Olav Arnfinn Laudal

Sur la limite projective et la théorie de la dimension. I

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 3 (1960-1962), exp. n° 5, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1960-1962__3__A6_0>

Faculté des Sciences de Paris
SEMINAIRE DE TOPOLOGIE ET DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN

Décembre 1961

SUR LA LIMITE PROJECTIVE ET LA THEORIE DE LA DIMENSION. I

par OLAV ARNFINN LAUDAL

Introduction. Soient C et D deux catégories quelconques. Nous désignons par $Hom(\underline{C}, \underline{D})$ la catégorie des foncteurs sur $\underline{C}$ à valeur dans $\underline{D}$ – un objet étant un tel foncteur, une flêche, de *source* F et de *but* G étant une transformation naturelle $h: F \to G$.

Soit Φ l'ensemble des flêches de $\underline{C}$ et soit C l'ensemble d'objets de $\underline{C}$. Notons $S, B: \Phi \to C$ les fonctions *source* et *but*. Soit Φ' un sous-ensemble de Φ stable pour la composition. Nous notons $Hom_{\Phi'}(F, G)$ l'ensemble de tous les Φ'-*morphismes* de source F et de but G, un tel étant défini par la donnée d'une famille $\{h_c\}_{c \in C}$ de flêches dans $\underline{D}$, $h_c: F(c) \to G(c)$ assujettie à la condition suivante: pour tout $\varphi \in \Phi'$ nous avons:

$$h_{B(\varphi)} \circ F(\varphi) = G(\varphi) \circ h_{S(\varphi)}$$

En particulier, $Hom_{\Phi}(F, G)$ – noté aussi $Hom(F, G)$ – est l'ensemble de toutes les flêches de $Hom(\underline{C}, \underline{D})$ de source F et de but G.

DEFINITION : *Soit F un objet de $Hom(\underline{C}, \underline{D})$ et soit d un objet de $\underline{D}$. Nous disons que d est la limite projective de F p. r. à Φ', noté $\varprojlim_{\Phi'} F$, si:*

P 1. il existe pour tout $c \in C$ une flêche $\pi_c: d \to F(c)$ dans $Hom(\underline{C}, \underline{D})$ telle que pour tout $\varphi \in \Phi'$ nous avons:

$$\pi_{B(\varphi)} = F(\varphi) \circ \pi_{S(\varphi)}$$

P 2. d est universel pour cette propriété.

Nous démontrons que si un tel d existe il est unique à une équivalence près. En particulier, nous posons $\varprojlim F = \varprojlim_{\Phi} F$.

Nous n'allons pas nous occuper de l'existence de ces notions pour les catégories générales. Bornons-nous à indiquer qu'il suffit pour la plupart des considérations qui vont suivre que $\underline{D}$ satisfait aux conditions suivantes:

1. $\underline{D}$ est abélienne.
2. $\amalg$ et $\prod$ indexés par Φ, existent dans $\underline{D}$ et y sont exacts.
3. $\underline{D}$ contient suffisamment d'objets projectifs et injectifs.

Pour simplifier, nous allons supposer que $\underline{D} = Mod_L$, la catégorie des modules sur l'anneau L, L fixé une fois pour toutes et supposé unitaire.

Il est alors trivial de vérifier que $Hom(\underline{C}, Mod_L)$ est une catégorie abélienne, que $Hom_{\Phi'}$ et $\underleftarrow{lim}_{\Phi'}$ existent et sont des foncteurs sur $Hom(\underline{C}, Mod_L)$ à valeurs dans Mod_L. On vérifie que $Hom_{\Phi'}$ et $\underleftarrow{lim}_{\Phi'}$ sont exacts à gauche.

1. Objets projectifs et injectifs dans $Hom(\underline{C}, Mod_L)$.

Soit $\{\overline{F}_c\}_{c\in C}$ une famille de modules projectifs et soit B_c l'ensemble $\{\varphi | \varphi\in\Phi,\ B(\varphi) = c\}$. A tout $\psi\in\Phi$ on associe l'application $\psi_*: B_{S(\psi)} \to B_{B(\psi)}$ définie par $\varphi \to \psi\circ\varphi$. Posons $F(c) = \coprod_{\varphi\in B c} \overline{F}_{S(\varphi)}$. ψ_* induit un homomorphisme

$$F(\psi): F(S(\psi)) \to F(B(\psi)).$$

On obtient ainsi un objet F dans $Hom(\underline{C}, Mod_L)$.

PROPOSITION 1.1.a. *F est un objet projectif.*

DEMONSTRATION: Soit $h': G \to H$ une surjection dans $Hom(\underline{C}, Mod_L)$ et soit $h: F \to H$ une flêche. Il est clair que h est donné par ses restrictions aux $\overline{F}_c$, soit $\overline{h}_c$. Pour tout $c\in C$ soit $\overline{h}''_c : \overline{F}_c \to G(c)$ un homomorphisme tel que $h'_c \circ \overline{h}''_c = \overline{h}''_c$. existe puisque $\overline{F}_c$ est projectif. Or ces $\overline{h}''_c$ définissent un $h'': F \to G$ et on a: $h' \circ h'' = h$. Donc F est projectif.

Q. E. D.

DEFINITION: *On appelle objet $\amalg$-projectif tout objet F défini par une telle famille de modules projectifs.*

Soit $\{\overline{E}_c\}_{c\in C}$ une famille de modules injectifs. Soit S_c l'ensemble $\{\varphi | \varphi\in\Phi,\ S(\varphi) = c\}$. Posons $E(c) = \prod_{\varphi\in S_c} \overline{E}_{B(\varphi)}$. Une flêche $\psi\in\Phi$ induit une application ψ^*: $: S_{B(\psi)} \to S_{S(\psi)}$ définie par $\varphi \to \varphi\circ\psi$ et celui-ci définit une projection $E(\psi)$: $E(S(\psi)) \to E(B(\psi))$. On obtient ainsi un objet E de $Hom(\underline{C}, Mod_L)$ et on démontre :

PROPOSITION 1.1.b: *E est un objet injectif.*

DEFINITION: *On appelle objet $\prod$-injectif tout objet E défini par une telle famille de modules injectifs.*

PROPOSITION 1.2.a: *Il existe dans $Hom(\underline{C}, Mod_L)$ suffisamment d'objets $\amalg$-projectifs.*

DEMONSTRATION : Soit G un objet de $Hom(\underline{C}, Mod_L)$ et soit pour tout $c \in C$, $\bar{h}_c$ un homomorphisme d'un module projectif $\bar{F}_c$ sur $G(c)$. La famille $\{\bar{F}_c\}_{c\in C}$ définit un objet $\amalg$ -projectif F. Nous avons $F(c) = \coprod_{\varphi \in B_c} \bar{F}_{S(\varphi)}$ donc l'homomorphisme h_c : $: F(c) \to G(c)$ défini par $h_c = \coprod_{\varphi\in B_c} G(\varphi) \circ \bar{h}_{S(\varphi)}$ est surjectif et il est facile de montrer que :

$$h_{B(\psi)} \circ F(\psi) = G(\psi) \circ h_{S(\psi)}$$

pour tout $\psi \in \Phi$. Or, ceci veut dire que $\{h_c\}_{c\in C}$ définit une surjection $h : F \to G$.

Q. E. D.

Par un raisonnement dual on démontre :

PROPOSITION 1.2.b: *Il existe dans $Hom(\underline{C}, Mod_L)$ suffisamment d'objets Π-injectifs.*

REMARQUE : Tout ensemble ordonné Γ peut être considéré comme une catégorie $\underline{C}$; $C = \Gamma$, $\Phi = \{(\gamma, \gamma') \mid \gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma < \gamma'\}$. Soit $\mathbf{Z}$ l'ensemble ordonné des entiers rationnels et soit R un module injectif. Le foncteur constant $R : \mathbf{Z} \to Mod_L$ est injectif considéré comme objet dans $Hom(\mathbf{Z}, Mod_L)$, mais il est clair que R n'est pas Π-injectif. Cependant, on peut démontrer :

PROPOSITION 1.3.a: *Soit Γ un ensemble ordonné tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$ l'ensemble B_γ est fini, alors tout objet projectif de $Hom(\Gamma, Mod_L)$, L étant héréditaire est $\amalg$-projectif.*

PROPOSITION 1.3.b: *Soit Γ un ensemble ordonné tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$ l'ensemble S_γ est fini, alors tout objet injectif de $Hom(\Gamma, Mod_L)$ est Π-injectif.*

Les démonstrations ne seront pas données ici.

Nous pouvons aussi démontrer un théorème analogue au théorème 1.4.1 de [3]. Pour cela, soit L le foncteur constant $\Gamma \to Mod_L$ considéré comme objet de $Hom(\Gamma, Mod_L)$. Nous appellerons, par abus de langage, *ideal de* L toute injection $j : I \to L$ dans $Hom(\Gamma, Mod_L)$. Il est clair que pour tout $\gamma \in \Gamma$, j_γ est un isomorphisme de I_γ sur un idéal I'_γ de L. Si $\gamma < \gamma'$ nous avons $I'_{\gamma'} \subset I'_\gamma$.

THEOREME 1 : *L'objet F dans $Hom(\Gamma, Mod_L)$ est un objet injectif si, et seulement si, pour tout idéal I de L et toute flêche $f : I \to F$ il existe un $x \in \varprojlim F$ tel que $f_\gamma(\lambda) = \lambda x_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $\lambda \in I_\gamma$.*

DEMONSTRATION : Analogue à celle du théorème 1.4.1. de [3].

Soit $\mathcal{H} : \underline{C}_1 \to \underline{C}_2$ un foncteur. Il induit un foncteur $\mathcal{H}^* : Hom(\underline{C}_2, Mod_L) \to Hom(\underline{C}_1, Mod_L)$. En général il est faux que $\mathcal{H}^*(F)$ est injectif (resp. projectif) si F l'est. Nous aurons cependant besoin plus tard de deux résultats triviaux qu'il faut bien écrire.

PROPOSITION 1.4.a: *Soit $\underline{C}_o$ une sous-catégorie de $\underline{C}$ telle que si $\varphi \in \Phi$ et si $B(\varphi) \in C_o$ alors $\varphi \in \Phi_o$. Soit $i : \underline{C}_o \to \underline{C}$ le foncteur canonique et soit F un objet $\coprod$-projectif de $Hom(\underline{C}, Mod_L)$ alors $i^*(F)$ est $\coprod$-projectif.*

PROPOSITION 1.4.b: *Soit $\underline{C}_o$ une sous-catégorie de $\underline{C}$ telle que si $\varphi \in \Phi$ et si $S(\varphi) \in C_o$ alors $\varphi \in \Phi_o$. Soit $i : \underline{C}_o \to \underline{C}$ le foncteur canonique et soit F un objet $\prod$-injectif de $Hom(\underline{C}, Mod_L)$ alors $i^*(F)$ est $\prod$-injectif.*

Soit $\underline{C}_o$ une sous-catégorie de la catégorie $\underline{C}$ et soit $i : \underline{C}_o \to \underline{C}$ le foncteur canonique. Pour tout objet F de $Hom(\underline{C}, Mod_L)$ il existe une application canonique :

$$i^\circ : \varprojlim_{\underline{C}} F \to \varprojlim_{\underline{C}_o} F$$

qui induit des applications :

$$i^n : \varprojlim_{\underline{C}}{}^{(n)} F \to \varprojlim_{\underline{C}_o}{}^{(n)} F$$

voir § 4.

2. Les foncteurs $Hom_{\Phi'}$ et $\varprojlim_{\Phi'}$.

Le foncteur $Hom_{\Phi'}$ est équilibré (balanced, dans la terminologie de Cartan-Eilenberg) dans le sens suivant. Soit F un objet $\coprod$-projectif de $Hom(\underline{C}, Mod_L)$ alors le foncteur $Hom_{\Phi'}(F, *)$ est exact. Soit G un objet $\prod$-injectif alors le foncteur $Hom_{\Phi'}(*, G)$ est exact.

Pour calculer les dérivées de $Hom_{\Phi'}$, notées $Ext^{(n)}_{\Phi'}$, on peut alors prendre, ou bien une résolution $\coprod$-projective $F*$ de F et calculer les groupes de cohomologie du complexe

$$Hom_{\Phi'}(F*, G)$$

ou bien une résolution $\prod$-injective G^* de G et calculer les groupes de cohomologie du complexe

$$Hom_{\Phi'}(F, G^*)$$

Notons $\varprojlim^{(n)}_{\Phi'}$ les dérivées du foncteur $\varprojlim_{\Phi'}$. Alors nous démontrons :

PROPOSITION 2.1: *Soit M un module projectif considéré comme objet constant de $Hom(\underline{C}, Mod_L)$ et soit F un objet de $Hom(\underline{C}, Mod_L)$, alors nous avons un isomorphisme fonctoriel en F :*

$$Ext^{(n)}_{\Phi'}(M, F) \simeq Hom_L(M, \varprojlim^{(n)}_{\Phi'} F)$$

DEMONSTRATION : Il est facile de voir que $Hom_{\Phi'}(M, F)$ est isomorphe à $Hom_L(M, \underset{\leftarrow\Phi'}{lim} F)$. Soit en effet $h \in Hom_{\Phi'}(M, F)$, $h = \{h_c\}_{c \in C}$ où $h_c : M \to F(c)$ est tel que pour tout $\varphi \in \Phi'$ nous avons :

$$h_{B(\varphi)} = F(\varphi) \circ h_{S(\varphi)}$$

il existe alors un $h' : M \to \underset{\leftarrow\Phi'}{lim} F$ unique tel que, si $\pi_c : \underset{\leftarrow\Phi'}{lim} F \to F(c)$ sont les flèches données par la définition de $\underset{\leftarrow\Phi'}{lim}$, nous avons $h_c = \pi_c \circ h'$. L'isomorphisme en question est celui qui à h associe h'. Cet isomorphisme est évidemment fonctoriel, en F.

Donc, prenons une résolution injective F^* de F, alors nous avons un isomor-phisme de complexes

$$Hom_{\Phi'}(M, F^*) \cong Hom_L(M, \underset{\leftarrow\Phi'}{lim} F^*).$$

Puisque $Hom_L(M, *)$ est exact, M étant projectif, nous trouvons le résultat voulu en prenant la cohomologie de chaque côté.

Q. E. D.

COROLLAIRE : Il existe un isomorphisme fonctoriel:

$$Ext_{\Phi'}^{(n)}(L, F) \cong \underset{\leftarrow\Phi'}{lim}^{(n)} F.$$

DEMONSTRATION : L est projectif dans Mod_L et $Hom_L(L, \underset{\leftarrow\Phi'}{lim}^{(n)} F) \cong \underset{\leftarrow\Phi'}{lim}^{(n)} F$.

Q. E. D

3. Résolutions projectives de L dans $Hom(\underline{C}, Mod_L)$

Soit $\underline{C}_o$ une sous-catégorie de la catégorie $\underline{C}$.
Notons B_c^o l'ensemble $\{\varphi \mid \varphi \in \Phi,\ S(\varphi) \in C_o\ \&\ B(\varphi) = c\}$. *Dans* B_c^o on distingue les sous-ensembles finis $(\varphi_o, \dots \varphi_n)$ tels qu'il existe des $\psi_i \in \Phi_o$ $i = 0, \dots n-1$ pour les-quels:

$$\varphi_i \circ \psi_i = \varphi_{i+1} \qquad i = 0, \dots n-1.$$

On obtient ainsi un schéma simplicial noté K_c^o.

Soit $\psi \in \Phi$; comme on l'a vu, ψ induit une application $\psi_* : B_{S(\psi)} \to B_{B(\psi)}$ donc aussi une application $\psi_*^o : B_{S(\psi)}^o \to B_{B(\psi)}^o$. On vérifie facilement que ψ_*^o transforme tout sous-ensemble distingué en un sous-ensemble distingué, donc induit une application simpliciale :

$$K^o(\psi) : K_{S(\psi)}^o \to K_{B(\psi)}^o$$

On obtient ainsi un foncteur K^o sur $\underline{C}$ à valeurs dans la catégorie $\underline{K}$ des schémas sim-pliciaux. Soit C_* le foncteur gradué des chaînes singulières sur $\underline{K}$ à valeurs dans Mod_L. Notons C_*^o le foncteur $C_* \circ K^o$, c'est un foncteur sur $\underline{C}$ à valeurs dans Mod_L, gradué à opérateur différentiel $(d_n)_{n\geq 0}$ de degré -1. Pour tout $n\geq 0$ nous avons donc un objet C_n^o dans $Hom(\underline{C}, Mod_L)$ et une flèche

$$dn : C_{n+1}^o \to C_n^o$$

dans $Hom(\underline{C}, Mod_L)$.

PROPOSITION : 3.1 : *Pour tout* $n \geq 0$, C_n^o *est un objet* $\amalg$-*projectif.*

DEMONSTRATION : Soit $\overline{L}_{(\psi_o, \psi_1, \dots, \psi_n)}$ l'anneau L, pour tout n-upple $(\psi_o, \dots \psi_n)$ de Φ_o. Posons $\overline{L}_c^o = L$ pour tout $c \in C$, et

$$\begin{aligned} \overline{L}_c^n = \amalg \overline{L}_{(\psi_o, \dots, \psi_{n-1})} & \qquad\qquad \text{pour } n > 0. \\ B(\psi_o) = c & \\ B(\psi_i) = S(\psi_{i-1}) & \\ i = 1, \dots, n-1. & \end{aligned}$$

Si $c \notin C_o$, alors $\overline{L}_c^n = 0$, une somme vide étant nulle. Il est facile de voir qu'il existe un isomorphisme canonique

$$i_c : C_n^o(c) \to \coprod_{\varphi \in B_c} \overline{L}_{S(\varphi)}^n$$

D'autre part, si $\psi \in \Phi$ l'application $\psi_* : B_{S(\psi)} \to B_{B(\psi)}$ induit des homomorphismes

$$\begin{aligned} C_n^o(\psi) :& \quad C_n^o(S(\psi)) \to C_n^o(B(\psi)) \\ L^n(\psi) :& \quad \coprod_{\varphi \in B_{S(\psi)}} \overline{L}_{S(\varphi)}^n \to \coprod_{\varphi \in B_{B(\psi)}} \overline{L}_{B(\psi)}^n \end{aligned}$$

Or on montre sans difficulté que :

$$i_{B(\psi)} \circ C_n^o(\psi) = L^n(\psi) \circ i_{S(\psi)}$$

donc C_n^o est $\amalg$-projectif.

Q. E. D.

Il en résulte que si, pour tout $c \in C$, le schéma K_c^o est non-vide et acyclique, le complexe C_*^o est une résolution projective de L dans $Hom(\underline{C}, Mod_L)$. Or, K_c^o est acyclique si, pour tout sous-complexe fini M de $|K_c^o|$ il existe un sommet ρ tel que le cône de base M et de sommet ρ est contenu dans $|K_c^o|$.

PROPOSITION 3.2 : Soit $\underline{C}_o$ *une sous-catégorie de* $\underline{C}$ *telle que :*

1) Pour tout $c \in C$ *il existe un* $\varphi \in B_c$ *tel que* $S(\varphi) \in C_o$.

2) Pour toute famille finie $\varphi_1, \dots \varphi_n$ *d'éléments de* B_c^o *il existe un* $\varphi \in B_c^o$ *et une famille d'éléments de* Φ_o, $\psi_1, \dots \psi_n$ *tels que : pour tout* $i = 1, 2, \dots n$ *on a,*

$$\text{ou bien } \varphi_i \circ \psi_i = \varphi \text{ ou bien } \varphi \circ \psi_i = \varphi_i$$

Dans ce cas C^o_* est une résolution $\amalg$*-projective de L dans* $Hom(\underline{C}, Mod_L)$.

DEMONSTRATION : La condition 1) exprime que $K^o_c \neq \Phi$ pour tout $c \in C$. La condition 2) exprime que pour toute famille finie de sommets de K^o_c, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, il existe un sommet φ tel que φ_i peut être lié à φ par un *1*-simplexe. Or soit $(\varphi_o, \dots, \varphi_n)$ un n-simplexe dans K^o_c et soit φ un sommet tel que tous les φ_i peuvent être liés à φ par un *1*-simplexe, c'est-à-dire tel qu'il existe des $\psi_i \in \Phi_o$ pour lesquels nous avons, ou bien

$$\varphi_i \circ \psi_i = \varphi \text{ ou bien } \varphi \circ \psi_i = \varphi_i$$

Soit i_o le plus petit des i tels que $\varphi_i = \varphi \circ \psi_i$ s'il existe de tels i, sinon on prend $i_o = n+1$. Il est alors clair que $(\varphi_o, \varphi_1, \dots, \varphi_{i_o-1}, \varphi, \varphi_{i_o}, \dots, \varphi_n)$ est un $(n+1)$ simplexe de K^o_c. Donc tout sous-complexe fini de $|K^o_c|$ admet un cône dans $|K^o_c|$, c'est-à-dire K^o_c est acyclique.

Q. E. D.

Soit Γ un ensemble ordonné et soit Γ_o un sous-ensemble. Pour tout $\gamma \in \Gamma$ il est facile de voir que K^o_γ est un schéma simplicial ordonné (voir Chap. 1. 3. 8 de [3]), que $K^o(\psi)$ est une application simpliciale strictement croissante, donc que $C^{++}_* \circ K^o$ est un complexe dans $Hom(\underline{C}, Mod_L)$ à opérateur de dérivation de degré -1. On démontre, comme ci-dessus:

PROPOSITION 3.3. *Pour tout $n \geq 0$, C^{++}_n est un objet* $\amalg$*-projectif.*

PROPOSITION 3.4. *Soit Γ_o un sous-ensemble de l'ensemble ordonné Γ, tel que:*

1) Γ_o est cofinal dans Γ, c'est-à-dire, pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe un $\gamma' \in \Gamma_o$ $\gamma' > \gamma$.

2) pour toute famille finie d'éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ de Γ_o tels que $\gamma_i > \gamma$ pour $i = 1, \dots, n$ il existe un $\gamma_o \in \Gamma_o$, $\gamma_o > \gamma$ tel que pour tout i on a, ou bien

$$\gamma_o < \gamma_i \text{ ou bien } \gamma_i < \gamma_o.$$

Dans ce cas C^{o++}_* est une résolution $\amalg$*-projective de L dans* $Hom(\Gamma, Mod_L)$.

4. Les complexes $\amalg^*$ et Π^*_+.

Soit $\underline{C}_o$ une sous-catégorie de $\underline{C}$. Supposons que les conditions 1) et 2) de la Proposition 3.1. sont satisfaites, donc que C^o_* est une résolution $\amalg$-projective de L dans $Hom(\underline{C}, Mod_L)$. Soit F un objet dans $Hom(\underline{C}, Mod_L)$ et considérons le complexe:

$$Hom_{\Phi'}(C^o_*, F)$$

Nous allons le calculer dans le cas $\Phi' = \Phi$. Un élément h *de* $Hom(C^o_n, F)$ est donné par la famille $\{h_c\}_{c \in C}$, $h_c: C^o_n(c) \to F(c)$. Or $C^o_n(c) = \coprod_{\varphi \in B(c)} \overline{L}_{S(\varphi)}$. Compte tenu de la restriction sur les h_c, à savoir:

$$h_{B(\psi)} \circ C^{\circ}_n(\psi) = F(\psi) \circ h_{S(\psi)}$$

nous voyons que la correspondance

$$\{ h_c \}_{c \in C} \to \{ \bar{h}_c \}_{c \in C}$$

est biunivoque. Or, pour chaque $c \in C$ on peut choisir librement un $\bar{h}_c : \bar{L}^n_c \to F(c)$ et ainsi obtenir une flèche $C^{\circ}_n \to F$. Donc la correspondance

$$h \to \{ \bar{h}_c \}_{c \in C}$$

induit un isomorphisme

$$Hom(C^{\circ}_n, F) \to \coprod_{c \in C} Hom_L(\bar{L}^n_c, F(c))$$

Pour $n = 0$, $\bar{L}^{\circ}_c = L$ donc $Hom(C^{\circ}_{\circ}, F) \simeq \prod_{c \in C} F(c)$

Pour $n \neq 0$, $\bar{L}^n_c = \coprod \bar{L}_{(\varphi_o, \dots \varphi_{n-1})}$ donc $Hom(C^{\circ}_n, F) \simeq \prod F(B(\varphi_o))$

$$\begin{array}{ll} \varphi_i \in B_c & \varphi_i \in B_c \\ \varphi_i \circ \psi_i = \varphi_{i+1} & \varphi_i \circ \psi_i = \varphi_{i+1} \\ \psi_i \in \Phi_o \ \ i = 0, \dots n-1 & \psi_i \in \Phi_o \ \ i = 0, \dots n-1 \end{array}$$

Il vient aussi après un petit calcul que l'homomorphisme $Hom(d_n, F) = \partial_n$ est donné par

$$\partial_n(\xi)_{\psi_o, \dots \psi_n} = F(\psi_o)(\xi_{\psi_1, \dots \psi_n}) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \xi_{\psi_o, \dots \hat{\psi}_k, \dots \psi_n}$$

Le complexe ainsi obtenu se note $\Pi^* F$. Il a été étudié par J.E. Roos [1].

Par le Corollaire de la Proposition 2.1 nous avons :

PROPOSITION 4.1: *Le n-ième groupe de cohomologie de $\Pi^* F$ est isomorphe à $\varprojlim^{(n)} F$. L'isomorphisme étant fonctoriel.*

Soit maintenant Γ_o un sous-ensemble de l'ensemble ordonné Γ. Supposons que les conditions de la Proposition 3.4 sont satisfaites, alors $C^{\circ ++}_*$ est une résolution $\coprod$-projective de L dans $Hom(\Gamma, Mod_L)$. Soit F un objet dans $Hom(\Gamma, Mod_L)$ et considérons le complexe

$$Hom_{\Phi'}(C^{o++}_*, F)$$

Supposons que $\Phi' = \Phi$, alors en procédant exactement comme ci-dessus nous trouvons:

$$Hom(C^{o++}_o, F) = \prod_{\gamma \in \Gamma} F_{\gamma}$$

$$Hom(C^{o++}_n, F) \simeq \prod_{\substack{\gamma_o < \gamma_1 < \dots < \gamma_{n-1} \\ \gamma_i \in \Gamma_o,\ \gamma_i \neq \gamma_j \text{ si } i \neq j.}} F\, min(\gamma_o, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$$

Posons $Hom(d^+_n, F) = \partial^+_n$, alors :

$$\partial_n^+(\xi)_{\gamma_o,\gamma_1,\dots,\gamma_n} = \eta_{\gamma_o}^{\gamma_1}(\xi_{\gamma_1,\dots,\gamma_n}) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \xi_{\gamma_o,\gamma_1,\dots,\hat{\gamma}_k,\dots,\gamma_n}$$

où $\eta_{\gamma_o}^{\gamma_1}$ est l'homomorphisme $F(\gamma_o < \gamma_1)$.

Ce complexe sera noté $\Pi_+^* F$. Nous trouvons:

PROPOSITION 4. 2. *Le n-ième groupe de cohomologie de* $\Pi_+^* F$ *est isomorphe à* $\varprojlim_{\Gamma}^{(n)} F$. *L'isomorphisme étant fonctoriel.*

REMARQUE : On devrait noter les deux complexes $\Pi^*_{(\underline{C}_o,\, \underline{C})} F$ resp. $\Pi^*_{+\,(\Gamma_o,\, \Gamma)} F$ puisque par cons-truction ils dépendent du couple $(\underline{C}_o, \underline{C})$ resp. (Γ_o, Γ). En effet c'est le complexe $\Pi^*_{(\Gamma,\Gamma)} F$ qu'a étudié Roos dans [1].

Soit maintenant $\underline{C}_o$ une sous-catégorie de $\underline{C}$. L'injection canonique $i: \underline{C}_o \to \underline{C}$ induit un foncteur $i^*: Hom(\underline{C}, ModL) \to Hom(\underline{C}_o, Mod_L)$. Supposons que $\underline{C}_o$ satisfait aux conditions de la Proposition 3. 1., alors C_*^o est une résolution projective de L dans $Hom(\underline{C}, Mod_L)$. Soit C_*^{oo} la résolution $\amalg$-projective de L dans $Hom(\underline{C}_o, Mod_L)$ définie par le couple $(\underline{C}_o, \underline{C}_o)$, alors on voit facilement qu'il existe une injection canonique: $C_*^{oo} \to i^*(C_*^o)$ qui induit un isomorphisme $\Pi^*_{(\underline{C}_o,\underline{C})} F \to \Pi^*_{(\underline{C}_o,\underline{C}_o)} i^*(F)$.

Soit $i^n: \varprojlim_{\underline{C}}^{(n)}(F) \to \varprojlim_{\underline{C}_o}^{(n)} i^*(F)$ l'application canonique définie par i, alors nous trouvons:

PROPOSITION 4 . 3 . *Supposons que* $\underline{C}_o$ *satisfait aux conditions de la Proposition 3. 1., alors* i^n *est un isomorphisme pour tout* $n \geq 0$.

COROLLAIRE : Soit Γ ordonné filtrant et soit Γ_o un sous-ensemble cofinal de Γ, alors pour tout objet F dans $Hom(\Gamma, Mod_L)$ et pour tout $n \geq 0$ l'application canonique $\varprojlim_{\Gamma}^{(n)} F \to \varprojlim_{\Gamma_o}^{(n)}$ est un isomorphisme.

5. Suite spectrale attachée à une fonction $\theta: \Gamma_1 \to \Gamma_2$:

Soient Γ_1 et Γ_2 deux ensembles ordonnés et soit θ une fonction $\Gamma_1 \to \Gamma_2$ dans le sens suivant: Pour tout $\gamma_1 \in \Gamma_1$ $\theta(\gamma_1)$ est un sous-ensemble de Γ_2, tel que si $\gamma_1' < \gamma_1$ alors $\theta(\gamma_1') \subset \theta(\gamma_1)$.

Supposons que:

1) $\theta(\gamma_1) = \theta(\gamma_1')$ seulement si $\gamma_1 = \gamma_1'$.
2) si $\gamma_2 \in \theta(\gamma_1)$ et si $\gamma_2' < \gamma_2$ alors $\gamma_2' \in \theta(\gamma_1)$.
3) pour tout $\gamma_2 \in \Gamma_2$ il existe un γ_1 tel que $\gamma_2 \in \theta(\gamma_1)$.

A tout objet F de $Hom(\Gamma_2, Mod_L)$ nous pouvons associer un objet $\varprojlim_{\theta} F$ de $Hom(\Gamma_1, Mod_L)$ défini par: $(\varprojlim_{\theta} F)_{\gamma_1} = \varprojlim_{\theta(\gamma_1)} F$.

Ceci donne un foncteur $\varprojlim_{\theta}$ sur $Hom(\Gamma_2, Mod_L)$ à valeurs dans $Hom(\Gamma_1, Mod_L)$. Inversement, à tout objet F de $Hom(\Gamma_1, Mod_L)$ nous pouvons associer un objet $\varinjlim_{\theta} F$ de $Hom(\Gamma_2, Mod_L)$ défini par:

$$(\varinjlim_{\theta} F)(\gamma_2) = \varinjlim_{\{\gamma_1 \mid \gamma_2 \in \theta(\gamma_1)\}} F$$

Ceci donne un foncteur $\varinjlim_{\theta}$ sur $Hom(\Gamma_1, Mod_L)$ à valeurs dans $Hom(\Gamma_2, Mod_L)$. Il existe une transformation naturelle:

$$I_{\Gamma_1} \to \varprojlim_{\theta} \circ \varinjlim_{\theta}$$

où I_{Γ_1} est le foncteur identité sur $Hom(\Gamma_1, Mod_L)$. De même il existe une transforma--tion naturelle:

$$\varinjlim_{\theta} \circ \varprojlim_{\theta} \to I_{\Gamma_2}$$

On vérifie que si F est un objet de $Hom(\Gamma_1, Mod_L)$ et G un objet de $Hom(\Gamma_2, Mod_L)$ alors nous avons un isomorphisme:

$$Hom(\varinjlim_{\theta} F, G) \simeq Hom(F, \varprojlim_{\theta} G)$$

ce qui s'exprime en disant que $\varinjlim_{\theta}$ est adjoint au foncteur $\varprojlim_{\theta}$.

Soit maintenant L l'objet constant dans $Hom(\Gamma_1, Mod_L)$; il est facile de voir que $\varinjlim_{\theta} L$ est l'objet constant L dans $Hom(\Gamma_2, Mod_L)$.
Prenons une résolution projective L_* de L dans $Hom(\Gamma_1, Mod_L)$ et une résolution Π-injective F^* de F dans $Hom(\Gamma_2, Mod_L)$. Nous avons un isomorphisme de double complexe:

$$(i) \qquad Hom(L_*, \varprojlim_{\theta} F^*) \simeq Hom(\varinjlim_{\theta} L_*, F^*)$$

Comme on l'a vu, Proposition 1.4.b., F^* est une résolution Π-injective de F dans $Hom(\theta(\gamma_1), Mod_L)$ pour tout $\gamma_1 \in \Gamma_1$, donc $H^n(\varprojlim_{\theta} F^*)$ est le foncteur $\varprojlim_{\theta}^{(n)} F$ donné par:

$$(\varprojlim_{\theta}^{(n)} F)(\gamma_1) = \varprojlim_{\theta(\gamma_1)}^{(n)} F$$

Supposons maintenant que θ satisfait à la condition supplémentaire

4) Pour tout $\gamma_2 \in \Gamma_2$, $\gamma_2 \in \theta(\gamma_1) \cap \theta(\gamma_1')$ il existe un $\gamma_1'' \in \Gamma_1$ tel que $\gamma_2 \in \theta(\gamma_1'') \subset \theta(\gamma_1) \cap \theta(\gamma_1')$.

Dans ce cas $\varinjlim_{\theta}$ est exact, donc $\varinjlim_{\theta} L_*$ est une résolution de L dans $Hom(\Gamma_2, Mod_L)$. La deuxième suite spectrale du double-complexe (i) dégénère et l'on a:

$$''E_2^{n,o} \simeq \varprojlim_{\Gamma_2}^{(n)} F$$

La première est donnée par :

$$'E_2^{p,q} \simeq \varprojlim_{\Gamma_2}{}^{(p)} \varprojlim_{\theta}{}^{(q)} F$$

donc, en résumant

THEOREME 2 : *Il existe une suite spectrale donnée par :*

$$E_2^{p,q} = \varprojlim_{\Gamma_1}{}^{(p)} \varprojlim_{\theta}{}^{(q)}$$

dont le terme E_∞ *est le gradué associé à une fibration convenable de* $\sum_{n \geq 0} \varprojlim_{\Gamma_2}{}^{(n)}$.

Soit maintenant $t : \Gamma_2 \to \Gamma_1$ une application croissante surjective. On en déduit une fonction

$$\theta : \Gamma_1 \to \Gamma_2$$

définie par:

$$\theta(\gamma_1) = \{\gamma_2 \mid \gamma_2 \in \Gamma_2, \exists\, \gamma_2' \in \Gamma_2, \gamma_2' > \gamma_2 \;\&\; t(\gamma_2') = \gamma_1\}.$$

On vérifie trivialement que θ satisfait aux conditions 1), 2) et 3). Pour que θ satisfasse à la condition 4) il faut et il suffit que:

4') pour tout γ_2 tel que $t(\gamma_2) < \gamma_1$ il existe un $\gamma_2' > \gamma_2$ tel que $t(\gamma_2') = \gamma_1$.

COROLLAIRE 1: Soit $t : \Gamma_2 \to \Gamma_1$ une application croissante surjective, et soit F un ob--jet de $Hom(\Gamma_1, Mod_L)$. Supposons que t satisfait à la condition 4'). Dans ce cas il existe une suite spectrale donnée par:

$$E_2^{p,q} = \varprojlim_{\Gamma_1}{}^{(p)} \varprojlim_{\theta}{}^{(q)} F \circ t$$

dont le terme $E\infty$ est le gradué associé à une filtration convenable de $\sum_{n \geq 0} \varprojlim_{\Gamma_2}{}^{(n)} F \circ t$.

COROLLAIRE 2: Supposons que t satisfait à la condition 4') et que l'ensemble $\{\gamma_2 \mid t(\gamma_2) = \gamma_1\}$ contient un élément minimal. Dans ce cas nous avons:

$$\varprojlim_{\Gamma_1}{}^{(n)} F \simeq \varprojlim_{\Gamma_2}{}^{(n)} F \circ t$$

pour tout objet F de $Hom(\Gamma_1, Mod_L)$.

DEMONSTRATION: $F \circ t$ est constant sur l'ensemble $t^{-1}(\gamma_1) = \{\gamma_2 \mid t(\gamma_2) = \gamma_1\}$. Or $t^{-1}(\gamma_1)$ vérifie la condition du Corollaire 1 de la Proposition 4.3.p.r. à $\theta(\gamma_1)$, donc: $\varprojlim_{\theta(\gamma_1)}{}^{(n)} F \circ t \simeq \varprojlim_{t^{-1}(\gamma_1)}{}^{(n)} F \circ t$. De plus $\varprojlim_{t^{-1}(\gamma_1)}{}^{(n)} F \circ t = 0$ pour tout $n > 0$ puisque l'objet constant $F \circ t$ dans $Hom(t^{-1}(\gamma_1), Mod_L)$ y admet une résolution Π-injective constante, comme l'on voit aussitôt en utilisant l'existence d'un élément minimal dans $t^{-1}(\gamma_1)$. Aussi nous avons:

$$\varprojlim_{t^{-1}(\gamma_1)} F \circ t \simeq F(\gamma_1) \text{ pour tout } \gamma_1 \in \Gamma_1.$$

La suite spectrale du Corollaire 1. dégénère et nous trouvons :

$$E_2^{p,o} = \varprojlim_{\Gamma_1}{}^{(p)} F$$

d'où la conclusion. *Q. E. D.*

COROLLAIRE 3 : Il existe une suite spectrale donnée par

$$E_2^{p,q} = \varprojlim_{\Gamma_1}{}^{(p)} \varprojlim_{\Gamma_2}{}^{(q)} F$$

dont le terme E_∞ est le gradué associé à une filtration convenable de $\Sigma \varprojlim_{\Gamma_1 \times \Gamma_2}{}^{(n)} F$.

DEMONSTRATION : Soit $\Gamma_1 \xrightarrow{\theta} \Gamma_1 \times \Gamma_2$ la fonction définie par : $\theta(\gamma_1') = \{(\gamma_1', \gamma_2') | \gamma_1' < \gamma_1\}$. Elle satisfait évidemment aux conditions 1.2.3 et 4. De plus, le sous-ensemble $\theta_o(\gamma_1) = \{(\gamma_1, \gamma_2) | \gamma_2 \in \Gamma_2\}$ de $\theta(\gamma_1)$ satisfait aux conditions de la Proposition 4.3 donc :

$$\varprojlim_{\theta(\gamma_1)}{}^{(q)} F \simeq \varprojlim_{\theta_o(\gamma_1)}{}^{(q)} F \simeq \varprojlim_{\Gamma_2}{}^{(q)} F$$

et la conclusion découle du Théorème 2. *Q. E. D.*

REMARQUE : Le Corollaire 3 a été démontré par Roos dans [1] . Il est pourtant valable pour des catégories quelconques $\underline{C}_1$ et $\underline{C}_2$.

On peut voir que le Théorème 5 est un cas particulier du résultat suivant : Il existe deux suites spectrales données par :

$$'E_2^{p,q} = Ext^p(\varinjlim_{\theta}{}_{(q)} F, G), \quad ''E_2^{p,q} = Ext^p(F, \varprojlim_{\theta}{}^{(q)} G)$$

aboutissant à la même chose.

APPENDICE : Soit G un groupe et soit $\underline{G}$ la catégorie ayant un seul objet c et telle que l'ensemble des flèches est G, composition étant celle du groupe. Soit $\underline{Ab}$ la catégorie des groupes abéliens. Un objet F dans $Hom(\underline{G}, \underline{Ab})$ n'est autre chose qu'un groupe abélien $F(c)$ sur lequel opère G. On a :

$$\varprojlim F = \{ f | f \in F(c) \ni g.f = f, \forall g \in G\}$$

donc :

$$\varprojlim{}^{(n)} F \simeq H^n(G, F(c))$$

Soit G_o un sous-semigroupe de G contenant l'unité, alors $\underline{G}_o$ peut être considéré comme une sous-catégorie de $\underline{G}$. Les conditions de la Proposition 3.2 sont satisfaites si, et seulement si, tout $g \in G$ s'écrit $g = g_1 \cdot g_2^{-1}$ avec $g_1, g_2 \in G_o$. Par la Proposition 4.1 nous trouvons ceci :

$$H^n(G, F(c))$$

est le n-ième groupe de cohomologie du complexe $\prod^{*}_{(G_o, G)} F$ donné par:

$$\Pi^{o} F = F(c)$$

$$\Pi^{n} F = \prod_{\substack{g_i \in G_o \\ i=o,..n-1}} F(g_o, g_o g_1, \dots, g_o \dots g_{n-1}) \text{ pour } n \neq 0$$

où $F(g_o, \dots, g_o \dots g_{n-1}) = F(c)$.

$$\delta n(\xi)_{(g_o, g_o g_1, \dots, g_o \dots g_n)} = g_o \cdot \xi_{(g_o g_1, \dots, g_o \dots g_n)} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \xi_{(g_o, \dots, \widehat{g_o \dots g_k}, \dots, g_o \dots g_n)}$$

Nous retrouvons ainsi le complexe $S(\Pi)$ du chap. X § 4 de [2]. Aussi, la Proposition 4. 3. entraîne la Proposition 4. 1. du Chap. X de [2].

Si on se donne un anneau unitaire Λ et un idéal à gauche I dedans, on peut considérer la catégorie $\underline{\Lambda}$, ayant un seul objet c et telle que l'ensemble des flêches est Λ, composition étant multiplication. On démontre

$$\underset{\leftarrow I}{lim}^{(n)} F = H^n(\Lambda, F(c))$$

pour tout objet F dans $Hom^{ad}(\underline{\Lambda, Ab})$[1] – c'est-à-dire pour tout Λ-module – cohomologie au sens du chap. VIII de [2].

Soit Λ_o un sous-anneau de Λ contenant l'unité et tel que $I \subset \Lambda_o$. supposons que pour toute famille $\lambda_i \in \Lambda$ $i = 1, 2, \dots n$ il existe des $\lambda_i^o \in \Lambda_o$ $i = 1, 2, \dots n$ et un $\lambda \in \Lambda$ tels que, ou bien $\lambda_i . \lambda_i^o = \lambda$ ou bien $\lambda_i = \lambda . \lambda_i^o$. Dans ce cas nous pouvons démontrer que l'ap--plication canonique: $H_I^n(\Lambda, F(c)) \to H_I^n(\Lambda_o, F(c))$ est un isomorphisme.

Jusqu'ici nous avons étudié uniquement le foncteur $\underset{\leftarrow \Phi'}{lim}$. Il est pourtant évident qu'en dualisant on trouve à tout résultat sur $\underset{\leftarrow \Phi'}{lim}$ un résultat concernant la limite inductive $\underset{\rightarrow \Phi'}{lim}$, au moins quand ces resultats ne dépendent pas de la catégorie $\underline{D}$ en question, pourvu qu'elle satisfasse aux conditions 1, 2, 3 de l'Introduction, ce qui est le cas pour la plupart des résultats obtenus ci-dessus.

Pour terminer, soit F un objet de $Hom(\underline{G}, \underline{Top})$ où $\underline{Top}$ est la catégoriedes espaces topologiques. On se donne un tel objet en se donnant un espace topologique $F(c)$ sur lequel opère le groupe G. On voit facilement que:

$$\underset{\leftarrow}{lim}\ F = \text{sous-espaces des points fixes}$$
$$\underset{\rightarrow}{lim}\ F = X/G$$

Soit $C_*: \underline{Top} \to Mod_L$ le foncteur gradué des chaînes singulières, et soit M^* une résolution injective d'un objet constant M[2] dans $Hom(\underline{G}, Mod_L)$.

Considérons le double-complexe:

$$Hom(C_* \circ F, M^*)$$

Calculons les deux suites spectrales de ce complexe. Elles sont données par:

$$'E_2^{p,q} = Hom(\underset{\rightarrow (p)}{lim} H_q(C_* \circ F), M)$$
$$''E_2^{p,q} = Hom(H_p(\underset{\rightarrow (q)}{lim} C_* \circ F), M)$$

(1) La catégorie des foncteurs additifs sur $\underline{\Lambda}$ à valeurs dans $\underline{Ab}$.

(2) M injectif dans Mod_L.

Si G opère sur $F(c)$ sans points fixes nous trouvons que :

$$\varinjlim C*\circ F = C*(F(c)/G)$$

$$\varinjlim{}_{(q)} C*\circ F = 0 \qquad \text{pour } q \neq 0$$

Donc, nous avons une suite spectrale donnée par :

$$E_2^{p\cdot q} = H_p(G, H_q(F(c)))$$

dont le terme E_∞ est le gradué associé à une filtration convenable de $\Sigma H_n(F(c)/G, L)$ c'est-à-dire le Théorème bien connu dit de : Hurewicz-Hopf-MacLane-Eilenberg-Eckmann.

ADDENDUM : Il est, après que cet exposé a été rédigé, paru au Séminaire Dubreil-Pisot 1960-1961, un exposé de Monsieur René Deheuvels tenu le 29 mai 1961. Il nous paraît que les résultats des § 4. et § 5 ci-dessus généralisent certains de ces résultats. (voir n° 6.2 et n° 6.3 de l'exposé cité).

Bibliographie.

[1] JAN ERIK ROOS. Sur les foncteurs dérivés de $\varprojlim$. Appli. Comptes Rendus Paris n° 26, 1961, p. 1702.

[2] H. CARTAN et S. EILENBERG. Homological Algebra. Princeton, 1956.

[3] R. GODEMENT. Théorie des faisceaux. Hermann, Paris, 1958.