte à la suite exacte (i) ceci veut dire que :

$$F_m \simeq \varprojlim_{n \geq m} F_m / \operatorname{im} \eta^n_m$$

Donc pour tout m ou bien il existe un $n > m$ tel que $\operatorname{im} \eta^n_m = 0$ ou bien F_m est complet séparé.

Q. E. D.

DEMONSTRATION DU COROLLAIRE 1. Soit $F_o = \varprojlim F$ et posons $\overline{F}_n = im\, \pi_n \subset F_n$, alors nous avons une suite exacte de systèmes projectifs:

$$0 \to \overline{F}_n \to F_n \to F_n/\overline{F}_n \to 0$$

On en déduit une suite exacte:

$$0 \to \varprojlim \overline{F}_n \to \varprojlim F_n \to \varprojlim F_n/\overline{F}_n$$
$$\to \varprojlim{}^{(1)} \overline{F}_n \to \varprojlim{}^{(1)} F_n \to \varprojlim{}^{(1)} F_n/\overline{F}_n$$
$$\to 0$$

Or, $\overline{F}$ étant évidemment surjectif, nous avons $\varprojlim{}^{(1)} \overline{F} = 0$. D'autre part l'application $\varprojlim \overline{F} \to \varprojlim F$ est un isomorphisme, donc:

$$\varprojlim{}^{(q)} F_n/\overline{F}_n = 0 \qquad \text{pour} \qquad q = 0,\ 1.$$

Donc par le théorème le système projectif $\{F_n/\overline{F}_n\}$ est essentiellement nul, c'est-à-dire que pour tout n il existe un $n' > n$ tel que $im\, \eta_n^{n'} \subset \overline{F}_n$ donc que $im\, \eta_n^{n'} = \overline{F}_n$.

Q. E. D.

DEMONSTRATION DU COROLLAIRE 2.

Considérons la famille $\{ker\, \pi_n\}_{n \geq o}$ de sous-modules de $F_o = \varprojlim F_n$. On a :

$$\bigcap_{n \geq o} ker\, \pi_n = o \text{ et } F_n \simeq F_o / ker\, \pi_n .$$

Dire que le système projectif $\{F_n, \eta_n^{n'}\}_{n \geq o}$ n'est pas constant pour aucun $n_o \geq o$, c'est dire que $ker\, \pi_n \neq o$ pour tout $n \geq o$, donc que F_o est complet séparé.

Q. E. D.

DEMONSTRATION DU COROLLAIRE 3.

La conclusion résulte aussitôt des Corollaires 1 et 2.

Q. E. D.

REMARQUE. Les conditions du Théorème 1. sont en particulier satisfaites si:

1) $lim^{(q)} F = 0$ pour $q = 0,\ 1$.

2) tous les F_n sont dénombrables.

En effet on démontre:

LEMME. *Soit* M *un module et* $\{M_n\}_{n\geq o}$ *une famille de sous-modules telle que* $M_n \supset M_{n+1}$, $M_n \neq M_{n+1}$ *pour tout* $n \geq 0$ *et* $\bigcap_{n\geq o} M_n = 0$; *alors si* M *est isomorphe à* $\varprojlim_n M/M_n$, M *n'est pas dénombrable.*

DEMONSTRATION. Soit $\{a_i\}_{i\geq o}$ une suite d'éléments de M telle que $a_i \in M_i$ mais que $a_i \notin M_{i+1}$, alors $\sum_{i=o}^{\infty} a_i$ existe dans M. Il est facile de voir que pour $N \geq 0$ nous avons $\sum_{i=N}^{\infty} a_i \in M_N$. Donc pour deux suites de nombres positifs $\{k_i\}$ et $\{l_i\}$ telles que $k_i < k_{i+1}$, nous avons:

$$\sum_{i=o}^{\infty} (-1)^{l_i} a_{k_i} \neq 0.$$

Il en résulte que pour deux suites $\{k_i\}$ et $\{k'_i\}$ telles que $k_i < k_{i+1}$, $k'_i < k'_{i+1}$, $\{k_i\} \neq \{k'_i\}$ nous avons :

$$\sum_{i=o}^{\infty} a_{k_i} \neq \sum_{i=o}^{\infty} a_{k'_i}$$

si non on aura:

$$\sum_{i=o}^{\infty} \delta_i a_{l_i} = 0$$

où $\delta_i = \pm 1$ et $\{l_i\}$ est la différence symétrique de $\{k_i\}$ et $\{k'_i\}$.

Or, l'ensemble des suites $\{k_i\}_{i\geq o}$, $k_i < k_{i+1}$, est non-dénombrable comme on le voit facilement en utilisant la méthode de Cantor.

Q. E. D.

Soit Γ un ensemble ordonné filtrant, et soit F un système projectif sur Γ. Nous pouvons démontrer:

THEOREME 1'. *Supposons que:*

1) $\varprojlim_{\Gamma}^{(q)} F = 0$ *pour* $q = 0, 1$.

2) F_γ *est un groupe abèlien de type fini pour tout* $\gamma \in \Gamma$.

alors F *est essentiellement nul.*

COROLLAIRE 1'. Supposons que:

1) $\varprojlim_{\Gamma}^{(1)} F = 0$.

2) F_γ est un groupe abélien de type fini pour tout $\gamma \in \Gamma$.

alors F satisfait à la condition de Mittag-Leffler.

Pour la démonstration de ces résultats voir (2). On y trouve aussi les analogues des Corollaires 2. et 3. ci-dessus.

2.

Soit X un espace topologique localement compact et soit $x \in X$ un point. Nous désignons par $\mathcal{O}_x$ l'ensemble des *voisinages ouverts* de x. $\mathcal{O}_x$ est un ensemble ordonné filtrant. Soit $H_c^*(*, L)$ la cohomologie de Čech à support compact à valeurs dans l'anneau L. Si $V_1, V_2 \in \mathcal{O}_x$ et si $V_1 \subset V_2$ il existe une application $j_{v_2}^{v_1} : H_c^n(V_1, L) \to H_c^n(V_2 ; L)$. On obtient ainsi un système projectif:

$$\{H_c^n(V,L), j_V^{V'}\}_{V \in \mathcal{O}_x}$$

Notons :

$$H_q^p(x, L) = \varprojlim_{\mathcal{O}_x}{}^{(q)} H_c^p(V,L)$$

c'est un groupe bigradué dépendant seulement du germe d'espace topologique défini par X au point x.

La dimension cohomologique au sens de H. Cohen est le plus petit $n \geq 0$ tel que $H_c^{n+1}(U,L) = 0$ pour tout ouvert U dans X.

THEOREME 2 : *Soit X un sous-espace fermé d'un espace eucledien E^N et soit L un anneau dénombrable alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\dim_L X \leq n$.

b) pour tout $x \in X$, tout $q \geq 0$ et pour tout $p > n$, nous avons : $H_q^p(x L) = 0$.

DEMONSTRATION : a) → b) trivialement. b) → a). Soit $x \in X$ un point. Nous notons $p^n(x, L) = 0$ si, pour tout $V \in \mathcal{O}_x$, il existe un $V' \in \mathcal{O}_x$, $V' \subset V$ tel que :

$$j_v^{v'} : H_c^n(V', L) \to H_c^n(V, L)$$

est nulle. On sait que si pour tout $x \in X$, $p^m(x, L) = 0$ pour tout $m > n$, alors $\dim_L X \leq n$ (voir A. Borel : Seminar on Transformation groups. Annals of Math. Studies 46. Chap. I Th. 2.3), pourvu que $\dim_L X < \infty$. Or, ici, $\dim_L X \leq N$ donc il suffit de démontrer que b) entraîne $p^m(x, L) = 0$ pour tout $x \in X$ et tout $m > n$.

Pour pouvoir appliquer le Théorème 1 du § 1 au système projectif

$$\{H_c^m(V, L), j_V^{V'}\}_{V \in \mathcal{O}_x}$$

il suffit de montrer que :

1. $\mathcal{O}_x$ contient une suite cofinale.
2. Pour tout $V \in \mathcal{O}_x$ relativement compact $H_c^m(V, L)$ est dénombrable.

Or 1 est trivial et 2 vient de ce qu'une limite inductive dénombrable de modules dénombrables est lui-même dénombrable. En effet, par définition de la cohomologie de Čech nous avons que $H_c^m(V, L)$ est la limite inductive sur l'ensemble ordonné $\mathfrak{M}$ des recouvrements de $\overline{V}$ de modules de la forme $H^m(k, k_o, L)$ où $k \supset k_o$ sont des com-

-plexes simpliciaux finis. Puisque $\mathfrak{M}$ contient une suite cofinale tout est démontré.

Q. E. D.

DEFINITION : *Le i-ième nombre de Betti local au point* $x \in X$ *existe et est égal à* k, *noté* $p^i(x, L) = k$, *si pour tout* $U \in \mathfrak{V}_x$ *il existe des* $W \subset V \subset U$ *dans* $\mathfrak{V}_x$ *avec* $\overline{W} \subset V$, $\overline{V} \subset U$ *tels que pour tout* $W' \subset W$ *dans* $\mathfrak{V}_x$ *nous avons :*

$$im\ j_V^{iW'} = im\ j_V^{iW} \quad est$$

libre de dimension k, *où* $j_V^{i,W}$ *est l'application* $H_c^i(W, L) \to H_c^i(V, L)$ *induite par l'inclu-* *-sion* $W \subset V$.

Utilisant le Corollaire 3 du Théorème 1 du § 1, nous démontrons facilement:

THEOREME 3. *Soit* X *un sous-espace fermé de* E^N *et soit* L *un anneau dénombrable; alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $p^n(x, L)$ *existe et est égal à* m.

b) $H_1^n(x, L) = 0$ *et* $H_o^n(x, L)$ *est libre de dimension* m.

Bibliographie.

[1] O. A. LAUDAL. Sur la limite projective et la théorie de dimension I. Séminaire C. Ehresmann, 19 décembre 1961.

[2] O. A. LAUDAL. Cohomologie locale. Applications. à paraître dans Mathematica Scandinavica.

[3] L. HENKIN. A problem on inverse mapping systems. Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950) pp. 224-25.