C. EHRESMANN

Élargissements de catégories

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 3 (1960-1962), exp. n° 4, p. 25-73
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1960-1962__3__A5_0>

ELARGISSEMENTS DE CATEGORIES *

par C. EHRESMANN

1. Compléments sur les catégories et les foncteurs.

Le système d'axiomes d'une catégorie est équivalent au suivant:

a) Tout élément f de $\mathcal{C}$ admet une unité à droite unique $\alpha(f)$ et une unité à gauche unique $\beta(f)$.

b) Pour que gf soit défini, il faut et il suffit que l'on ait: $\alpha(g) = \beta(f)$.

c) $\alpha(gf) = \alpha(f)$ et $\beta(gf) = \beta(g)$.

d) Si $(hg)f$ et $h(gf)$ sont définis, on a $(hg)f = h(gf)$.

Remarquons que *a, b, c* entraînent: si $(hg)f$ est défini, alors $h(gf)$ est défini.

DEFINITION. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un élément f' est appelé *inverse à gauche* (resp. *à droite*) de f si l'on a :

$$f'f = \alpha(f) \qquad\qquad (\text{resp. } ff' = \beta(f)).$$

PROPOSITION: Si dans une catégorie $\mathcal{C}$ tout élément f admet un inverse à gauche f', cet élément est inverse à droite et $\mathcal{C}$ est un groupoïde.

L'intersection d'une famille de sous-catégories (resp. sous-groupoïdes) de $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie (resp. un sous-groupoïde). Si A est une partie de $\mathcal{C}$, l'intersection des sous-catégories (resp. sous-groupoïdes) contenant A est la *sous-catégorie* (resp. le *sous-groupoïde*) *engendré* par A.

DEFINITION: Une sous-catégorie de la catégorie $\mathcal{C}$ est dite *saturée* si elle contient, avec une unité e, tout élément inversible f tel que $\alpha(f) = e$. Elle est dite *sursaturée* si elle contient avec e tout morphisme f tel que $\alpha(f) = e$ ou $\beta(f) = e$.

PROPOSITION: Toute unité e d'une catégorie $\mathcal{C}$ est contenue dans une catégorie sur-saturée minimale appelée *composante connexe* de e. Les composantes connexes de $\mathcal{C}$ forment une partition.

Sauf indication contraire, un foncteur est un foncteur covariant.

PROPOSITION: Soit $\mathfrak{M}_o$ une classe de catégories; la classe des triplets $(\mathcal{C}', \Phi, \mathcal{C})$, où $\mathcal{C} \in \mathfrak{M}_o$, $\mathcal{C}' \in \mathfrak{M}_o$ et Φ est un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$, est une catégorie $\mathfrak{M}$ pour la multiplication: $(\mathcal{C}'', \Phi', \mathcal{C}_1)(\mathcal{C}', \Phi, \mathcal{C}) = (\mathcal{C}'', \Phi'\Phi, \mathcal{C})$ si et seulement si $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}'$.

* Nous complétons et précisons ici certaines notions esquissées dans "Espèces de structures locales". Les démonstrations sont omises; elles paraîtront dans le travail annoncé p. 1.

PROPOSITION : Si Φ est un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ admettant un inverse à gauche Π, alors $\Phi(\mathcal{C})$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}'$.

DEFINITION : Soit Π un foncteur d'une catégorie $\mathcal{C}'$ sur une catégorie $\mathcal{C}$; tout foncteur Φ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$, inverse à droite de Π est appelé *foncteur section relativement à* Π.

PROPOSITION : Soit Φ un foncteur généralisé covariant (resp. contravariant) de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{C}'$. Pour tout $f \in \mathcal{C}$, on a :

$\alpha(\Phi(f)) \subset \Phi(\alpha(f))$ et $\beta(\Phi(f)) \subset \Phi(\beta(f))$ (resp. $\beta(\Phi(f)) \subset \Phi(\alpha(f))$ et $\alpha(\Phi(f)) \subset \Phi(\beta(f))$). Si $\mathcal{C}$ est un groupoïde, on a $\alpha(\Phi(f)) = \Phi(\alpha(f))$ et $\beta(\Phi(f)) = \Phi(\beta(f))$ (resp. $\alpha(\Phi(f)) = \Phi(\beta(f))$ et $\beta(\Phi(f)) = \Phi(\alpha(f))$).

PROPOSITION : Si Φ est un foncteur généralisé de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{C}'$ et si f est un élément inversible de $\mathcal{C}$, alors $\Phi(f)$ est une classe déléments inversibles de $\mathcal{C}'$ et $\Phi(f^{-1})$ est la classe $(\Phi(f))^{-1}$ des inverses des éléments de $\Phi(f)$.

DEFINITION : Soit Π un foncteur d'une catégorie $\mathcal{C}'$ sur une catégorie $\mathcal{C}$. Un foncteur généralisé Φ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ est appelé *foncteur généralisé section relativement à* Π si, pour tout $f \in \mathcal{C}$, on a : $\Phi(f) \subset \Pi^{-1}(f)$.

PROPOSITION : Si Φ est un foncteur généralisé section relativement à Π, alors $\Phi(\mathcal{C})$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}'$.

DEFINITION : Soient Φ et Φ' deux foncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{C}'$. *Une transformation naturelle de* Φ *vers* Φ' est un triplet (Φ', τ, Φ), où τ est une fonction de $\mathcal{C}_o$ dans $\mathcal{C}'$ telle que, si $f \in \mathcal{C}$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$, on ait :

$$\alpha(\tau(e)) = \Phi(e); \quad \beta(\tau(e)) = \Phi'(e); \quad \Phi'(f)\tau(e) = \tau(e')\Phi(f).$$

Nous désignons par $\mathcal{F}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ la classe des foncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{C}'$, par $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ la classe des transformations naturelles entre foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$. Nous écrirons : $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \mathcal{F}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{N}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \mathcal{N}(\mathcal{C})$. $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ est une catégorie pour la composition des foncteurs; elle admet pour seule unité le foncteur identique $Id_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$.

PROPOSITION : $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ est une catégorie pour la multiplication suivante, appelée longitudinale :

$$(\Phi'', \tau', \Phi_1)(\Phi', \tau, \Phi) = (\Phi'', \tau' \cdot \tau, \Phi) \text{ si et seulement si } \Phi_1 = \Phi'$$

$$\text{où } (\tau' \cdot \tau)(e) = \tau'(e)\tau(e) \text{ pour tout } e \in \mathcal{C}_o.$$

L'unité à droite de (Φ', τ, Φ) est (Φ, Φ_o, Φ), où Φ_o est la restriction de Φ

à $\mathcal{C}_o$; l'unité à gauche est (Φ', Φ'_o, Φ'). Les éléments inversibles sont les transformations naturelles (Φ', τ, Φ) où τ est une application de $\mathcal{C}_o$ dans la classe des éléments inversibles de $\mathcal{C}'$; l'inverse de (Φ', τ, Φ) est (Φ, τ^{-1}, Φ'), où $\tau^{-1}(e) = (\tau(e))^{-1}$, pour tout $e \in \mathcal{C}_o$. Une transformation maturelle de ce type sera appelée *équivalence* de Φ vers Φ'.

DEFINITION : Un *foncteur naturalisé* de la catégorie $\mathcal{C}$ est une transformation naturelle $(\Phi, \varphi, \mathrm{Id})$ du foncteur identique de $\mathcal{C}$ vers le foncteur Φ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$; on le désignera par (Φ, φ).

PROPOSITION : Soit $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ une famille de catégories. La classe $\sum_{i \in I} \mathcal{C}_i$ des couples (i, f_i) où $i \in I$ et $f_i \in \mathcal{C}_i$, munie de la multiplication définie par:

$$(j, f'_j)\,(i, f_i) = (i, f'_j f_i) \text{ si, et seulement si, } j = i \text{ et } \alpha(f'_j) = \beta(f_i),$$

est une catégorie appelée *catégorie somme* des catégories $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$.

PROPOSITION : Soit $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ une famille de catégories. La classe $\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$ des familles (f_i) telles que $f_i \in \mathcal{C}_i$ pour tout $i \in I$ munie de la multiplication :

$$(f'_i)\,(f_i) = (f'_i f_i) \text{ si, et seulement si, } \alpha(f'_i) = \beta(f_i) \text{ pour tout } i \in I,$$

est une catégorie appelée *catégorie produit* des catégories $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$.

L'application canonique p_i de $\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$ sur $\mathcal{C}_i$ qui associe à la famille (f_i) l'élément f_i de $\mathcal{C}_i$ est foncteur de $\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$ sur $\mathcal{C}_i$ appelé foncteur projection.

Soit $(\Phi_i)_{i\in I}$ une famille de foncteurs, où Φ_i est, pour tout $i \in I$, un foncteur de la catégorie $\mathcal{C}'$, vers la catégorie $\mathcal{C}_i$. L'application qui associe à $f \in \mathcal{C}'$ l'élément $(\Phi_i(f))$ de $\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$ est un foncteur de $\mathcal{C}'$ vers $\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$, que nous noterons $\prod_{i\in I} \Phi_i$.

DEFINITION : Soit $(\mathcal{C}'_i)_{i\in I}$ et $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ deux familles de catégories, $(\Phi_i)_{i\in I}$ une famille de foncteurs, où Φ_i est un foncteur de $\mathcal{C}'_i$ vers $\mathcal{C}_i$. On appelle *foncteur produit* $\prod_{i\in I} \Phi_i$ le foncteur $\prod_{i\in I} \Phi_i\ p_i$ de $\prod_{i\in I} \mathcal{C}'_i$ vers $\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$.

DEFINITION : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et ρ une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$ compatible avec la multiplication. Une catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ est appelée *catégorie quotient* de $\mathcal{C}$ par ρ lorsque: 1°) $\tilde{\mathcal{C}}$ est la classe des classes d'équivalence modulo ρ; 2°) $\tilde{g}\tilde{f}$ est défini si et seulement si il existe $f' \in \tilde{f}$ et $g' \in \tilde{g}$ tels que $g'f'$ soit défini ; 3°) on a $\tilde{g}\tilde{f} = \widetilde{(g'f')}$, $\tilde{f}$ désignant la classe de f modulo ρ.

Pour qu'une relation d'équivalence ρ sur une catégorie $\mathcal{C}$ permette de déterminer une catégorie quotient de $\mathcal{C}$, il faut que $f' \sim f$ entraîne $\alpha(f) \sim \alpha(f')$, $\beta(f) \sim \beta(f')$ et que, si f et f' sont inversibles, alors $f^{-1} \sim f'^{-1}$. Ces relations ne sont pas suffisantes en général. Si $\mathcal{C}/\rho$ est la catégorie quotient de $\mathcal{C}$ par ρ, alors l'application : $h \to h$ modu-

-lo ρ est un foncteur de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}/\rho$.

PROPOSITION : Soit Φ un foncteur d'une catégorie $\mathcal{C}$ sur une catégorie $\overline{\mathcal{C}}$. Pour que Φ définisse $\overline{\mathcal{C}}$ comme catégorie quotient de $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que, si $\Phi(g)\Phi(f)$ est défini, alors il existe $f' \sim f$ et $g' \sim g$ tels que $g'f'$ soit défini, f et f' étant équivalents si, et seulement si, $\Phi(f) = \Phi(f')$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et ρ une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$ compatible avec la multiplication, telle que : $f \sim f'$ entraîne $\alpha(f) \sim \alpha(f')$ et $\beta(f) \sim \beta(f')$ et que, pour tout $e \sim \alpha(f)$, il existe $g \sim f$ avec $\alpha(g) = e$. Alors $\mathcal{C}/\rho$ est muni d'une structure de catégorie quotient.

En effet, la classe $\tilde{f}$ a pour unité à droite $\alpha(f)$ et pour unité à gauche $\beta(f)$. Supposons que $\tilde{h}(\tilde{g}\tilde{f})$ et $(\tilde{h}\tilde{g})\tilde{f}$ soient définis alors $\alpha(\tilde{g}) = \beta(\tilde{f})$ et $\alpha(\tilde{h}) = \beta(\tilde{g})$; soit $f \in \tilde{f}$; il existe $g \in \tilde{g}$ tel que $\alpha(g) = \beta(f)$ et il existe $h \in \tilde{h}$ tel que $\alpha(h) = \beta(g)$, donc $h(gf)$ est défini, gf est un représentant de $\tilde{g}\tilde{f}$ et $h(gf)$ est un représentant de $\tilde{h}(\tilde{g}\tilde{f})$; d'autre part, hg est un représentant de $\tilde{h}\tilde{g}$ et $(hg)f = h(gf)$ est un représentant de $(\tilde{h}\tilde{g})\tilde{f}$. Il en résulte que l'on a :

$$(\tilde{h}\tilde{g})\tilde{f} = \tilde{h}(\tilde{g}\tilde{f})$$

2. Espèces de structures et catégories d'homomorphismes :

PROPOSITION : Si un groupoïde Γ opère à gauche sur une classe $\mathcal{S}_o$ le composé de $(f, \mathcal{S})$ étant fS, alors Γ opère aussi à droite sur $\mathcal{S}_o$, le composé Sf de (f, S) étant défini si, et seulement si, $p_o(S) = \beta(f)$ et étant égal à $Sf = f^{-1}S$, où p_o est la projection de $\mathcal{S}_o$ vers Γ.

Soit $\mathcal{S}_o$ une classe quelconque. La classe des applications d'une sous-classe de $\mathcal{S}_o$ dans une sous-classe de $\mathcal{S}_o$ est une catégorie $\mathcal{A}(\mathcal{S}_o)$ lorsqu'on la munit de la multi-plication suivante :

$(f, g) \to gf$ si et seulement si f est une application de S dans S' et g une application de S' dans S'', et l'application gf est l'application : $x \to g(f(x))$ de S dans S''.

PROPOSITION : Considérons une catégorie $\mathcal{C}$ et une classe $\mathcal{S}_o$. La donnée d'une loi de composition définissant $\mathcal{C}$ comme catégorie d'opérateurs sur $\mathcal{S}_o$ équivaut à la donnée d'un foncteur Φ de $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{A}(\mathcal{S}_o)$ vérifiant la condition (a) :

a) Soit $p_o^{-1}(e)$ la classe dont l'application identique est $\Phi(e)$, où $e \in \mathcal{C}_o$; alors

$$p_o^{-1}(e) \cap p_o^{-1}(e') \neq \emptyset \text{ si } e \neq e'.$$

DEFINITION : Si $\mathcal{C}$ est une catégorie d'opérateurs sur une classe $\mathcal{S}_o$, la catégorie $\mathcal{S}$ des couples (f, z), où $f \in \mathcal{C}$ et $z \in \mathcal{S}_o$, est appelée l'*extension de la catégorie d'opéra-teurs* $\mathcal{C}$.

DEFINITION : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie opérant sur une classe $\mathcal{S}_o$; on dira que $\mathcal{S}_o$ est une *espèce de structures sur* $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{S}_o$ est une espèce de structures sur une sous-catégorie d'une catégorie $\mathcal{C}$, nous dirons que $\mathcal{S}_o$ est une *espèce de structures au-dessus de* $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ opère à droite sur $\mathcal{S}_o$, on dira que $\mathcal{S}_o$ est une espèce de structures *contra-variantes* sur $\mathcal{C}$.

Soit p le foncteur projection de l'extension $\mathcal{S}$ de la catégorie d'opérateurs $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$; l'espèce de structures sera designée par $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$, où par $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ dans le cas où $p(\mathcal{S}) = \mathcal{C}$. Le triplet $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ sera aussi appelé espèce de structures. Un élément S de $\mathcal{S}_o$ est appelé une *structure* sur l'unité $p(S)$ de $\mathcal{C}$ ou sur l'objet correspondant. Un couple (f, S), où $S \in \mathcal{S}_o$ et $f \in \mathcal{C}$ tel que fS soit défini, est appelé un *hypermorphisme* de S sur fS et, si f est inversible, un *isomorphisme* de S sur fS. La catégorie $\mathcal{S}$ est appelée *catégorie des hypermorphismes* correspondant à $\mathcal{S}_o$. Si $\mathcal{C}$ est un groupoïde, alors $\mathcal{S}$ est le *groupoïde des isomorphismes* correspondant à $\mathcal{S}_o$.

DEFINITION : Soit $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures sur une catégorie $\mathcal{C}$; une espèce de structures $\mathcal{S}'_o$ sur une catégorie $\mathcal{C}'$ est une *sous-espèce de* $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ si $\mathcal{C}'$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}'_o$ une sous-classe de $\mathcal{S}_o$ sur laquelle $\mathcal{C}'$ opère par restriction de la loi de composition. Si de plus $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des sous-catégories d'une catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$, alors $(\tilde{\mathcal{C}}, p', \mathcal{S}')$ est une sous-espèce de structures de $(\tilde{\mathcal{C}}, p, \mathcal{S})$. La sous-espèce $(\tilde{\mathcal{C}}, p', \mathcal{S}')$ est *pleine* si $\mathcal{S}'_o$ contient tout $S \in \mathcal{S}_o$ tel que $p(S) \in p'(\mathcal{S}')$.

Soit $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ une espèce de structures. La définition s'applique en particulier dans le cas où la sous-classe $\mathcal{S}'_o$ est identique à $\mathcal{S}_o$, mais l'on considère seulement l'action de la sous-catégorie $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$. On dira alors que l'espèce $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ est *plus souple* que l'espèce $[\mathcal{C}', p', \mathcal{S}']$, ou que l'espèce $[\mathcal{C}', p', \mathcal{S}']$ est *plus rigide* que l'espèce $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$. Si l'espèce $[\mathcal{C}', p', \mathcal{S}']$ est plus rigide que l'espèce $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$, alors la catégorie $\mathcal{S}'$ est une sous-catégorie de la catégorie $\mathcal{S}$. L'espèce la plus rigide déduite de l'espèce $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ est l'espèce $[\mathcal{C}_o, p', \mathcal{S}']$.

PROPOSITION : Si $\mathcal{S}_o$ est une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{C}$, alors dans $\mathcal{S}_o$ la relation : $S' < S$ si, et seulement si, il existe $f \in \mathcal{C}$ tel que $S = fS'$, est une relation de préordre. Si $\mathcal{C}$ est un groupoïde, cette relation est une relation d'équivalence.

PROPOSITION : Si $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ est une espèce de structures, alors la composante connexe de $S \in \mathcal{S}_o$ dans la catégorie $\mathcal{S}$ est une catégorie d'hypermorphismes sur la composante connexe de $p(\mathcal{S})$ dans $\mathcal{C}$.

PROPOSITION : Si $\mathcal{S}'$ est un sous-groupoïde plein du groupoïde $\mathcal{S}$ des isomorphismes d'une espèce de structures $\mathcal{S}_o$ au-dessus d'un groupoïde $\mathcal{C}$ et si $\mathcal{S}'_o$ est saturée, alors $\mathcal{S}'_o$ est une sous-espèce de structures de $\mathcal{S}_o$.

PROPOSITION : Si $\mathcal{S}'_o$ est une sous-espèce de structures de $\mathcal{S}_o$ sur un sous-groupoïde plein saturé du groupoïde $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{S}'_o$ est une sous-espèce de structures saturée.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}'_o$ une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{C}'$. *Une application covariante de* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ dans $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$ est un couple (φ_o, ψ), où ψ est un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ et φ_o une application de $\mathcal{S}_o$ dans $\mathcal{S}'_o$, tel que l'on ait:

$$\varphi_o(fS) = \psi(f)\,\varphi_o(S), \text{ si } f \in \mathcal{C},\ S \in \mathcal{S}_o \text{ et } fS \text{ est défini}.$$

Si φ_o est une application biunivoque de $\mathcal{S}_o$ sur $\mathcal{S}'_o$ et ψ un foncteur biunivoque de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$, alors (φ_o, ψ) sera appelé une *équivalence de* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ sur $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$.

PROPOSITION : Soient $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ et $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$ deux espèces de structures et ψ un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$. Les applications covariantes (φ_o, ψ) de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ dans $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$ correspondent biunivoquement aux foncteurs φ de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$ tels que: $p'\varphi = \psi p$; à une équivalence correspond un foncteur biunivoque.

DEFINITION : Soient p un foncteur d'une catégorie $\mathcal{S}$ vers une catégorie $\mathcal{C}$ et p' un foncteur d'une catégorie $\mathcal{S}'$ vers une catégorie $\mathcal{C}'$, ψ un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$. Un foncteur φ de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$ tel que $p'\varphi = \psi p$ sera appelé un *relèvement de* ψ relativement à (p, p').

PROPOSITION : Etant données deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et deux classes $\mathcal{S}_o$ et $\mathcal{S}'_o$, la donnée d'une application covariante (φ_o, ψ) d'une espèce de structures $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ vers une espèce de structures $[\mathcal{C}', p', \mathcal{S}']$ équivaut à la donnée d'un foncteur ψ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ et d'une transformation naturelle $(\varphi'\psi, \tau, \varphi)$, où φ et φ' sont des foncteurs respectivement de $\mathcal{C}$ vers $\mathfrak{A}(\mathcal{S}_o)$ et $\mathcal{C}'$ vers $\mathfrak{A}(\mathcal{S}'_o)$ vérifiant la condition (a).

PROPOSITION : Soit Σ_o une classe d'espèces de structures et soit Σ la classe des applications covariantes d'un élément de Σ_o dans un élément de Σ_o. Alors Σ est une catégorie pour la loi de composition :

$$(\varphi'_o, \psi')(\varphi_o, \psi) = (\varphi'_o\varphi_o, \psi'\psi),$$

si, et seulement si, les foncteurs ψ et ψ' sont composables ainsi que les applications φ'_o et φ_o.

Un cas particulier important d'applications covariantes est celui où la catégorie $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de la catégorie $\mathcal{C}'$ et où le foncteur ψ est le foncteur injection de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ (c'est-à-dire que $\psi(f) = f$, pour tout $f \in \mathcal{C}$). Alors une application covariante de l'espèce de structures $\mathcal{S}_o$ au-dessus de $\mathcal{C}$ dans l'espèce de structures $\mathcal{S}'_o$ au-dessus de $\mathcal{C}'$ sera seulement désignée par φ_o (cas considéré dans l'article précédent).

DEFINITION : Soient $\mathcal{S}_o'$ une espèce de structures sur une catégorie $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures sur une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}'$. On dira que $\mathcal{S}_o'$ est une *espèce de structures sous-jacente* à $\mathcal{S}_o$ si l'on se donne une application covariante φ_o de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ vers $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$.

PROPOSITION : Si $\mathcal{S}_o'$ est une espèce de structures sous-jacente à l'espèce $\mathcal{S}_o$, alors $\varphi_o(\mathcal{S}_o)$ est une sous-espèce de structures de $\mathcal{S}_o'$ et $\varphi(\mathcal{S})$ est la catégorie des hypermorphismes correspondant à $\varphi_o(\mathcal{S}_o)$.

DEFINITION : Soit $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures au-dessus d'une catégorie $\mathcal{C}$ et $\overline{\mathcal{S}}_o$ une espèce de structures au-dessus de la catégorie $\mathcal{S}$ des hypermorphismes correspondant à $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$, telles que $(\mathcal{C}, p\overline{p}(\overline{\mathcal{S}}))$ soit une sous-espèce de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$; alors $\overline{\mathcal{S}}_o$ est appelée une *espèce de superstructures au-dessus de* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$.

THEOREME : Si $(\mathcal{S}, \overline{p}, \overline{\mathcal{S}})$ est une espèce de superstructures au-dessus de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$, alors $\overline{\mathcal{S}}_o$ est une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{C}$, notée $(\mathcal{C}, \overline{\overline{p}}, \overline{\overline{\mathcal{S}}})$, telle que $(Id_{\overline{\mathcal{S}}_o}, p)$ soit une application covariante de $(\mathcal{S}, \overline{p}, \overline{\mathcal{S}})$ dans $(\mathcal{C}, \overline{\overline{p}}, \overline{\overline{\mathcal{S}}})$. De plus, $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ est sous-jacent à $(\mathcal{C}, \overline{\overline{p}}, \overline{\overline{\mathcal{S}}})$ pour p : le foncteur associé à $(Id_{\overline{\mathcal{S}}_o}, p)$ est une équivalence des catégories d'hypermorphismes $\overline{\mathcal{S}}$ et $\overline{\overline{\mathcal{S}}}$ qui permet d'itendifier $(\mathcal{C}, \overline{\overline{p}}, \overline{\overline{\mathcal{S}}})$ avec $(\mathcal{C}, p\overline{p}, \overline{\mathcal{S}})$.

RECIPROQUE : Si $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ est une espèce de structures sous-jacente à $(\overline{\mathcal{C}}, \overline{\overline{p}}, \overline{\mathcal{S}})$ pour l'application φ_o, alors $\overline{\mathcal{S}}_o$ est aussi une espèce de superstructures au-dessus de $(\mathcal{C}, \overline{p}, \varphi(\overline{\mathcal{S}}))$, où φ est le foncteur de la catégorie $\overline{\mathcal{S}}$ dans $\mathcal{S}$ correspondant à φ_o.

DEFINITION : Soit $\mathcal{H}$ une catégorie et $\mathcal{S}$ une sous-catégorie de $\mathcal{H}$. On appelle $\mathcal{H}$ une *catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ si l'on se donne un foncteur de p de $\mathcal{H}$ vers une catégorie $\mathcal{C}$ vérifiant les axiomes suivants :

1) $\mathcal{H}_o$ est une espèce de structures $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$, où p désigne ici la restriction de p à $\mathcal{S}$.
2) Si h et h' sont deux éléments de $\mathcal{H}$ tels que $p(h) = p(h')$, $\alpha(h) = \alpha(h')$ et $\beta(h) = \beta(h')$, alors $h = h'$.

La catégorie d'homomorphismes $\mathcal{H}$ pour $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ sera notée $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$.

PROPOSITION : Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes; alors $\mathcal{H}$ peut être considérée comme une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{S}$ ou de $\mathcal{C}$.

Le composé de (f', S'), où $f' \in \mathcal{C}$, $S' \in \mathcal{H}_o$ et $p(S') = \alpha(f')$, avec $h \in \mathcal{H}$ est défini si, et seulement si, $\beta(h) = S'$ et est égal à $(f', S')h$; alors h est une structure sur $\beta(h)$.

Si $p(\mathcal{S})$ opérait à droite sur $\mathcal{S}$, le composé de $(S, f) \in \mathcal{S}$ avec $h \in \mathcal{H}$ serait défini si, et seulement si, $\alpha(h) = S$ et serait égal à $h(S, f)$; alors h serait une structure sur $\alpha(h)$ et $p(\mathcal{S})$ opèrerait aussi à droite sur $\mathcal{H}$, le composé hf de (f, h) étant défini si, et seulement si, $p(S) = \alpha(f)$ et $S = \alpha(h)$ et étant $hf = h(S, f)$.

PROPOSITION : Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes pour $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est un groupoïde; alors $\mathcal{H}$ peut être considéré comme une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ ou de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ (cas de l'article précédent).

Une catégorie $\mathcal{H}$ munie d'un foncteur p vers $\mathcal{C}$ telle que l'axiome 2 des catégo--ries d'homomorphismes soit vérifié sera appelée *une catégorie au-dessus de* $\mathcal{C}$; c'est une catégorie d'homomorphismes où $\mathcal{S}$ est la sous-catégorie de $\mathcal{H}$ réduite à $\mathcal{H}_o$. En particulier, une catégorie $\mathcal{C}$ est toujours une catégorie au-dessus d'elle-même pour le foncteur identique.

3. Catégories induites et extensions inessentielles :

Si Φ est un foncteur, sa restriction à la classe des unités est désignée par Φ_o. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, le groupoïde de ses éléments inversibles sera noté Γ et γ désignera le foncteur $h \to (\beta(h), \alpha(h))$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}_o \times \mathcal{C}_o$.

DEFINITION : Soient $\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{H}$ des catégories, p un foncteur de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{C}$ et $\varkappa$ un foncteur de $\overline{\mathcal{C}}$ vers $\mathcal{C}$. On appellera *catégorie induite de* $\mathcal{H}$ *par* $(\varkappa, p)$ et on notera $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ la sous-catégorie de $\mathcal{H} \times \overline{\mathcal{C}}$ formée des couples $(h, \bar{k})$ tels que $\varkappa(\bar{k}) = p(h)$.

Les catégories $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ et $p^*(\mathcal{C}, \varkappa)$ sont équivalentes.

THEOREME : Soient $\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{H}$ des catégories; il existe un foncteur $\bar{p}$ de $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ vers $\overline{\mathcal{C}}$ et un foncteur η relèvement de $\varkappa$ relativement à $(p, \bar{p})$ tels que, si p' est un foncteur d'une catégorie $\mathcal{H}'$ vers $\overline{\mathcal{C}}$ et η' un relèvement de $\varkappa$ relativement à (p, p'), alors il existe un foncteur $\bar{\eta}'$ de $\mathcal{H}'$ vers $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ tel que $\bar{p}\,\bar{\eta}' = p'$.

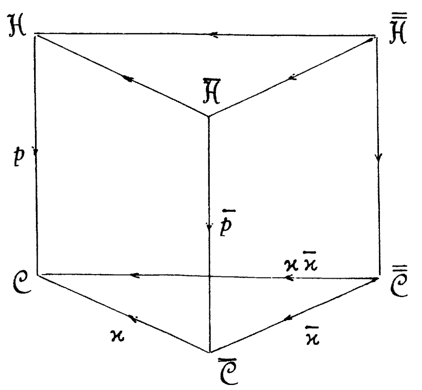
$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{H}' \arrow[dll, "\eta'"'] \arrow[dl, "\bar{\eta}'"] \arrow[ddl, "p'"] \\
\mathcal{H} \arrow[d, "p"'] & \varkappa^*(\mathcal{H}, p) \arrow[l, "\eta"] \arrow[d, "\bar{p}"'] & \\
\mathcal{C} & \overline{\mathcal{C}} \arrow[l, "\varkappa"] &
\end{tikzcd}$$

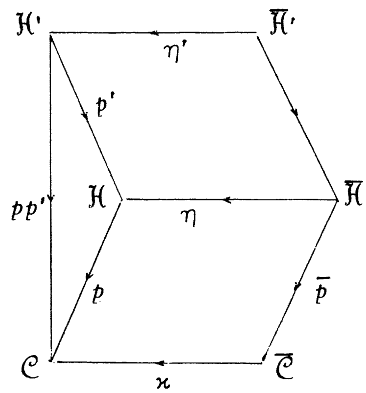
COROLLAIRE 1 : Si p_o est une injection, alors $\overline{p}_o$ est une injection; si $p_o(\mathcal{H}_o) = \mathcal{C}_o$, alors $\overline{p}_o$ est une application sur $\overline{\mathcal{C}}_o$. Si $p(\mathcal{H}) = \mathcal{C}$, alors $\overline{p}(\varkappa^*(\mathcal{H}, p)) = \overline{\mathcal{C}}$; si $\varkappa(\overline{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}$, alors $\eta(\varkappa^*(\mathcal{H}, p)) = \mathcal{H}$. Si p (resp. $\varkappa$) est une injection, alors $\overline{p}$ (resp. η) est une injection. Si p est le foncteur identité de $\mathcal{C}$, $\overline{p}$ est une équivalence de $\varkappa^*(\mathcal{C}, Id)$ sur $\overline{\mathcal{C}}$. Si p'_o ou η'_o sont des injections, alors $\overline{\eta}'_o$ est une injection; si p' ou η' sont des équivalences, alors $\overline{\eta}'$ est une équivalence.

COROLLAIRE 2 : Si $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ est une espèce de structures, alors $\varkappa^*(\mathcal{S}, p)$ est une catégorie d'hypermorphismes au-dessus de $\overline{\mathcal{C}}$. Si $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ est une catégorie d'homo--morphismes, alors $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ est une catégorie d'homomorphismes pour $(\mathcal{C}, \overline{p}, \varkappa^*(\mathcal{S}, p))$.

PROPOSITION : (transitivité horizontale et verticale) : Soient $\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}}, \overline{\overline{\mathcal{C}}}, \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ des catégories; si $\varkappa$ est un foncteur de $\overline{\mathcal{C}}$ vers $\mathcal{C}$, p un foncteur de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{C}$ et $\overline{\varkappa}$ un foncteur de $\overline{\overline{\mathcal{C}}}$ vers $\overline{\mathcal{C}}$, alors $(\varkappa\overline{\varkappa})^*(\mathcal{H}, p)$ et $\overline{\varkappa}^*(\varkappa^*(\mathcal{H}, p), \overline{p})$ sont équivalents. Si p' est un foncteur de $\mathcal{H}'$ vers $\mathcal{H}$, alors $\varkappa^*(\mathcal{H}, pp')$ et $\eta^*(\mathcal{H}', p')$ sont équivalents; $\overline{p}$ et η désignent les applications canoniques de $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ vers $\overline{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{H}$.

$$\overline{\mathcal{H}} = \varkappa^*(\mathcal{H}, p)$$
$$\overline{\overline{\mathcal{H}}} = (\varkappa\overline{\varkappa})^*(\mathcal{H}, p) \sim \overline{\varkappa}^*(\overline{\mathcal{H}}, \overline{p})$$
$$\overline{\mathcal{H}}' = \eta^*(\mathcal{H}', p') \sim \varkappa^*(\mathcal{H}', pp')$$



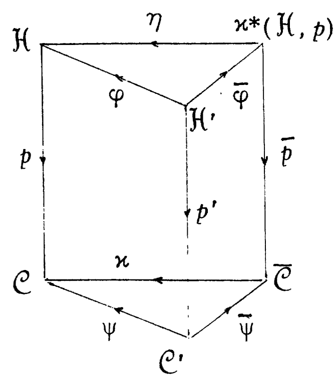


DEFINITION : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et q une application d'une classe $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}_o$; on appelle *catégorie induite de* $\mathcal{C}$ *par* q et on note $q^*(\mathcal{C})$ la catégorie $(q\times q)^*(\mathcal{C}, \gamma)$ induite de $\mathcal{C}$ par $(q\times q, \gamma)$, le produit $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ étant muni de la loi de composition :

$$(u'', u'_1)(u', u) = (u'', u) \text{ si, et seulement si, } u'_1 = u'.$$

PROPOSITION : Tout foncteur Ψ d'une catégorie $\mathcal{C}'$ vers une catégorie $\mathcal{C}$ admet une décomposition canonique $\Psi = \eta\overline{\Psi}$ dans laquelle $\overline{\Psi}_o$ est une injection et η est le le foncteur canonique de $\Psi_0^*(\mathcal{C})$ vers $\mathcal{C}$; la restriction de η à la classe des éléments de $\overline{\Psi}(\mathcal{C}')$ de source et but fixés est une injection. Si Ψ_0 est une bijection, alors η est une équivalence.

PROPOSITION : Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ une espèce de structures et q une application d'une classe $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}_0$; la catégorie $(q \times q)^*(\mathcal{S}, \gamma p) = q^*(\mathcal{S})$ induite de $\mathcal{S}$ par $(q \times q, \gamma p)$ est une catégorie d'hypermorphismes au-dessus de $q^*(\mathcal{C})$; l'espèce de structures $(q^*(\mathcal{C}), \pi, q^*(\mathcal{S}))$ est appelée *espèce de structures induite de* $\mathcal{S}$ *au-dessus de* $q^*(\mathcal{C})$. Si $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ est une catégorie d'homomorphismes, alors la catégorie $q^*(\mathcal{H}) = (q \times q)^*(\mathcal{H}, \gamma p)$ induite de $\mathcal{H}$ par $(q \times q, \gamma p)$, est une catégorie d'homomorphismes pour: $(q^*(\mathcal{C}), \overline{\pi}, q^*(\mathcal{S}))$.

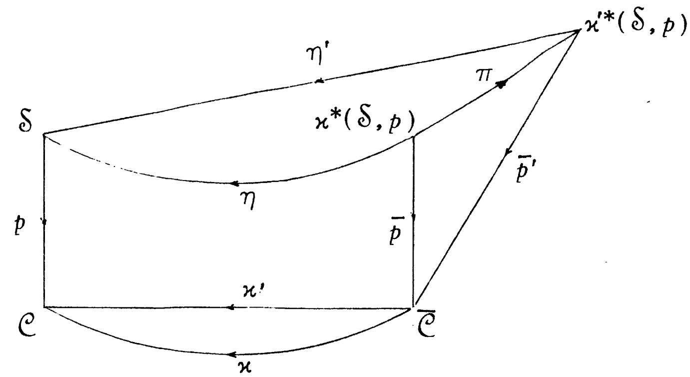


PROPOSITION prismatique: Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\overline{\mathcal{C}}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ des catégories, ψ et $\varkappa$ des foncteurs de $\mathcal{C}'$ et $\overline{\mathcal{C}}$ vers $\mathcal{C}$, p' un foncteur de $\mathcal{H}'$ vers $\mathcal{C}'$, p un foncteur de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{C}$, φ un relèvement de ψ relativement à (p', p); Si $\overline{\psi}$ est un foncteur de $\mathcal{C}'$ vers $\overline{\mathcal{C}}$ tel que l'on ait:

$$\varkappa\, \overline{\psi} = \psi,$$

alors il existe un foncteur $\overline{\varphi}$ de $\mathcal{H}'$ vers $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$, relèvement de $\overline{\psi}$ relativement à $(p', \overline{p})$ tel que $\eta\, \overline{\varphi} = \varphi$, où $\overline{p}$ et η désignent les foncteurs canoniques de $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ vers $\overline{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{H}$.

PROPOSITION : Soit $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ une catégorie d'hypermorphismes sur $\mathcal{C}$, $\varkappa$ et $\varkappa'$ deux foncteurs d'une catégorie $\overline{\mathcal{C}}$ vers $\mathcal{C}$ tels qu'il existe une transformation naturelle $(\varkappa', \theta, \varkappa)$ de $\varkappa$ vers $\varkappa'$. Alors il existe un foncteur π de $\varkappa^*(\mathcal{S}, p)$ vers $\varkappa'^*(\mathcal{S}, p)$ et une transformation naturelle $(\eta'\pi, \tau, \eta)$ de η vers $\eta'\pi$, où η et η' sont les foncteurs canoniques de $\varkappa^*(\mathcal{S}, p)$ et $\varkappa'^*(\mathcal{S}, p)$ vers $\mathcal{S}$, de sorte que l'on ait: $p\,\tau = \theta\, \overline{p}$.



PROPOSITION : Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes, $\varkappa$ et $\varkappa'$ deux foncteurs d'une catégorie $\overline{\mathcal{C}}$ vers $\mathcal{C}$ et $(\varkappa', \theta, \varkappa)$ une équivalence naturelle de $\varkappa$ vers $\varkappa'$ telle que, pour tout $\bar{e} \in \overline{\mathcal{C}}_0$, on ait : $\theta(\bar{e}) \in p(\mathcal{S})$; alors il existe une équiva-lence $\bar{\pi}$ de $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ vers $\varkappa'^*(\mathcal{H}, p)$ (resp. π de $\varkappa^*(\mathcal{S}, p)$ vers $\varkappa'^*(\mathcal{S}, p)$) et une équivalence naturelle $(\eta'\bar{\pi}, \bar{\tau}, \eta)$ (resp. $(\eta'\pi, \bar{\tau}, \eta)$) telles que : $p\bar{\tau} = \theta\bar{p}$, où η et η' désignent les foncteurs canoniques de $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ et $\varkappa'^*(\mathcal{H}, p)$ vers $\mathcal{H}$ (resp. de $\varkappa^*(\mathcal{S}, p)$ et $\varkappa'^*(\mathcal{S}, p)$ vers $\mathcal{S}$),

DEFINITION : Soit $\overline{\mathcal{C}}$ une catégorie et $\mathcal{C}$ une sous-catégorie; on dit que $(\varkappa, \overline{\mathcal{C}})$ est une *extension inessentielle de* $\mathcal{C}$ si $\varkappa$ est un foncteur de $\overline{\mathcal{C}}$ sur $\mathcal{C}$ dont la restriction à $\mathcal{C}$ est l'identité. Soit p un foncteur d'une catégorie $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{C}$ et $(\eta, \overline{\mathcal{H}})$ une exten-sion inessentielle de $\mathcal{H}$; un relèvement $\bar{p}$ de p relativement à $(\varkappa, \eta)$ sera appelé une *extension* de p à $\overline{\mathcal{H}}$ si la restriction de $\bar{p}$ à $\mathcal{H}$ est p.

THEOREME : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ des catégories, p un foncteur de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{C}$ et $(\varkappa, \overline{\mathcal{C}})$ une extension inessentielle de $\mathcal{C}$; alors la catégorie $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ induite de $\mathcal{H}$ par $(\varkappa, p)$ est une extension inessentielle $(\eta, \overline{\mathcal{H}})$ de $\mathcal{H}$ pour le foncteur canonique η de $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ vers $\mathcal{H}$, appelée *extension canonique* de $\mathcal{H}$ à $(\varkappa, \overline{\mathcal{C}})$ ou à $\overline{\mathcal{C}}$. Si $\mathcal{C}$ est plein sans $\overline{\mathcal{C}}$, $\mathcal{H}$ est plein dans $\overline{\mathcal{H}}$.

PROPOSITION : Soit $(\varkappa', \overline{\mathcal{C}}')$ une extension inessentielle d'une catégorie $\mathcal{C}'$ et ψ un foncteur de $\mathcal{C}'$ sur une catégorie $\mathcal{C}$ tel que ψ_0 soit une bijection. Alors il existe une extension inessentielle $(\varkappa, \overline{\mathcal{C}})$ de $\mathcal{C}$ et une extension $\bar{\psi}$ de ψ à $\overline{\mathcal{C}}'$ telle que $\bar{\psi}$ soit une surjection sur $\overline{\mathcal{C}}$ et que $\bar{\psi}_0$ soit une bijection.

4. Elargissements.

DEFINITION : Soient $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ et $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$ deux espèces de structures où $\mathcal{C}$ est un sous-groupoïde du groupoïde $\mathcal{C}'$. L'espèce $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$ est appelée *élargissement* de l'espèce $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ est une sous-espèce de structures de $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$.

2) Σ est un sous-groupoïde plein de Σ'.

3) Toute structure $S' \in \Sigma'_0$ est isomorphe au moins à une structure $S \in \Sigma_0$ par un iso-morphisme appartenant à Σ'.

Si de plus $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des sous-groupoïdes d'une catégorie $\mathcal{C}''$, on dit que l'espèce $(\mathcal{C}'', p', \Sigma')$ est un *élargissement* de l'espèce $(\mathcal{C}'', p, \Sigma)$ au-dessus de $\mathcal{C}''$.

PROPOSITION : Si $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}'$, alors la condition 1) entraîne la condition 2) et $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ est une sous-espèce pleine de $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$.

DEFINITION : Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes; une catégorie d'ho-momorphismes $(\mathcal{C}', p', \mathcal{H}', \mathcal{S}')$ est appelée *élargissement de* $\mathcal{H}$ *au-dessus de* $\mathcal{C}$ si les conditions suivantes sont vérifiées:

1) $(\mathcal{C}', p', \Sigma')$ est un élargissement de l'espèce $(\mathcal{C}', p, \Sigma)$, où Σ et Σ' sont les groupoïdes des éléments inversibles de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.

2) $\mathcal{H}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{S}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}'$.

PROPOSITION : Pour que $(\mathcal{C}', p', \mathcal{H}', \mathcal{S}')$ soit un élargissement de $\mathcal{H}$ au-dessus de $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:

1) $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ est une sous-espèce de $(\mathcal{C}', p', \Sigma')$.

2) Σ est un sous-groupoïde plein de Σ'; $\mathcal{H}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{H}'$ et on a: $\mathcal{S} = \mathcal{H} \cap \mathcal{S}'$.

3) Tout élément $h' \in \mathcal{H}'$ est isomorphe à un élément h de $\mathcal{H}$ relativement à $\Sigma' \times \Sigma'$.

COROLLAIRE : Pour que $\mathcal{H}'$ soit un élargissement de $\mathcal{H}$, il faut et il suffit que $(\mathcal{C}', p', \Sigma')$ soit un élargissement de l'espèce $(\mathcal{C}', p, \Sigma)$ et que $\mathcal{H}'$ (resp. $\mathcal{S}'$) considéré comme espèce de structures au-dessus de $\Sigma' \times \Sigma'$ soit un élargissement de $\mathcal{H}$ (resp. de $\mathcal{S}$) considéré comme espèce de structures au-dessus de $\Sigma \times \Sigma$.

THEOREME : Si $(\mathcal{C}', p', \mathcal{H}', \mathcal{S}')$ est un élargissement de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ et si $(\mathcal{C}'', p'', \mathcal{H}'', \mathcal{S}'')$ est un élargissement de $(\mathcal{C}', p', \mathcal{H}', \mathcal{S}')$, alors $\mathcal{H}''$ est un élargissement de $\mathcal{H}$ au-dessus de $\mathcal{C}''$.

COROLLAIRE : Dans une classe de catégories d'homomorphismes, la relation: $\mathcal{H} < \mathcal{H}'$ si, et seulement si, $\mathcal{H}'$ est un élargissement de la catégorie d'homomorphismes $\mathcal{H}$, est une relation d'ordre.

Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}'$; un élargissement maximal de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ dans la classe de tous les élargissements de $\mathcal{H}$ au-dessus de $\mathcal{C}'$ est appelé *élargissement de* $\mathcal{H}$ *à* $\mathcal{C}'$ ou *élargissement maximal de* $(\mathcal{C}', p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$. Soient Γ et Γ' les groupoïdes des éléments inversibles de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$; on dit que $\mathcal{C}'$ est un *élargissement de* $\mathcal{C}$ si la catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{C}', Id, \mathcal{C}', \Gamma')$ est un élargissement de $(\mathcal{C}, Id, \mathcal{C}, \Gamma)$.

PROPOSITION : Pour que $\mathcal{C}'$ soit un élargissement de $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que $\mathcal{C}$ soit plein dans $\mathcal{C}'$ et que Γ' soit le sous-groupoïde plein saturé de Γ' engendré par Γ. Si $\mathcal{C}_i$ est une composante connexe de $\mathcal{C}$, la composante connexe $\mathcal{C}'_i$ de $\mathcal{C}_i$ dans $\mathcal{C}'$ est un élargissement de $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}'$ est la réunion des $\mathcal{C}'_i$.

COROLLAIRE : Pour que $(\mathcal{C}', p', \mathcal{H}', \mathcal{S}')$ soit un élargissement de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \Sigma)$, où Σ est le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{H}$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées.

1) $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ est une sous-espèce de structures de $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$.

2) $\mathcal{H}'$ est un élargissement de la catégorie $\mathcal{H}$ et $\mathcal{S}'$ est le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{H}'$,

PROPOSITION : Si $\mathcal{C}'$ est un élargissement d'une sous-catégorie $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}'$ est une extension inessentielle $(\varkappa, \mathcal{C}')$ de $\mathcal{C}$ et est équivalente à la catégorie induite $\varkappa_o^*(\mathcal{C})$. Si $(\varkappa, \mathcal{C}')$ et $(\varkappa_1, \mathcal{C}')$ sont deux extensions inessentielles de $\mathcal{C}$, alors $\varkappa$ et $\varkappa_1$ sont équivalents.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{C}$ un sous-groupoïde d'un groupoïde $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ le sous-groupoïde plein de $\mathcal{C}'$ ayant $\mathcal{C}_o$ pour classe de ses unités; pour que tout foncteur de $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{C}_1$ puisse se prolonger en un foncteur de $\mathcal{C}'$ vers $\mathcal{C}_1$, il faut et il suffit que $\mathcal{C}''$ soit une extension inessentielle de $\mathcal{C}$.

DEFINITION : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie; pour toute classe d'intransitivité $\mathcal{C}_o^i$ de $\mathcal{C}_o$ relativement à Γ, choisissons une unité e_i. La sous-catégorie pleine $\check{\mathcal{C}}$ ayant les e_i pour unités est appelée *catégorie réduite* de $\mathcal{C}$.

PROPOSITION : Une catégorie $\mathcal{C}$ est un élargissement de toute catégorie réduite $\check{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$, donc est équivalente à une catégorie induite $\varkappa_o^*(\check{\mathcal{C}})$. $\check{\mathcal{C}}$ est un élément minimal pour la relation d'ordre définie ci-dessus, dans toute classe de catégories contenant $\mathcal{C}$.

PROPOSITION : Soient p un foncteur d'une catégorie $\mathcal{H}$ sur une catégorie $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ un élargissement de $\mathcal{C}$; l'extension canonique $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ à $(\varkappa, \mathcal{C}')$ est un élargissement de $\mathcal{H}$ à $\mathcal{C}'$.

THEOREME : Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \Sigma)$ une catégorie d'homomorphismes, où Σ est un groupoïde. Pour $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{C}}$, il existe un élargissement canonique $(\overline{\mathcal{C}}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\Sigma})$ tel que tout élargissement de $\mathcal{H}$ au-dessus de $\overline{\mathcal{C}}$ s'identifie à un élargissement $(\overline{\mathcal{C}}, p', \mathcal{H}', \Sigma') \prec (\overline{\mathcal{C}}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\Sigma})$:

Soit $\mathcal{G}$ la classe des éléments f de $\overline{\Gamma}$ tels que $\alpha(f) \in \mathcal{C}$ et α l'application: $f \to \alpha(f)$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{C}_o$. Alors $\overline{\mathcal{H}}$ est la catégorie quotient de $\alpha^*(\mathcal{H})$ par la relation d'équivalence: $(h_1, f'_1, f_1) \sim (h, f', f)$ si, et seulement si, $f_1 = fg^{-1}, f'_1 = f'g'^{-1}, h_1 = g'hg^{-1}$, $(g, \alpha(h)) \in \Sigma, (g', \beta(h)) \in \Sigma$.

COROLLAIRE 1 : Soit Γ' un sous-groupoïde de $\overline{\mathcal{C}}$ tel que, pour tout $e' \in \Gamma'_o$, il existe $f \in \Gamma'$ avec $\alpha(f) \in p(\Sigma)$ et $\beta(f) = e'$. Alors l'image canonique dans $\overline{\mathcal{H}}$ de la sous-catégorie de $\alpha^*(\mathcal{H})$ formée des triplets (h, f', f), où $f \in \Gamma'$ et $f' \in \Gamma'$, est un élargissement $(\overline{\mathcal{C}}, p', \mathcal{H}', \Sigma')$ de $\mathcal{H}$ tel que $\Gamma' = p(\Sigma')$.

COROLLAIRE 2 : Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes et $(\overline{\mathcal{C}}, \bar{p}, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\Sigma})$ l'élargissement canonique de $(\overline{\mathcal{C}}, p, \mathcal{S}, \Sigma)$. Pour que $(\overline{\mathcal{C}}, \bar{p}, \overline{\mathcal{S}})$ soit une espèce de structures, il suffit que la condition suivante soit vérifiée : Si $k' = kg$, où $k \in \mathcal{C}, k' \in \mathcal{C}, g \in \overline{\Gamma}$, alors $g \in \Gamma$. Dans ce cas on a $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S}) \prec (\overline{\mathcal{C}}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$.

THEOREME (transitivité verticale) : Soient Σ et Σ' deux groupoïdes et (Σ, p', Σ') une espèce de superstructures au-dessus de $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$; soient $(\mathcal{C}, \bar{p}, \overline{\Sigma})$ et $(\overline{\Sigma}, \bar{p}', \overline{\Sigma}')$ les élargissements maxima de $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ et $(\overline{\Sigma}, p', \Sigma)$. Alors $(\mathcal{C}, \bar{p}\bar{p}', \overline{\Sigma}')$ est équivalent à l'élargissement maximal de $(\mathcal{C}, pp', \Sigma')$.

COROLLAIRE 1 : Soit $(\mathcal{C}, p', \Sigma)$ une sous-espèce de $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$; l'élargissement maxi- -mal $(\mathcal{C}, \bar{p}, \bar{\Sigma})$ de $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ est une espèce de structures sous-jacente à l'élargissement maximal $(\mathcal{C}, \bar{p}, \bar{\Sigma}')$ de $(\mathcal{C}, p', \Sigma')$ et Σ' s'identifie à l'élargissement maximal $\tilde{\Sigma}'$ de Σ' à $\bar{\Sigma}$.

COROLLAIRE 2 : Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \Sigma)$ une catégorie d'homomorphismes et $\bar{\mathcal{C}}$ une catégorie contenant $\mathcal{C}$; soit $\tilde{\mathcal{C}}$ l'élargissement de $\mathcal{C}$ à $\bar{\mathcal{C}}$. Alors l'élargissement canonique $\bar{\mathcal{H}}$ de $\mathcal{H}$ à $\bar{\mathcal{C}}$ est équivalent à l'extension canonique de $\mathcal{H}$ à $\tilde{\mathcal{C}}$.

THEOREME : Soient $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ et $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$ des espèces de structures, où Σ et Σ' sont des groupoïdes. Soient $[\bar{\mathcal{C}}, \bar{p}, \bar{\Sigma}]$ et $[\bar{\mathcal{C}}', \bar{p}', \bar{\Sigma}',]$ deux élargissements de $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ et $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$; soit (φ_o, ψ) une application covariante de $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ dans $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$ et $\bar{\psi}$ un foncteur de $\bar{\mathcal{C}}$ vers $\bar{\mathcal{C}}'$ dont la restriction à $\mathcal{C}$ est ψ; alors il existe une appli- -cation covariante $(\bar{\varphi}_o, \bar{\psi})$, déterminée d'une façon unique, telle que φ_o soit la restric- -tion de $\bar{\varphi}_o$ à Σ_o; le foncteur $\bar{\varphi}$ correspondant à $\bar{\varphi}_o$ est un élargissement de φ à $\bar{\Sigma}$.

THEOREME : Soient $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \Sigma)$ et $(\mathcal{C}', p', \mathcal{H}', \Sigma')$ des catégories d'homomorphismes, et $(\bar{\mathcal{C}}, \bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\Sigma})$ et $(\bar{\mathcal{C}}', \bar{p}', \bar{\mathcal{H}}', \bar{\Sigma}')$ des élargissements de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$. Soit ψ un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$, $\bar{\psi}$ et $\bar{\psi}'$ des foncteurs de $\bar{\mathcal{C}}$ vers $\bar{\mathcal{C}}'$ dont la restriction à $\mathcal{C}$ est ψ. Tout foncteur φ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$ relèvement de ψ relativement à (p, p') s'élargit d'une façon unique en un foncteur $\bar{\varphi}$ (resp. $\bar{\varphi}'$) de $\bar{\mathcal{H}}$ vers $\bar{\mathcal{H}}'$, relèvement de $\bar{\psi}$ (resp. $\bar{\psi}'$) relative- -ment à $(\bar{p}, \bar{p}')$. De plus il existe une équivalence naturelle $(\bar{\varphi}', \tau, \bar{\varphi})$.

5. Groupoïdes préinductifs et inductifs.

DEFINITION : Une *classe préinductive* est une classe $\mathcal{A}$ munie d'une relation d'ordre telle que deux éléments quelconques aient une intersection et que $\mathcal{A}$ admette un plus petit élément noté 0. Une *classe prélocale* est une classe préinductive $\mathcal{A}$ vérifiant l'axiome de distributivité (D) suivant :

(D) Pour toute sous-classe B de $\mathcal{A}$ admettant un agrégat et pour tout $a \in \mathcal{A}$, la classe des éléments $a \cap b$, où $b \in B$, admet $a \cap (\cup B)$ pour agrégat: $a \cap (\cup B = \bigcup_{b \in B} (a \cap b)$.

DEFINITION : Un groupoïde $\mathcal{S}$ est appelé *groupoïde (pré)inductif* s'il est muni d'une relation d'ordre pour laquelle $\mathcal{S}$ soit une classe (pré)inductive et si l'axiome (I) suivant est vérifié :

(I) Soit $\varphi(f)$, pour tout $f \in \mathcal{S}$, la classe des éléments $f' < f$: alors l'application $\varphi: f \to \varphi(f)$ est un foncteur généralisé de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}$ appelé *foncteur d'induction*.

Dans un groupoïde préinductif, le composé de f et g, où $\alpha(g) = \beta(f)$, sera désigné par $g \cdot f$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde préinductif et $f \in \mathcal{S}$. Pour tout $e < \alpha(f)$, il existe un et un seul $g < f$ tel que $\alpha(g) = e$ et pour tout $e' < \beta(f)$, il existe un et un seul $g' < f$ tel que $\beta(g') = e'$. On appellera g *l'élément induit par* f sur e et g' *l'élément induit à gauche* par f sur e'.

PROPOSITION : L'agrégat d'une classe d'unités est une unité. Soit $\mathcal{A}$ une sous-classe du groupoïde préinductif $\mathcal{S}$. Si A admet un agrégat, alors $\cup\alpha(A)$, $\cup\beta(A)$ et $\cup A^{-1}$, où A^{-1} désigne la classe des inverses des éléments de A, sont définis; de plus, on a:

$$\cup\,\alpha(A) = \alpha(\cup A); \qquad \cup\beta(A) = \beta(\cup A); \qquad (\cup A)^{-1} = \cup A^{-1}.$$

Supposons A majorée par f; si $\cup\alpha(A)$ ou $\cup\beta(A)$ est défini, alors $\cup A$ existe; si $\cap A$ est défini, alors $\cap\alpha(A)$ et $\cap\beta(A)$ sont définis et l'on a:

$$\alpha(\cap A) = \cap\,\alpha(A); \qquad \beta(\cap A) = \cap\,\beta(A).$$

PROPOSITION : La loi de composition dans un groupoïde préinductif $\mathcal{S}$ peut être étendue à tous les couples (f', f) en une loi de composition associative $(f, f') \to f'f$, appelée *pseudomultiplication*, de la façon suivante:

Soit g' l'élément induit par f' sur $e = \alpha(f') \cap \beta(f)$ et g l'élément induit à gauche par f sur e; on pose : $f'f = g' \cdot g$.
Alors $f'f$ est l'agrégat de la sous-classe $\mathbb{K}$ de $\mathcal{S}$ formée des produits $h' \cdot h$, où $h' < f'$, $h < f$.

Muni de la pseudomultiplication, un groupoïde $(\hat{\text{pré}})$inductif $\mathcal{S}$ est appelé *$(\hat{\text{pré}})$-pseudogroupe*; pour tout $f \in \mathcal{S}$, tout $f' \in \mathcal{S}$ et $e \in \mathcal{S}_o$, on a les formules:

$$f'f = (f'\beta(f)) \cdot (\alpha(f')f); \quad \alpha(fe) = \alpha(f)e; \quad \beta(ef) = e\beta(f); \quad fe = \beta(fe)f = f\alpha(fe);$$

$$ef = f\alpha(ef) = \beta(ef)f; \quad (fe)^{-1} = ef^{-1}; \quad (ef)^{-1} = f^{-1}e; \quad (f'f)^{-1} = f^{-1}f'^{-1}.$$

PROPOSITION : Pour qu'un groupoïde $\mathcal{S}$ soit un groupoïde inductif, il faut et il suffit que $\mathcal{S}$ soit muni d'une relation d'ordre vérifiant l'axiome (I), que $\mathcal{S}_o$ soit une classe inductive pour l'ordre induit et que toute sous-classe E de $\mathcal{S}_o$ majorée dans $\mathcal{S}_o$ admette un agrégat dans $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}$ deux groupoïdes $(\hat{\text{pré}})$inductifs; alors le groupoïde produit $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$ est un groupoïde $(\hat{\text{pré}})$inductif, appelé *groupoïde produit*, pour la relation d'ordre:

$$(g', g) < (f', f) \text{ si, et seulement si, } g < f \text{ et } g' < f'.$$

DEFINITION : Un *groupoïde $(\hat{\text{pré}})$local* est un groupoïde $(\hat{\text{pré}})$inductif dont la classe des unités vérifie l'axiome de distributivité (D).

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal; alors $\mathcal{S}$ est une classe prélocale.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal, A et A' deux sous-classes de $\mathcal{S}$ admet--tant des agrégats. Alors la sous-classe $A'A$ des pseudoproduits $a'a$, où $a' \in A'$ et $a \in A$, admet $(\cup A')(\cup A)$ pour agrégat.

DEFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un prépseudogroupe. On appellera *classe compatible* de $\mathcal{S}$ une sous--classe F de $\mathcal{S}$ telle que, pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$, on ait :

$$\alpha(f \cap f') = \alpha(f)\alpha(f'); \qquad \beta(f \cap f') = \beta(f)\beta(f').$$

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un prépseudogroupe, $f \in \mathcal{S}$ et $f' \in \mathcal{S}$. La condition : $\alpha(f \cap f') = \alpha(f)\alpha(f')$ (respectivement $\beta(f \cap f') = \beta(f)\beta(f')$) est équivalente à chacune des conditions suivantes :

1) $f\alpha(f') = f'\alpha(f)$; 2) $f\alpha(f') = f \cap f'$; 3) $f'f^{-1}$ est une unité

(respectivement: 1') $\beta(f)f' = \beta(f')f$; 2') $\beta(f)f' = f \cap f'$; 3') $f'^{-1}f \in \mathcal{S}_o$).

Elle entraîne aussi : $f'f^{-1} = \beta(f \cap f')$ (respectivement $f'^{-1}f = \alpha(f \cap f')$).

DEFINITION : Soit $\mathfrak{A}$ une classe préinductive. Une sous-classe $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$ est appelée *sous-classe* (respectivement *partie sous-*) *inductive* $\hat{(}$*faible*$\hat{)}$ de $\mathfrak{A}$ si elle vérifie les axiomes 1 (resp. 1') et 2 suivants:

1) $\mathfrak{A}'$ est saturé par intersection finie.

1') Si $a < b$, $a' < b$, $a \in \mathfrak{A}'$, $a' \in \mathfrak{A}'$, $b \in \mathfrak{A}'$, alors $a \cap a' \in \mathfrak{A}'$.

2) Pour toute sous-classe B de $\mathfrak{A}'$ $\hat{(}$majorée dans $\mathfrak{A}'\hat{)}$ admettant un agrégat dans $\mathfrak{A}$, on a : $\cup B \in \mathfrak{A}'$.

Si B est une sous-classe de $\mathfrak{A}$, l'intersection $\mathfrak{B}$ des sous-classes (resp. parties sous-) inductives $\hat{(}$faibles$\hat{)}$ contenant B est appelée *sous-classe* (resp. *partie sous-*) *inductive* $\hat{(}$*faible*$\hat{)}$ *engendrée par* B *dans* $\mathfrak{A}$. Si $\mathfrak{B}$ est la classe des agrégats des sous--classes de B $\hat{(}$majorées dans $B\hat{)}$ admettant un agrégat dans $\mathfrak{A}$, B est appelé *base* de $\mathfrak{B}$.

PROPOSITION : Soit B une sous-classe d'une classe prélocale $\mathfrak{A}$ qui contienne avec deux éléments majorés dans $\mathfrak{A}$ leur intersection ; alors B est une base de la partie sous--inductive $\hat{(}$faible$\hat{)}$ $\mathfrak{B}$ qu'elle engendre et $\mathfrak{B}$ contient avec deux éléments majorés dans $\mathfrak{A}$ leur intersection .

COROLLAIRE : Si B est une sous-classe d'un groupoïde prélocal $\mathcal{S}$ telle que l'on ait: $B\alpha(B) \subset B$ (resp. $\beta(B)B \subset B$), alors B est une base de $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}\alpha(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}$ (resp. $\beta(\mathfrak{B})\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$).

DEFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un prépseudogroupe; une sous-classe $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ est appelée *sous--pseudogroupe* $\hat{(}$*faible*$\hat{)}$ de $\mathcal{S}$ si les axiomes suivants sont vérifiés :

1) $\mathcal{S}'$ est stable pour la pseudomultiplication.
2) L'inverse d'un élément de $\mathcal{S}'$ appartient à $\mathcal{S}'$.
3) $\mathcal{S}'$ contient $\cup B$ pour toute sous-classe B de $\mathcal{S}'$ (majorée dans $\mathcal{S}'$) et admettant un agrégat dans $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Pour qu'une sous-classe $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ vérifie les axiomes 1 et 2 de la définition ci-dessus, il faut et il suffit que $\mathcal{S}'$ soit un sous-groupoïde de $\mathcal{S}$ et que $f \in \mathcal{S}'$ et $e \in \mathcal{S}'_0$ entraîne $fe \in \mathcal{S}'$.

PROPOSITION : Un sous-pseudogroupe (faible) $\mathcal{S}'$ d'un prépseudogroupe $\mathcal{S}$ contient avec deux éléments compatibles f et g leur intersection.

PROPOSITION : Un sous-groupoïde $\mathcal{S}'$ d'un prépseudogroupe $\mathcal{S}$ stable pour la pseudo-multiplication est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$ si, et seulement si, $\mathcal{S}'_0$ contient $\cup B$ pour toute sous-classe B de $\mathcal{S}'_0$ majorée dans $\mathcal{S}'_0$ et admettant un agrégat.

PREPOSITION : Un sous-groupoïde $\mathcal{S}'$ d'un prépseudogroupe $\mathcal{S}$ saturé par induction (c'est-à-dire contenant avec un élément tout élément plus petit) est un sous-pseudo-groupe faible de $\mathcal{S}$.

DEFINITION : Soit B une sous-classe d'un prépseudogroupe $\mathcal{S}$; l'intersection $\mathcal{B}$ des sous-pseudogroupes (faibles) de $\mathcal{S}$ contenant B est appelée *sous-pseudogroupe (faible) engendré par B dans* $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soit B une sous-classe d'un groupoïde prélocal $\mathcal{S}$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $\alpha(B) \subset B$; $\beta(B) \subset B$; $B^{-1} = B$.
2) Si $e \in B \cap \mathcal{S}_0$ et $b \in B$, alors $eb \in B$.
3) B contient $\cup B'$ pour toute sous-classe B' de B majorée dans B et admettant un agrégat dans $\mathcal{S}$.

Alors le sous-groupoïde $\mathcal{B}$ engendré par B est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal et B une sous-classe de $\mathcal{S}$ vérifiant les axiomes 1 et 2 des sous-pseudogroupes. Alors B est une base du sous-pseudogroupe (faible) qu'il engendre.

PROPOSITION : Dans un groupoïde prélocal $\mathcal{S}$, la sous-classe inductive (faible) F' engendrée par une classe compatible F est compatible.

COROLLAIRE : Si F' et G' sont deux sous-classes inductives compatibles de $\mathcal{S}$, alors la classe GF des pseudoproduits gf où $g \in G'$ et $f \in F'$, est une base de la sous-classe inductive qu'elle engendre et celle-ci est compatible.

PROPOSITION : Soit B une sous-classe d'un prépseudogroupe $\mathcal{S}$; la composante connexe $\mathcal{B}$ de la sous-classe des éléments induits des éléments de B est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$ appelé *composante inductive faible* de B dans $\mathcal{S}$; le sous-pseudogroupe engendré par $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{S}$ est appelé *composante inductive* de B.

6. Complétion des groupoïdes inductifs :

PROPOSITION : Soit F une sous-classe d'un groupoïde préinductif $\mathcal{S}$ telle que $F\alpha(F) = F$ et $\beta(F)F = F$ et que F contienne $\cup B$ pour toute sous-classe B de F majorée dans F et admettant un agrégat dans $\mathcal{S}$. Alors F est une partie sous-inductive faible de $\mathcal{S}$ tandis que $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ sont des sous-classes inductives faibles; on a :

$$F^{-1}F = F^{-1}.\,F, \qquad\qquad F\,F^{-1} = F.\,F^{-1};$$

les groupoïdes engendrés par $a(F) = F^{-1}F$ et $b(F) = F\,F^{-1}$ sont des sous-pseudo-groupes faibles de $\mathcal{S}$.

DEFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde préinductif, F une sous-classe de $\mathcal{S}$ et $a(F)$ la classe des pseudoproduits $f^{-1}f'$, où $f \in F$ et $f' \in F$. La classe F est appelée *atlas (faible) complet* de $\mathcal{S}$ si F contient $\cup B$ pour toute sous-classe B de F (majorée dans F) admettant un agrégat dans $\mathcal{S}$ et si de plus on a : $F\,a(F) = F$.

PROPOSITION : Si F est un atlas faible complet du groupoïde préinductif $\mathcal{S}$, alors $F\alpha(F) = F$ et $\beta(F)F = F$. De plus $a(F)$ et $b(F)$ sont des sous-pseudogroupes faibles de $\mathcal{S}$ admettant $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ pour classes des unités et on a : $b(F)F = F$.

COROLLAIRE : La classe F^{-1} des inverses des éléments de F est un atlas faible complet tel que $a(F^{-1}) = b(F)$ et $b(F^{-1}) = a(F)$.

PROPOSITION : Soient B une sous-classe d'un groupoïde préinductif $\mathcal{S}$, Γ un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$ contenant $B^{-1}B$, A la composante inductive faible de $B^{-1}B$ dans Γ; alors BA est un atlas faible complet tel que $a(BA) = A$.

COROLLAIRE 1 : Si Γ est le sous-pseudogroupe faible engendré par $B^{-1}B$ dans $\mathcal{S}$, alors $B\Gamma$ est un atlas faible complet tel que $a(B\Gamma) = \Gamma$.

COROLLAIRE 2 : Soit B une sous-classe telle que la classe $B^{-1}.\,B$ soit un sous-pseudogroupe faible et que l'on ait: $\beta(B)B \subset B$ et $B(B^{-1}.\,B) \subset B$. Alors B est un atlas faible complet.

PROPOSITION : Soient F et G deux atlas faibles complets d'un groupoïde inductif $\mathcal{S}$ tels que $a(G) = b(F)$. Alors la classe GF est un atlas faible complet pour lequel $a(GF) = a(F)$ et $b(GF) = b(G)$.

COROLLAIRE : La classe des atlas faibles complets de $\mathcal{S}$ est un groupoïde pour la loi de composition :

$$(F.G) \to GF \text{ si, et seulement si, } a(G) = b(F);$$

La classe de ses unités est la classe des sous-pseudogroupes faibles de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Si F est un atlas faible complet d'un groupoïde prélocal $\mathcal{S}$, la partie sous-inductive $\overline{F}$ engendrée par F dans $\mathcal{S}$ est un atlas complet de $\mathcal{S}$ admettant F pour base.

PROPOSITION : Soient F et G des atlas complets d'un groupoïde prélocal $\mathcal{S}$; en dési-gnant par $\bar{a}(F)$ et $\bar{b}(F)$ les sous-pseudogroupes engendrés par $a(F)$ et $b(F)$, on a $F\bar{a}(F) = F = \bar{b}(F)F$. Si $\bar{b}(F) = \bar{a}(G)$, la partie sous-inductive $G \odot F$ engendrée par GF est un atlas complet, tel que $\bar{a}(G \odot F) = \bar{a}(F)$ et $\bar{b}(G \odot F) = \bar{b}(G)$.

THEOREME : La classe $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ des atlas complets d'un groupoïde prélocal $\mathcal{S}$ est un groupoïde pour la loi de composition :

$$(F, G) \to G \odot F \text{ si, et seulement si, } \bar{a}(G) = \bar{b}(F);$$

Les unités de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ sont les sous-pseudogroupes de $\mathcal{S}$. De plus la relation :

$F' < F$ si, et seulement si, F' est la partie sous-inductive engendrée par $F\alpha(F')$ ainsi que par $\beta(F')F$

est une relation d'ordre sur $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ qui vérifie l'axiome (I) et pour laquelle deux éléments majorés ont une intersection.

Suivant la terminologie introduite plus loin, $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ est un groupoïde sous-préin-ductif.

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal. La classe $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ des sous-classes inductives compatibles de $\mathcal{S}$ est un sous-groupoïde plein de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ saturé par induction, et un grou-poïde préinductif pour la structure d'ordre induite de celle de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Les unités de $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ sont les sous-classes inductives de $\mathcal{S}_o$.

COROLLAIRE : $\mathcal{S}$ s'identifie à un sous-groupoïde de $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ stable pour la pseudomultipli-cation en identifiant $f \in \mathcal{S}$ avec la classe $\varphi(f)$ des éléments induits de f. Si $\mathcal{S}$ est local, $\mathcal{S}$ s'identifie à un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{J}(\mathcal{S})$, saturé par induction.

DEFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un prépseudogroupe; on appelle sous-classe complète (faible) de $\mathcal{S}$ une sous-classe inductive (faible) de $\mathcal{S}$ qui est compatible et saturée par induction.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal; la sous-classe $\overline{\mathcal{S}}$ du groupoïde préinductif $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ formée par les sous-classes complètes de $\mathcal{S}$ est un sous-pseudogroupe faible de

$\mathcal{J}(\mathcal{S})$ saturé par induction et admettant $\mathcal{S}$ pour base. De plus, $\overline{\mathcal{S}}$ est un groupoïde local pour l'ordre induit de celui de $\mathcal{J}(\mathcal{S})$.

COROLLAIRE : $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ est une extension inessentielle $(\sigma, \mathcal{J}(\mathcal{S}))$ de $\overline{\mathcal{S}}$, où σ est le foncteur qui associe à $F \in \mathcal{J}(\mathcal{S})$ la sous-classe complète engendrée par F dans $\mathcal{S}$. σ est compatible avec la pseudomultiplication et l'intersection ; $\overline{\mathcal{S}}$ est un groupoïde quotient de $\mathcal{J}(\mathcal{S})$.

DEFINITION : Un groupoïde inductif $\mathcal{S}$ est dit $\hat{(}$*relativement*$\hat{)}$ *complet* si toute sous-classe complète F de $\mathcal{S}$ $\hat{(}$telle que $\cup\alpha(F)$ et $\cup\beta(F)$ existent$\hat{)}$ admet un agrégat dans $\mathcal{S}$.

THEOREME (de complétion) : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal. Le groupoïde local $\overline{\mathcal{S}}$ est complet et caractérisé à une équivalence près par la condition (C) suivante :
(C) Si Σ est un groupoïde local complet dont $\mathcal{S}$ est une base, il existe un foncteur π de $\overline{\mathcal{S}}$ sur Σ dont la restriction à $\mathcal{S}$ est l'identité et qui est compatible avec l'agrégation. (Ce foncteur π associe à $F \in \overline{\mathcal{S}}$ l'agrégat de la classe F dans Σ).

COROLLAIRE : Il existe un foncteur section ψ relativement à π et Σ est un groupoïde quotient de $\overline{\mathcal{S}}$ (le foncteur ψ associe à $f' \in \Sigma$ la classe F des éléments $f \in \mathcal{S}$ tels que $f < f'$).

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal ; le sous-pseudogroupe *faible* de $\overline{\mathcal{S}}$ engendré par $\mathcal{S}$ dans $\overline{\mathcal{S}}$ est un groupoïde local $\check{\mathcal{S}}$, caractérisé à une équivalence près par la condition $(\check{C})$ suivante :
$(\check{C})$ Si $\check{\Sigma}$ est un groupoïde local contenant $\mathcal{S}$ et tel que le sous-pseudogroupe faible engendré par $\mathcal{S}$ dans $\check{\Sigma}$ soit $\check{\Sigma}$, alors il existe un foncteur défini comme plus haut $\check{\pi}$ de $\check{\mathcal{S}}$ sur $\check{\Sigma}$ dont la restriction à $\mathcal{S}$ est l'identité et tel que, pour toute classe B de $\check{\mathcal{S}}$ admettant un agrégat, on ait : $\check{\pi}(\cup B) = \cup\, \check{\pi}(B)$.

COROLLAIRE : Si $\mathcal{S}$ est un groupoïde local, alors $\check{\mathcal{S}}$ s'identifie à $\mathcal{S}$.

COROLLAIRE : Il existe un foncteur $\check{\psi}$ section relativement à $\check{\pi}$ et $\check{\Sigma}$ est un groupoïde quotient de $\check{\mathcal{S}}$.

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde local ; il existe un groupoïde local relativement complet $\hat{\mathcal{S}}$ équivalent au sous-groupoïde plein de $\overline{\mathcal{S}}$ ayant $\mathcal{S}_o$ comme classe des unités et caractérisé à une équivalence près par la condition $(\hat{C})$ suivante :
$(\hat{C})$ Si $\hat{\Sigma}$ est un groupoïde local relativement complet contenant $\mathcal{S}$ comme base et tel que $\hat{\Sigma}_o$ soit identique à $\mathcal{S}_o$, alors il existe un foncteur $\hat{\pi}$ de $\hat{\mathcal{S}}$ sur $\hat{\Sigma}$ dont la restriction à $\mathcal{S}$ est l'identité et qui est compatible avec l'agrégation.

COROLLAIRE : Si $\mathcal{S}$ est relativement complet, on a $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.

COROLLAIRE : Il existe un foncteur $\hat{\psi}$ section relativement à $\hat{\pi}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde local; il existe un sous-pseudogroupe $\tilde{\mathcal{S}}$ du pseudo-groupe $\overline{\mathcal{S}}$ dans lequel toute sous-classe compatible F de $\mathcal{S}$ telle que $\alpha(F)$ ou $\beta(F)$ admette un agrégat dans $\mathcal{S}$, admet un agrégat.

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal et $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ la classe des atlas complets de $\mathcal{S}$. Sur $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ la relation :

$$F' \dot{<} F \text{ si, et seulement si, } F' \text{ est une sous-classe de } F \text{ et } F' < F,$$

est une relation d'ordre vérifiant l'axiome (I) et telle que toute classe majorée admette une intersection; c'est-à-dire que $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ muni de la relation $F' \dot{<} F$ devient un groupoïde sous-inductif, noté $\dot{\mathfrak{A}}(\mathcal{S})$.

COROLLAIRE 1 : La relation $F' \dot{<} F$ détermine sur $\mathfrak{I}(\mathcal{S})$ une structure de groupoïde induc-tif, que nous désignerons par $\dot{\mathfrak{I}}(\mathcal{S})$.

COROLLAIRE 2 : Sur $\overline{\mathcal{S}}$ les relations $F' \dot{<} F$ et $F' < F$ induisent la même relation d'ordre :

$$F' < F \text{ si, et seulement si, } F' \text{ est une sous-classe de } F.$$

DEFINITION : Soit $\mathfrak{A}$ une classe préinductive; une sous-classe inductive F de $\mathfrak{A}$ admettant un plus grand élément f est appelée *paratopologie sur* f ou sur $\mathfrak{A}$.

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal. La classe des paratopologies sur $\mathcal{S}$ est un sous-groupoïde de $\mathfrak{I}(\mathcal{S})$ stable pour la pseudomultiplication et l'intersection finie; si $\mathcal{S}$ est local, c'est un sous-pseudogroupe faible de $\mathfrak{I}(\mathcal{S})$ saturé par induction.

COROLLAIRE : La classe des paratopologies de $\mathcal{S}$ est un sous-pseudogroupe faible saturé par induction de $\dot{\mathfrak{I}}(\mathcal{S})$, que nous désignerons par $\mathcal{T}(\mathcal{S})$.

DEFINITION : Soit $\mathfrak{A}$ une classe préinductive. On appellera *filtre* sur $\mathfrak{A}$ une sous-classe F de $\mathfrak{A}$ possédant les propriétés suivantes :

1) Pour tout $f \in F$ et tout $f' \in \mathfrak{A}$ tel que $f < f'$, on a $f' \in F$.

2) Si $f \in F$ et $f' \in F$, alors $f \cap f' \in F$.

On appellera *base de filtre* une sous-classe B de $\mathfrak{A}$ telle que, pour tout $b \in B$ et tout $b' \in B$, il existe $b'' \in B$ avec $b'' < b \cap b'$.

DEFINITION : Soit $\mathfrak{A}$ une classe préinductive; on appelle *quasi(̂-base de)̂ filtre* sur $\mathfrak{A}$ une sous-classe inductive de $\mathfrak{A}$ dont la classe des éléments différents de 0 est un

$\hat{(}$une base de$\hat{)}$ filtre.

PROPOSITION : Si B est une $\hat{(}$quasi-$\hat{)}$ base de filtre sur la classe préinductive A, alors la classe F des majorants des éléments de B $\hat{(}$différents de $0\hat{)}$ est un $\hat{(}$quasi-$\hat{)}$ filtre, appelé *$\hat{(}$quasi-$\hat{)}$ filtre engendré par* B.

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal et soit $\mathfrak{B}(\mathcal{S})$ la sous-classe de $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ formée des atlas complets qui sont des quasi-bases de filtres; $\mathfrak{B}(\mathcal{S})$ est un sous-groupoïde de $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$; si $F \in \mathfrak{B}(\mathcal{S})$, $H \in \mathfrak{B}(\mathcal{S})_0$ et $H < \overline{a}(F)$, l'élément induit par F sur H est dans $\mathfrak{B}(\mathcal{S})$.

PROPOSITION : Un quasi-filtre F sur un groupoïde préinductif $\mathcal{S}$ est un atlas complet de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde préinductif; si F et G sont des filtres de $\mathcal{S}$, alors $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ sont des bases de filtres $\alpha^*(F)$, $\beta^*(F)$; si $\alpha^*(G)=\beta^*(F)$, GF engen--dre un filtre $G*F$, pour lequel on a : $\alpha^*(G*F)=\alpha^*(F)$, $\beta^*(G*F)=\beta^*(G)$.

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde préinductif; la classe $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ des filtres de $\mathcal{S}$ est un groupoïde inductif lorsqu'elle est munie de la loi de composition :

$$(F, G) \to G*F \text{ si, et seulement si, } \alpha^*(G)=\beta^*(F),$$

et de la loi d'induction :

$$F' < F \text{ si, et seulement si, } F \text{ est une sous-classe de } F'.$$

COROLLAIRE : $\mathcal{S}$ s'identifie à un sous-groupoïde plein saturé $\mathcal{S}^{>}$ de $\mathcal{F}(\mathcal{S})$, en identi--fiant $f \in \mathcal{S}$ au filtre $f^{>}$ de ses majorants dans $\mathcal{S}$; $\mathcal{S}^{>}$ est saturé par intersection finie; si $\mathcal{S}$ est inductif, alors $\mathcal{S}^{>}$ est un sous-pseudogroupe de $\mathcal{F}(\mathcal{S})$,

Remarquons que le produit de deux filtres dans $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ peut être défini sans que le produit des quasi-filtres correspondants soit défini dans $\mathfrak{B}(\mathcal{S})$; mais on a :

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal; alors $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ est un groupoïde quotient de $\mathfrak{B}(\mathcal{S})$ relativement au foncteur ψ qui associe à $F \in \mathfrak{B}(\mathcal{S})$ le filtre $\psi(\mathcal{F})$ engendré par F; ψ est compatible avec les ordres.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde préinductif; la classe $F^{<}$ des minorants d'un filtre F de $\mathcal{S}$ est une sous-classe complète, la classe $C^{>}$ des majorants d'une sous-classe complète C est un filtre. On a les relations : $C^{>} = ((C^{>})^{<})^{>}$ et $F^{<} = ((F^{<})^{>})^{<}$.

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde préinductif; le sous-pseudogroupe $\mathcal{S}'$ engendré par $\mathcal{S}^{>}$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ est le groupoïde saturé de $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ formé des filtres F tels que : $F = (F^{<})^{>}$. Si $\mathcal{S}$ est prélocal, $\mathcal{S}'$ est un groupoïde quotient de $\check{\mathcal{S}}$, saturé par intersection finie. Le foncteur canonique de $\check{\mathcal{S}}$ sur $\mathcal{S}'$ est le foncteur q qui associe à $C \in \check{\mathcal{S}}$ le filtre $C^{>}$ de ses majorants; q est compatible avec l'agrégation et avec l'intersection finie et identi--fie le sous-groupoïde $\mathcal{S}$ de $\check{\mathcal{S}}$ avec le sous-groupoïde $\mathcal{S}^{>}$ de $\mathcal{S}'$.

7. Groupoïdes sous-inductifs :

DEFINITION : Une classe ordonnée $\mathfrak{A}$ est appelée *classe sous-(pré)inductive* si $\mathfrak{A}$ a un plus petit élément 0 et si, pour tout $a \in \mathfrak{A}$, la classe $\varphi(a)$ des éléments plus petits que a est une classe (pré)inductive pour l'ordre induit.

PROPOSITION : Pour qu'une classe ordonnée $\mathfrak{A}$ soit sous-(pré)inductive, il faut et il suffit que $\mathfrak{A}$ admette un plus petit élément 0 et que toute sous-classe (finie) B non vide de $\mathfrak{A}$, majorée dans $\mathfrak{A}$, ait une intersection.

Si $a \cap b$ est défini dans la classe sous-préinductive $\mathfrak{A}$, alors $a' \cap b'$ est aussi défini, pour tout $a' < a$ et tout $b' < b$.

PROPOSITION : Soit $\mathfrak{A}$ une classe sous-(pré)inductive et B une sous-classe de $\mathfrak{A}$ ma--jorée par $a \in \mathfrak{A}$ et admettant un agrégat b dans $\varphi(a)$; alors b est aussi l'agrégat de B dans toute sous-classe $\varphi(a')$, où a' est un majorant de B tel que $a' \cap a$ soit défini dans $\mathfrak{A}$. Si B admet un agrégat b_1 dans $\varphi(a_1)$, où $a_1 \in \mathfrak{A}$, tel que $b \cap b_1$ soit défini, alors $b = b_1$.

COROLLAIRE : Si B admet un agrégat dans $\mathfrak{A}$, alors $\cup B$ est un agrégat de B dans $\varphi(a)$, pour tout majorant a de B dans $\mathfrak{A}$.

DEFINITION : Soit $\mathfrak{A}$ une classe sous-préinductive, B une sous-classe de $\mathfrak{A}$; si B admet un agrégat dans la classe $\varphi(b)$ des éléments plus petits que $b \in \mathfrak{A}$, alors cet agrégat sera appelé *b-agrégat* ou *sous-agrégat de* B et sera noté $\overset{b}{\cup} B$; la classe de tous les sous-agrégats de B sera appelée *congrégation de* B dans $\mathfrak{A}$ et désignée par $\underline{\cup} B$; si B n'admet pas de sous-agrégat, nous écrirons: $\underline{\cup}\, B = \varnothing$.

PROPOSITION : Si $\mathfrak{A}$ est une classe préinductive et si B est une sous-classe de $\mathfrak{A}$ admettant un sous-agrégat m, alors $m = \cup B$.

DEFINITION : Un groupoïde $\mathcal{S}$ est appelé *groupoïde sous-(pré)inductif* s'il est muni d'une relation d'ordre pour laquelle $\mathcal{S}$ est une classe sous-(pré) inductive et si l'axiome (I) est vérifié.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde muni d'une relation d'ordre vérifiant l'axiome (I); pour tout $f \in \mathcal{S}$ et tout $e \in \mathcal{S}_0$ tel que $e < \alpha(f)$ (resp. $e < \beta(f)$), il existe un et un seul élément $g < f$ pour lequel $\alpha(g) = e$ (resp. $\beta(g) = e$); g est appelé l'élément *induit* (resp. *induit à gauche*) par f sur e.

COROLLAIRE : Pour qu'un groupoïde $\mathcal{S}$ muni d'une relation d'ordre vérifiant l'axiome (I) soit sous-$(\hat{\text{pré}})$inductif, il faut et il suffit que $\mathcal{S}_o$ soit une classe sous-$(\hat{\text{pré}})$inductive pour l'ordre induit.

Dans des exemples importants de groupoïdes $\mathcal{S}$ sous-préinductifs (groupoïde des isomorphismes d'espaces vectoriels, de simplexes), la condition suivante est vérifiée : Soit E une sous-classe de $\mathcal{S}_o$, e' et e'' deux sous-agrégats de E; alors il existe un et un seul $f \in \mathcal{S}$ tel que $\alpha(f) = e$, $\beta(f) = e'$ et que, pour tout $e \in E$, l'élément induit par f sur e soit égal à e.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; si E est une sous-classe de $\mathcal{S}_o$, la congrégation de E dans $\mathcal{S}_o$ est contenue dans la congrégation de E dans $\mathcal{S}$; pour toute sous-classe A de $\mathcal{S}$, on a les relations :

$$\alpha(\underline{\cup} A) \subset \underline{\cup}\, \alpha(A); \qquad \beta(\underline{\cup} A) \subset \underline{\cup}\, \beta(A); \qquad (\underline{\cup} A)^{-1} = (\underline{\cup} A^{-1}).$$

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif, A une sous-classe de $\mathcal{S}$ majorée par $f \in \mathcal{S}$; si $\overset{\alpha(f)}{\bigcup} \alpha(A)$ ou $\overset{\beta(f)}{\bigcup} \beta(A)$ est défini, alors $\overset{f}{\cup} A$ est défini; si $\cap A$ est défini, alors $\cap\, \alpha(A)$ et $\cap\, \beta(A)$ sont définis; si $\cap\, \alpha(A)$ ou $\cap\, \beta(A)$ est défini, $\cap\, A$ est défi-ni et on a les relations :

$$\alpha(\cap A) = \cap\, \alpha(A); \qquad \beta(\cap A) = \cap\, \beta(A).$$

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; la loi de composition dans $\mathcal{S}$ peut être étendue en une loi de composition appelée *pseudomultiplication,* définie pour tous les couples (f, f') tels que $e = \alpha(f') \cap \alpha(f)$ soit défini, en posant :

$$(f, f') \to g' . g,$$

où g est l'élément induit à gauche sur e par f et g' l'élément induit sur e par f'. Cette pseudomultiplication vérifie l'axiome d'associativité suivant : Si (hg) et (gf) sont définis, alors $h(gf)$ et $(hg)f$ sont définis et égaux.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; les unités du groupoïde $\mathcal{S}$ sont les seuls éléments idempotents pour la pseudomultiplication; si e et e' sont deux unités telles que $e \cap e'$ soit défini, on a $e \cap e' = e e' = e' e$. La relation d'ordre dans $\mathcal{S}$ est com-patible avec la pseudomultiplication et elle peut aussi être définie par une des condi-tions suivantes :

$f' < f$ si, et seulement si, il existe $e \in \mathcal{S}_o$ tel que fe soit défini et égal à f';
$f' < f$ si, et seulement si, il existe $e' \in \mathcal{S}_o$ tel que $e'f$ soit défini et égal à f'.

COROLLAIRE : Soient $f \in \mathcal{S}$ et $f' \in \mathcal{S}$ tels que $f'f$ soit défini; alors on a les formules :

$$f'f = (f' \beta(f)) . (\alpha(f') f); \qquad (f'f)^{-1} = f^{-1} f'^{-1}.$$

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ une classe munie d'une loi de composition partiellement définie, vérifiant l'axiome d'associativité : Si hg et gf sont définis, alors $h(gf)$ et $(hg)f$ sont définis et égaux.

Soit $\mathcal{S}_o$ une sous-classe de $\mathcal{S}$ formée d'idempotents, stable pour la loi de compo--sition et admettant un élément 0 pour lequel: $0e = 0$, pour tout $e \in \mathcal{S}_o$. Si les axiomes 1, 2, 3, suivants sont vérifiés, alors $\mathcal{S}$ est un groupoïde sous-préinductif, pour la struc--ture d'ordre définie par la relation:

$f' < f$ si, et seulement si, il existe $e \in \mathcal{S}_o$ tel que fe soit défini et égal à f'.

Si de plus $\mathcal{S}_o$ est une classe sous-inductive, alors $\mathcal{S}$ est un groupoïde sous-inductif.

1) La restriction de la loi de composition à $\mathcal{S}_o \times \mathcal{S}_o$ est commutative.

2) Pour tout $f \in \mathcal{S}$, la classe des éléments $e \in \mathcal{S}_o$ tels que fe soit défini et égal à f admet une intersection $\alpha(f)$ telle que $f\alpha(f)$ soit défini et égal à f; de même la classe des éléments e' de $\mathcal{S}_o$ tels que $e'f$ soit défini et égal à f admet une intersection $\beta(f)$ pour laquelle $\beta(f)f$ est défini et égal à f.

3) Pour tout $e \in \mathcal{S}$, il existe $f' \in \mathcal{S}$ tel que $f'f$ et ff' soient définis et que l'on ait: $f'f = \alpha(f)$, $ff' = \beta(f)$.

PROPOSITION : Le groupoïde produit de deux groupoïdes sous-$(\widehat{\text{pré}})$inductifs, muni de la structure d'ordre produit, est un groupoïde sous-$(\widehat{\text{pré}})$inductif, appelé *groupoïde sous-$(\widehat{\text{pré}})$inductif produit* des groupoïdes donnés.

DEFINITION : Une *classe sous-$(\widehat{\text{pré}})$locale* est une classe sous-$(\widehat{\text{pré}})$inductive $\mathcal{Q}$ dans laquelle l'axiome de distributivité (D) suivant est vérifié:

(D) Soit B une sous-classe de $\mathcal{Q}$ admettant un c-agrégat et soit $a \in \mathcal{Q}$ tel que $(\overset{c}{\cup} B) \cap a$ soit défini; alors la classe des éléments $b \cap a$, où $b \in B$, admet $(\overset{c}{\cup} B) \cap a$ pour c-agrégat: $(\overset{c}{\cup} B) \cap a = \overset{c}{\bigcup}_{b \in B} (b \cap a)$.

Un *groupoïde sous-$(\widehat{\text{pré}})$local* est un groupoïde sous-$(\widehat{\text{pré}})$inductif dont la classe des unités est une classe sous-$(\widehat{\text{pré}})$locale.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{Q}$ une classe sous-prélocale, B une sous-classe de $\mathcal{Q}$ admettant un c-agrégat et $a \in \mathcal{Q}$ tel que $d = \overset{c}{\bigcup}_{b \in B} (b \cap a)$ et $a \cap c$ soient définis ; alors on a : $d = (\overset{c}{\cup} B) \cap a$.

PROPOSITION : Un groupoïde sous-prélocal $\mathcal{S}$ est une classe sous-prélocale.

Etant donnés un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$, A et A' deux sous-classes de $\mathcal{S}$, nous désignerons par $A'A$ la classe des pseudoproduits $a'a$, où $a \in A$, $a' \in A'$, $a'a$ défini.

PROPOSITION; Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal, A et A' deux sous-classes de $\mathcal{S}$; on a:

$$(\underline{\cup} A')(\underline{\cup} A) \subset \underline{\cup}(A'A).$$

DEFINITION : Soit $\mathfrak{A}$ une classe sous-préinductive. Une sous-classe $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$ est appelée *sous-classe inductive* (resp. *partie sous-inductive*) $\widehat{(\textit{faible})}$ de $\mathfrak{A}$ si elle vérifie les axiomes 1 et 2 (resp. 1' et 2) suivants :

1) Soient $a \in \mathfrak{A}'$, $a' \in \mathfrak{A}'$ tels que $a \cap a'$ soit défini; alors $a \cap a' \in \mathfrak{A}'$.

1') Soient $a \in \mathfrak{A}'$, $a' \in \mathfrak{A}'$, $a'' \in \mathfrak{A}'$ avec $a' < a$, $a'' < a$; on a : $a \cap a' \in \mathfrak{A}'$.

2) Pour toute sous-classe B de $\mathfrak{A}'$ admettant un b-agrégat $\widehat{(\text{où } b \in \mathfrak{A}')}$, on a : $\overset{b}{\cup} B \in \mathfrak{A}'$.

DEFINITION : Soit $\mathfrak{A}$ une classe sous-préinductive, B une sous-classe de $\mathfrak{A}$; l'inter--section $\mathfrak{B}$ des sous-classes inductives (resp. parties sous-inductives) $\widehat{(\text{faibles})}$ de $\mathfrak{A}$ qui contiennent B est appelée *sous-classe inductive* (resp. *partie sous-inductive*) $\widehat{(\textit{fai-ble})}$ *de* $\mathfrak{A}$ *engendrée par* B. Si $\mathfrak{B}$ est la classe des b-agrégats des sous-classes de B $\widehat{(\text{où } b \in B)}$, B est appelée *base* de $\mathfrak{B}$.

PROPOSITION : Soit B une sous-classe d'une classe sous-prélocale $\mathfrak{A}$ contenant avec deux éléments majorés dans $\mathfrak{A}$ leur intersection; alors B est une base de la partie sous--inductive $\widehat{(\text{faible})}$ $\mathfrak{B}$ qu'elle engendre dans $\mathfrak{A}$.

COROLLAIRE : Si B est une sous-classe d'un groupoïde sous-prélocal $\mathcal{S}$ telle que $B\alpha(B) \subset B$, alors B est une base de $\mathfrak{B}$ et on a : $\mathfrak{B}\alpha(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}$; de plus $\alpha(\mathfrak{B})$ est une sous-classe inductive faible de $\mathcal{S}_o$.

DEFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; on appelle *sous-groupoïde sous--préinductif* de $\mathcal{S}$ un sous-groupoïde $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ vérifiant les conditions suivantes :

1) Soient $e \in \mathcal{S}'_o$, $e' \in \mathcal{S}'_o$, $e'' \in \mathcal{S}'_o$ avec $e' < e$, $e'' < e$; alors $e'e \in \mathcal{S}'_o$.

2) Soient $f \in \mathcal{S}'$, $e \in \mathcal{S}'_o$, $e < \alpha(f)$; alors on a : $fe \in \mathcal{S}'$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif et $\mathcal{S}'$ un sous-groupoïde sous--préinductif de $\mathcal{S}$; alors $\mathcal{S}'$ contient $f' \cap f''$ avec deux éléments f' et f'' majorés par $f \in \mathcal{S}'$.

COROLLAIRE : $\mathcal{S}'$ est un groupoïde sous-préinductif pour l'ordre induit.

DEFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; on appelle *sous-pseudogroupe* $\widehat{(\textit{faible})}$ de $\mathcal{S}$ un sous-groupoïde $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ stable pour la pseudomultiplication et véri--fiant l'axiome: Pour toute sous-classe B de $\mathcal{S}'$ admettant un b-agrégat $\widehat{(\text{ où } b \in \mathcal{S}')}$, on a $\overset{b}{\cup} B \in \mathcal{S}'$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; pour qu'un sous-groupoïde $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ soit un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$, il faut et il suffit que $\mathcal{S}'_o$ soit une sous-classe inductive faible de $\mathcal{S}_o$ et que $\mathcal{S}'$ soit un sous-groupoïde sous-préinductif de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Un sous-groupoïde $\mathcal{S}'$ d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$ qui est saturé par induction est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$.

DEFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif, B une sous-classe de $\mathcal{S}$; l'intersec--tion $\mathcal{B}$ des sous-pseudogroupes (faibles) de $\mathcal{S}$ contenant B est appelée *sous-pseudo--groupe (faible) de* $\mathcal{S}$ *engendré par* B *dans* $\mathcal{S}$; si tout élément de $\mathcal{B}$ est un b-agrégat d'une sous-classe de B (où $b \in B$), alors B est dit *base de* $\mathcal{B}$.

PROPOSITION : Soit B une sous-classe d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$ vérifiant les conditions suivantes:

1) On a $\alpha(B) \subset B$; $\beta(B) \subset B$; $B^{-1} = B$.
2) Si $e \in B \cap \mathcal{S}_o$, $b \in B$ et si be est défini, alors on a $be \in B$.
3) B contient $\overset{b}{\cup} B'$ pour toute sous-classe B' de B admettant un b-agrégat dans $\mathcal{S}$, où $b \in B$.

Alors le sous-groupoïde $\mathcal{B}$ engendré par B dans $\mathcal{S}$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal et B un sous-groupoïde de $\mathcal{S}$ stable pour la pseudomultiplication; alors B est une base du sous-pseudogroupe (faible) qu'il engendre dans $\mathcal{S}$.

DEFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; on appelle *sous-classe compatible* de $\mathcal{S}$ une sous-classe F telle que, pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$, $f^{-1}f'$ et $f'f^{-1}$ soient définis et appartiennent à $\mathcal{S}_o$.

En particulier toute sous-classe majorée d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$ est compatible; pour qu'une classe d'unités de $\mathcal{S}$ soit compatible, il faut et il suffit que l'intersection de deux quelconques de ses éléments soit définie.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; pour qu'une sous-classe F de $\mathcal{S}$ soit telle que, pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$, on ait $f'f^{-1} \in \mathcal{S}_o$, il faut et il suffit que $f \cap f'$ soit défini et que l'on ait: $f \cap f' = f\alpha(f') = f'\alpha(f)$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif, F et G deux sous-classes compa--tibles de S; alors $\varphi(F)$, F^{-1} et GF sont des sous-classes compatibles, ainsi que la sous-classe inductive faible F' engendrée par F dans $\mathcal{S}$.

DEFINITION : Un sous-pseudogroupe (faible) $\mathcal{S}'$ d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$ est dit *propre* si $\mathcal{S}'$ admet une base B telle que $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ soient des sous-classes compatibles.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; si $\mathcal{S}'$ est un sous-pseudogroupe faible propre de $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{S}'_o$ est une sous-classe compatible de $\mathcal{S}$ et le sous-pseudogroupe engendré par $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$ est propre.

PROPOSITION : Soit B une sous-classe d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$; la composante connexe de la classe $\varphi(B)$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$, saturé par induction, qui sera appelé *composante inductive faible* de B dans $\mathcal{S}$; le sous-pseudogroupe qu'elle engendre dans $\mathcal{S}$ sera appelé *composante inductive* de B dans $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal, B un sous-groupoïde de $\mathcal{S}$ et A la composante inductive faible de B dans $\mathcal{S}$; alors la composante inductive de B dans $\mathcal{S}$ est le sous-groupoïde plein A' de $\mathcal{S}$ tel que A'_o admette A_o pour base.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif et F une partie sous-inductive faible de $\mathcal{S}$ telle que $\beta(F)F = F$ et $F\alpha(F) = F$; alors on a: $F^{-1}F = F^{-1}.F$; $FF^{-1} = F.F^{-1}$; de plus les sous-groupoïdes engendrés dans $\mathcal{S}$ par $a(F) = F^{-1}F$ et $b(F) = FF^{-1}$ sont des sous-pseudogroupes faibles de $\mathcal{S}$.

DEFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; on appelle *atlas (faible) complet* de $\mathcal{S}$ une sous-classe F de $\mathcal{S}$ qui contient $\overset{b}{\cup} B$ pour toute sous-classe B de F admettant un b-agrégat dans $\mathcal{S}$ (où $b \in F$) et telle que l'on ait: $Fa(F) = F$, où $a(F) = F^{-1}F$. Un atlas complet F de $\mathcal{S}$ qui admet pour base une sous-classe F' telle que $\alpha(F')$ et $\beta(F')$ soient compatibles est dit *propre*.

PROPOSITION : Un atlas faible complet F d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$ est une partie sous-inductive faible de $\mathcal{S}$; on a : $F\alpha(F) = F$, $\beta(F)F = F$; de plus $a(F)$ et $b(F) = FF^{-1}$ sont des sous-pseudogroupes faibles de $\mathcal{S}$ admettant $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ respectivement pour classe de leurs unités et on a : $b(F)F = F$.

COROLLAIRE : La classe F^{-1} des inverses des éléments de F est un atlas faible complet de $\mathcal{S}$ pour lequel on a :

$$a(F^{-1}) = b(F) \quad \text{et} \quad b(F^{-1}) = a(F)$$

PROPOSITION : Soit B une sous-classe d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$, Γ un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$ contenant $B^{-1}B$ et A la composante inductive faible de $B^{-1}B$ dans Γ; alors BA est un atlas faible complet tel que l'on ait :

$$a(BA) = A.$$

COROLLAIRE : Si Γ est le sous-pseudogroupe faible engendré par $B^{-1}B$ dans $\mathcal{S}$, alors $B\Gamma$ est un atlas faible complet tel que l'on ait :

$$a(B\Gamma) = \Gamma.$$

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif, F un atlas faible complet de $\mathcal{S}$; si $\beta(F)$ est contenu dans F, alors F est contenu dans $a(F)$; si on a: $F \subset a(F)$, $b(F)$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $a(F)$, dont $a(F)$ est un élargissement.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; la classe $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ des atlas faibles complets de $\mathcal{S}$ est un groupoïde pour la loi de composition définie par:

$$(F, G) \to G \cdot F \text{ si, et seulement si, } a(G) = b(F).$$

La classe des unités de $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ est la classe des sous-pseudogroupes faibles de $\mathcal{S}$.

COROLLAIRE : La sous-classe de $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ formée des atlas faibles complets de $\mathcal{S}$ tels que $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ soient des sous-classes compatibles est le sous-groupoïde plein $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ de $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ dont la classe des unités est la classe des sous-pseudogroupes faibles propres de $\mathcal{S}$.

Etant donné un groupoïde sous-prélocal $\mathcal{S}$, nous désignerons par $\overline{GF}$ la partie sous-inductive engendrée dans $\mathcal{S}$ par la classe GF, où G et F sont deux sous-classes de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal et F un atlas faible complet de $\mathcal{S}$. La partie sous-inductive $\overline{F}$ engendrée dans $\mathcal{S}$ par F est un atlas complet de $\mathcal{S}$ admettant F pour base; si $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ sont des sous-classes compatibles, $\overline{F}$ est un atlas com--plet propre de $\mathcal{S}$.

COROLLAIRE : Soit Γ un sous-pseudogroupe de $\mathcal{S}$ et B une sous-classe de $\mathcal{S}$ telle que $B^{-1}B$ soit contenu dans Γ; soit A la composante inductive faible et A' la composante inductive de $B^{-1}B$ dans Γ; alors la partie sous-inductive $\overline{BA'}$ engendrée par BA' est un atlas complet de $\mathcal{S}$, admettant BA pour base et tel que A' soit le sous-pseudogroupe engendré par $a(\overline{BA'})$ dans $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal, F un atlas complet de $\mathcal{S}$, $\bar{a}(F)$ et $\bar{b}(F)$ les sous-pseudogroupes engendrés dans $\mathcal{S}$ par $a(F)$ et $b(F)$; alors on a : $F\bar{a}(F) = F = \bar{b}(F)F$. La classe des atlas complets de $\mathcal{S}$ est un groupoïde $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ pour la loi de composition définie par :

$$(F, G) \to G \odot F = \overline{GF} \text{ si, et seulement si, } \bar{a}(G) = \bar{b}(F).$$

Les unités de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ sont les sous-pseudogroupes de $\mathcal{S}$.

COROLLAIRE : La sous-classe $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ formée des atlas complets propres de $\mathcal{S}$ est le sous-groupoïde plein de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ dont la classe des unités est la classe des sous--pseudogroupes propres de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soit F un atlas complet d'un groupoïde sous-prélocal $\mathcal{S}$ tel que F soit contenu dans $\bar{a}(F)$; alors $b(F)$ est un sous-pseudogroupe plein saturé par induction de $\bar{a}(F)$, dont $\bar{a}(F)$ est la composante inductive dans $\bar{a}(F)$.

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; le groupoïde $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ est un grou-poïde sous-préinductif lorsqu'il est muni de la relation :

$$F' < F \text{ si, et seulement si, } F' = F\alpha(F') = \beta(F')F.$$

COROLLAIRE : La classe $\mathcal{I}_f(\mathcal{S})$ des sous-classes inductives faibles compatibles de $\mathcal{S}$ est le sous-groupoïde plein saturé par induction de $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ dont la classe des unités est la classe des sous-classes inductives faibles compatibles de $\mathcal{S}_o$.

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal ; le groupoïde $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ est un groupoïde sous-inductif, lorsqu'il est muni de la relation:

$$F' \dot{<} F \text{ si, et seulement si, } F' \text{ est une sous-classe de } F \text{ et si } F' = F\alpha(F') = \beta(F')F.$$

COROLLAIRE 1 : $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $\mathcal{H}(\mathcal{S})$; muni de la relation $F' \dot{<} F$, $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ est un groupoïde sous-inductif que nous noterons $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S})$.

COROLLAIRE 2 : $\mathcal{I}_f(\mathcal{S})$, muni de la relation $F' \dot{<} F$ est un groupoïde inductif que nous noterons $\dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S})$; $\mathcal{S}$ s'identifie à un sous-groupoïde sous-préinductif de $\dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S})$ en identi-fiant $f \in \mathcal{S}$ à la classe $\varphi(f)$ des éléments induits par f.

DEFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; on appelle *complexe* ou sous-classe *faiblement complète* de $\mathcal{S}$ une sous-classe de $\mathcal{S}$ saturée par induction et compatible.

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal; la classe des complexes de $\mathcal{S}$ est un sous-groupoïde $\tilde{\mathcal{S}}$ saturé de $\dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S})$ sur lequel les relations : $F' < F$ et $F' \dot{<} F$ induisent la même relation définie par :

$$F' < F \text{ si, et seulement si, } F' \text{ est une sous-classe de } F.$$

$\tilde{\mathcal{S}}$ est la composante inductive de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{I}_f(\mathcal{S})$ et admet $\mathcal{S}$ pour base. De plus $\tilde{\mathcal{S}}$ est un groupoïde local.

REMARQUE : Soient f et g deux éléments de $\mathcal{S}$ admettant $h \in \mathcal{S}$ pour sous-agrégat dans $\mathcal{S}$; alors f et g sont compatibles; dans $\tilde{\mathcal{S}}'$, les complexes $\varphi(f)$ et $\varphi(g)$ ont pour agrégat la classe réunion de $\varphi(f)$ et $\varphi(g)$; cette classe peut être différente de la classe $\varphi(h)$.

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal; le groupoïde $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ des atlas complets propres de $\mathcal{S}$ est un groupoïde sous-préinductif pour la relation définie par :

$$F' < F \text{ si, et seulement si, } F' = \overline{F\alpha(F')} = \overline{\beta(F')F}.$$

COROLLAIRE : La sous-classe $\mathcal{I}(\mathcal{S})$ de $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ formée des sous-classes inductives de $\mathcal{S}$ admettant une base compatible est le sous-groupoïde plein saturé par induction de $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ dont la classe des unités est la classe des sous-classes inductives de $\mathcal{S}$ admet-tant pour base une sous-classe compatible de $\mathcal{S}_o$.

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal ; le groupoïde $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ est un groupoïde sous-inductif lorsqu'il est muni de la relation :

$$F' \dot{<} F \text{ si, et seulement si, } F' \subset F \text{ et } F' = \overline{F\alpha(F')} = \overline{\beta(F')F}.$$

COROLLAIRE 1 : $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ admet $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ comme sous-groupoïde saturé par induction; muni de la relation $F' \dot{<} F$, $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ est un groupoïde sous-inductif, que nous désignerons par $\dot{\mathcal{A}}'(\mathcal{S})$.

COROLLAIRE 2 : $\mathcal{I}(\mathcal{S})$ muni de la relation $F' \dot{<} F$, est un groupoïde inductif, que nous désignerons par $\dot{\mathcal{I}}(\mathcal{S})$.

DEFINITION : Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-préinductive; on appelle *paratopologie sur* $\mathcal{A}$, ou sur $a \in \mathcal{A}$, une sous-classe inductive faible de $\mathcal{A}$ admettant a pour plus grand élément.

THEOREME : Soit $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ la classe des paratopologies sur un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$; $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ est un sous-groupoïde sous-préinductif de $\mathcal{I}_f(\mathcal{S})$ et de $\dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S})$. Si $\mathcal{S}$ est sous-inductif, $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ est un groupoïde sous-inductif pour la relation $T' \dot{<} T$.

DEFINITION : Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-préinductive; on appelle *base de filtre* une sous-classe B de $\mathcal{A}$ telle que, pour tout $b \in B$ et tout $b' \in B$, il existe $b'' \in B$ avec $b'' < b$ et $b'' < b'$. On appelle *filtre* sur $\mathcal{A}$ une sous-classe F de $\mathcal{A}$ qui est une base de filtre et qui, pour tout $f \in F$, contient tout majorant de f.

Si un filtre sur $\mathcal{A}$ contient le 0. il contient tout élément de $\mathcal{A}$; un tel filtre sera appelé *filtre trivial.*

DEFINITION : Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-préinductive; on appelle *quasi(-base de) filtre* sur $\mathcal{A}$ une sous-classe inductive de $\mathcal{A}$ dont la classe des éléments différents de 0 est une (base de) filtre.

PROPOSITION : Soit B une (quasi-) base de filtre sur la classe sous-préinductive $\mathcal{A}$; alors la classe F formée (de 0 et) des majorants des éléments de B (différents de 0) est un (quasi-) filtre, appelé *(quasi-) filtre engendré par* B *dans* $\mathcal{A}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-préinductive et B une quasi-base de filtre qui est base d'une partie sous-inductive $\overline{B}$. Alors $\overline{B}$ est une quasi-base du filtre F engen-dré par B dans $\mathcal{A}$.

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal (resp. sous-préinductif) et $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ (resp. $\mathcal{K}(\mathcal{S})$) la sous-classe de $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ (resp. $\mathcal{H}(\mathcal{S})$) formée des atlas faibles complets qui sont des quasi-bases de filtre; alors $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ et $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ sont respectivement des sous-groupoïdes saturés par induction de $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ et $\mathcal{H}(\mathcal{S})$.

PROPOSITION : Un quasi-filtre F sur un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$ est un atlas complet de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soit F un filtre d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$; alors $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ sont des bases de filtres $\alpha^*(F)$ et $\beta^*(F)$. Si G est un filtre sur $\mathcal{S}$ tel que $\alpha^*(G)=\beta^*(F)$, la classe GF est base d'un filtre G_*F pour lequel on a:

$$\alpha^*(G_*F) = \alpha^*(F); \qquad \beta^*(G_*F) = \beta^*(G).$$

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; la classe $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ des filtres sur $\mathcal{S}$ est un groupoïde sous-inductif pour la loi de composition définie par :

$$(F, G) \to G_*F \text{ si, et seulement si, } \alpha^*(G) = \beta^*(F),$$

et la relation d'ordre :

$$F' < F \text{ si, et seulement si, } F \text{ est une sous-classe de } F'.$$

COROLLAIRE : $\mathcal{S}$ s'identifie à un sous-groupoïde plein saturé $\mathcal{S}^{>}$ de $\mathcal{F}(\mathcal{S})$, saturé par intersection finie, en identifiant $f \in \mathcal{S}$ au filtre $f^{>}$ des majorants de f dans $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}$ est sous-inductif, $\mathcal{S}^{>}$ est un sous-pseudogroupe de $\mathcal{F}(\mathcal{S})$.

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ est un groupoïde quotient de $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ relativement au foncteur ψ qui associe à F le filtre engendré par F; ce foncteur est compatible avec les ordres. Si $\mathcal{S}$ est sous-prélocal, $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ est un groupoïde quotient de $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ relativement à la restriction de ψ à $\mathcal{B}(\mathcal{S})$.

REMARQUE : Si $\mathcal{S}$ est un groupoïde sous-préinductif, la classe des minorants d'un filtre n'est généralement pas une sous-classe complète de $\mathcal{S}$ et la classe des majorants d'un complexe peut ne pas être un filtre .

8. Espèces de structures sous-inductives :

DEFINITION : Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ deux classes sous-préinductives. Une application p de $\mathfrak{A}'$ dans $\mathfrak{A}$ est dite *sous-inductive* si, pour tout $a \in \mathfrak{A}'$, $b \in \mathfrak{A}'$ et $c \in \mathfrak{A}'$ tels que $a < c$ et $b < c$, on a :

$$p(a \cap b) = p(a) \cap p(b).$$

L'application p est dite *inductive* si elle est sous-inductive et si, pour toute sous-classe B de $\mathfrak{A}'$, p applique la congrégation de B dans la congrégation de $p(B)$:

$p(\underline{\cup}\, B) \subset \underline{\cup}\, p(B)$.

L'application p est dite $\hat{(}$*sous-*$\hat{)}$ *inductive stricte* si p est $\hat{(}$sous-$\hat{)}$ inductive et si les relations : $a < b$, $p(a) = p(b)$, où $a \in \mathcal{A}'$, $b \in \mathcal{A}'$, entraînent $a = b$.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux classes sous-préinductives et p une application sous-inductive stricte de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$; alors, pour tout $c \in \mathcal{A}'$, la restriction de p à la classe $\varphi'(c)$ des éléments inférieurs à c est un isomorphisme de $\varphi'(c)$ sur $p(\varphi'(c))$.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux classes sous-préinductives; pour qu'une application p sous-inductive stricte de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$ soit inductive, il faut et il suffit que, pour toute sous-classe B de $\mathcal{A}'$ admettant un b-agrégat, il existe $s < \overset{b}{\cup} B$ tel que $p(s) = \overset{p(b)}{\cup} p(B)$; dans ce cas, on a : $s = \overset{b}{\cup} B$.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$ compatible avec les ordres et p_o sa restriction à $\mathcal{S}_o$. Pour que p soit $\hat{(}$sous-$\hat{)}$ inductif, il faut et il suffit que p_o soit $\hat{(}$sous-$\hat{)}$inductif; pour que p soit sous-inductif strict, il faut et il suffit que p_o le soit.

DEFINITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\tilde{\mathcal{S}}$ deux groupoïdes sous-préinductifs. On dit que $\tilde{\mathcal{S}}$ est un *groupoïde quotient* $\hat{(}$*sous-*$\hat{)}$ *inductif* de $\mathcal{S}$ si $\tilde{\mathcal{S}}$ est un groupoïde quotient de $\mathcal{S}$ et si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) Le foncteur canonique q de $\mathcal{S}$ sur $\tilde{\mathcal{S}}$ est $\hat{(}$sous-$\hat{)}$ inductif.
2) Soient $\tilde f \in \tilde{\mathcal{S}}$, $\tilde f' \in \tilde{\mathcal{S}}$, $\tilde g \in \tilde{\mathcal{S}}$, $\tilde f < \tilde g$, $\tilde f' < \tilde g$; alors il existe $f \in q^{-1}(\tilde f)$, $f' \in q^{-1}(\tilde f')$ et $g \in q^{-1}(\tilde g)$ tels que $f < g$ et $f' < g$.

Ces conditions entraînent : $\tilde f \cap \tilde f' = \widetilde{(f \cap f')}$, où $\tilde f < \tilde g$, $\tilde f' < \tilde g$.

THEOREME : Soit $\tilde{\mathcal{S}}$ un groupoïde quotient d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$ et q le foncteur canonique de $\mathcal{S}$ sur $\tilde{\mathcal{S}}$; si les conditions 1 et 2 suivantes sont vérifiées, alors il existe une relation d'ordre canonique sur $\tilde{\mathcal{S}}$ pour laquelle $\tilde{\mathcal{S}}$ est un groupoïde sous-préinductif, quotient inductif de $\mathcal{S}$:

1) Soient $g \in \mathcal{S}$, $f \in \mathcal{S}$ avec $g < f$; alors pour tout f' tel que $q(f') = q(f)$, il existe un et un seul $g' < f'$ avec $q(g') = q(f')$.
2) Deux éléments différents de $q^{-1}(e)$, où $e \in \tilde{\mathcal{S}}_o$, ne sont pas comparables.

Dans $\tilde{\mathcal{S}}$, la relation d'ordre est définie par $\tilde g < \tilde f$ si, et seulement si, il existe $g \in q^{-1}(\tilde g)$ et $f \in q^{-1}(\tilde f)$ avec $g < f$.

DEFINITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs; on dit que $\mathcal{S}'$ est un *groupoïde sous-préinductif* $\hat{(}$*presque*$\hat{)}$ *au-dessus* de $\mathcal{S}$ si l'on s'est donné un foncteur p de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$ vérifiant les axiomes suivants :

1) p est $\hat{(}$sous-$\hat{)}$inductif strict.

2) $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$ est une espèce de structures.

Cette espèce de structures, dont les objets forment $\mathcal{S}'_o$, sera appelée alors *espèce de structures sous-préinductives* $\mathcal{S}'_o$ (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$ et sera désignée par $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$. Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont des groupoïdes (pré-) inductifs, on dira que $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est une *espèce de structures (pré-) inductives*.

CAS PARTICULIER : Si $\mathcal{S}'$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{S}$ et si p est l'injection canonique Id de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$, pour que l'on ait $\langle \mathcal{S}, Id, \mathcal{S}' \rangle$, il faut et il suffit que $\mathcal{S}'$ soit un sous-groupoïde sous-préinductif de $\mathcal{S}'$.

Pour que Id soit inductif, il faut et il suffit que, de plus, pour toute classe B de $\mathcal{S}'_o$, la congrégation de B dans $\mathcal{S}'_o$ soit contenue dans la congrégation de B dans $\mathcal{S}$.

DEFINITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$; on dit que $\mathcal{S}'$ est *étalé au-dessus de* $\mathcal{S}$, ou que p est un *étalement de* $\mathcal{S}'$ *dans* $\mathcal{S}$, si $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives au-dessus de $\mathcal{S}$ et si, pour tout $f \in \mathcal{S}'$, on a : $p(\varphi'(f)) = \varphi(p(f))$, où φ et φ' sont les foncteurs d'induction de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.

PROPOSITION : Soit $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives telle que p_o soit un étalement de $\mathcal{S}'_o$ dans $\mathcal{S}_o$; alors p est un étalement de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$ et $p(\mathcal{S}')$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{S}$ saturé par induction.

COROLLAIRE : Si de plus $\mathcal{S}$ est sous-inductif, alors $\mathcal{S}'$ est sous-inductif.

DEFINITION : Soient $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ et $\langle \mathcal{S}, p_1, \mathcal{S}'_1 \rangle$ deux espèces de structures sous-pré-inductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$; on dit que $\langle \mathcal{S}, p_1, \mathcal{S}'_1 \rangle$ est une *sous-espèce sous-préinductive de* $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ *(presque) au-dessus de* $\mathcal{S}$ si elle vérifie les conditions:

1) $(\mathcal{S}, p_1, \mathcal{S}'_1)$ est une sous-espèce de structures de $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$.

2) $\mathcal{S}'_1$ est muni de la structure d'ordre induite de celle de $\mathcal{S}'$.

PROPOSITION : Soit $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$; pour qu'une sous-espèce de structures $(\mathcal{S}, p_1, \mathcal{S}'_1)$ de $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$ soit une sous-espèce sous-préinductive (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$, il faut et il suffit que $\langle \mathcal{S}', Id, \mathcal{S}'_1 \rangle$ soit (presque) au-dessus de $\mathcal{S}'$.

THEOREME (transitivité): Soient $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ trois groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur (sous-) inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$ et p' un foncteur (sous-) inductif de $\mathcal{S}''$ vers $\mathcal{S}'$; alors pp' est un foncteur (sous-) inductif de $\mathcal{S}''$ vers $\mathcal{S}$. Si p et p' sont sous-inductifs stricts, alors pp' est sous-inductif strict.

COROLLAIRE : Soient $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ et $\langle \mathcal{S}', p', \mathcal{S}'' \rangle$ deux espèces de structures sous-

-préinductives telles que $(\mathcal{S}', p', \mathcal{S}'')$ soit une espèce de superstructures au-dessus de $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$; alors $\langle \mathcal{S}, pp', \mathcal{S}'' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives; si de plus p et p' sont inductifs, pp' l'est également. Si p et p' sont des étalements, pp' est un étalement.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ des groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur sous-inductif strict de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$ et p' un foncteur de $\mathcal{S}''$ dans $\mathcal{S}'$ compatible avec les ordres. Si pp' est un foncteur sous-inductif, alors p' est sous-inductif. Si de plus $\mathcal{S}'$ est sous-inductif, p et pp' inductifs, alors p' est inductif.

DEFINITION : Soient $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ et $\langle \mathcal{S}_1, p_1, \mathcal{S}_1' \rangle$ deux espèces de structures sous-pré-inductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_1$; on appelle *application covariante (sous-) inductive de* $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ dans $\langle \mathcal{S}_1, p_1, \mathcal{S}_1' \rangle$, et on note $\langle \chi_o, \psi \rangle$ une application covariante (χ_o, ψ) de $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$ dans $(\mathcal{S}_1, p_1, \mathcal{S}_1')$ telle que ψ et χ_o soient (sous-)inductifs. Si l'espèce de structures $(\mathcal{S}_1, p_1, \mathcal{S}_1')$ est sous-jacente à $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$ par une application covariante (sous-)inductive, on dit que l'espèce de *structures sous-préinductives* $\langle \mathcal{S}_1, p_1, \mathcal{S}_1' \rangle$ *est sous-jacente à* $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$.

PROPOSITION : Si $\langle \chi_o, \psi \rangle$ est une application covariante (sous-)inductive de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ dans $\langle \mathcal{S}_1, p_1, \mathcal{S}_1' \rangle$, le foncteur χ correspondant est (sous-)inductif.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{R}_o$ une classe d'espèces de structures sous-préinductives et $\mathcal{R}$ la classe des applications covariantes (sous-)inductives d'un élément de $\mathcal{R}_o$ dans un élément de $\mathcal{R}_o$. Alors $\mathcal{R}$ est une catégorie pour la loi de composition:
$(\langle \chi_o, \psi \rangle, \langle \chi_o', \psi' \rangle) \to \langle \chi_o' \chi_o, \psi' \psi \rangle$, si, et seulement si, les foncteurs ψ et ψ' sont composables ainsi que les applications χ_o et χ_o'.

DEFINITION : Soit $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$. Une espèce de structures sous-préinductives $\langle \mathcal{S}', p', \mathcal{S}'' \rangle$ (presque) au-dessus de $\mathcal{S}'$ sera appelée *espèce de superstructures sous-préinductives (presque) au-dessus de* $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ si $\langle \mathcal{S}, p, p'(\mathcal{S}') \rangle$ est une sous-espèce de structures sous-préinductives de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$.

PROPOSITION : Si $\langle \mathcal{S}', p', \mathcal{S}'' \rangle$ est une espèce de superstructures sous-préinductives (presque) au-dessus de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$, alors $\langle \mathcal{S}, pp', \mathcal{S}'' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$, à laquelle $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est sous-jacente.

DEFINITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, ψ et ψ' deux foncteurs (sous-) inductifs de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$; on appelle *transformation naturelle (sous-) inductive* de ψ vers ψ' une transformation naturelle (ψ', τ, ψ) telle que τ soit une appli-

-cation (sous-) inductive de $\mathcal{S}_o$ dans la classe sous-préinductive $\mathcal{S}'$; on la note par $\langle \psi', \tau, \psi \rangle$.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, ψ et ψ' deux fonc-teurs de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$ et (ψ', τ, ψ) une transformation naturelle de ψ vers ψ'; si ψ ou ψ' est (sous-) inductif et si τ est une application (sous-) inductive, alors (ψ', τ, ψ) est une transformation naturelle (sous-) inductive.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs; la classe $\mathcal{N} \langle \mathcal{S}', \mathcal{S} \rangle$ des transformations naturelles (sous-) inductives entre foncteurs (sous-) inductifs de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$ est une catégorie pour la multiplication longitudinale.

THEOREME : Soient $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ et $\overline{\mathcal{S}}$ trois groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur sous-inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$ et $\varkappa$ un foncteur sous-inductif de $\overline{\mathcal{S}}$ vers $\mathcal{S}$; alors le groupoïde induit $\varkappa^*(\mathcal{S}', p)$ est un sous-groupoïde sous-préinductif de $\mathcal{S}' \times \overline{\mathcal{S}}$ et les foncteurs cano-niques $\bar{p}$ et η de $\varkappa^*(\mathcal{S}', p)$ vers $\overline{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{S}'$ sont sous-inductifs. Si p et $\varkappa$ sont inductifs, $\varkappa^*(\mathcal{S}', p)$ est de plus une partie sous-inductive faible de $\mathcal{S}' \times \overline{\mathcal{S}}$ et les foncteurs $\bar{p}$ et η sont inductifs.

COROLLAIRE 1 : Soit $\mathcal{S}''$ un groupoïde sous-préinductif, η' et p' des foncteurs de $\mathcal{S}''$ vers $\mathcal{S}'$ et $\overline{\mathcal{S}}$ tels que $p\,\eta' = \varkappa p'$. Si p, $\varkappa$, η' et p' sont (sous-) inductifs, alors le fonc-teur canonique $\bar{\eta}'$ de $\mathcal{S}''$ vers $\varkappa^*(\mathcal{S}', p)$ est (sous-) inductif. Si, de plus, p' ou η' est sous-inductif strict, alors $\bar{\eta}'$ est sous-inductif strict.

COROLLAIRE 2 : Si $\mathcal{S}'$ et $\overline{\mathcal{S}}$ sont (sous-) inductifs, p et $\varkappa$ inductifs, alors $\varkappa^*(\mathcal{S}', p)$ est un groupoïde (sous-) inductif pour l'ordre produit.

COROLLAIRE 3 : Si $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives (pres-que) au-dessus de $\mathcal{S}$ et si $\varkappa$ est (sous-) inductif, alors $\langle \overline{\mathcal{S}}, \bar{p}, \varkappa^*(\mathcal{S}', p) \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de $\overline{\mathcal{S}}$. Si p est un étalement et $\varkappa$ un foncteur sous-inductif, $\bar{p}$ est un étalement.

COROLLAIRE 4 : Si $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives (pres-que) au-dessus de $\mathcal{S}$ et si q est une application (sous-) inductive d'une classe sous-préinductive $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{S}_o$, l'espèce de structures $(q^*(\mathcal{S}), p', q^*(\mathcal{S}'))$ induite de $\mathcal{S}$ est une espèce de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de $q^*(\mathcal{S})$.

PROPOSITION : Soient $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives, $\overline{\mathcal{S}}$ un groupoïde sous-préinductif et $\langle \varkappa', \theta, \varkappa \rangle \in \mathcal{N} \langle \mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}} \rangle$ une transformation naturelle sous-inductive telle que $\theta(\overline{\mathcal{S}}_o)$, $\varkappa(\overline{\mathcal{S}})$ et $\varkappa'(\overline{\mathcal{S}})$ soient contenus dans $p(\mathcal{S}')$. Alors il existe un foncteur sous-inductif π de $\varkappa^*(\mathcal{S}',p)$ vers $\varkappa'^*(\mathcal{S}',\ p)$ et une transforma- -tion naturelle sous-inductive $\langle \eta'\pi, \tau, \eta\rangle$ tels que : $p\,\tau = \theta\,\bar{p}$, η et η' étant les fonc- -teurs canoniques de $\varkappa^*(\mathcal{S}',p)$ et $\varkappa'^*(\mathcal{S}',p)$ vers $\mathcal{S}'$. Si p, $\varkappa$, $\varkappa'$ et θ sont inductifs, alors π et τ le sont aussi.

DEFINITION: Soient $\bar{\mathcal{S}}$ un groupoïde sous-préinductif et $\mathcal{S}$ une partie sous-inductive faible de $\bar{\mathcal{S}}$; on dit que $\bar{\mathcal{S}}$ est une *extension inessentielle (sous-) inductive* $\langle \varkappa, \bar{\mathcal{S}}\rangle$ de $\mathcal{S}$ s'il existe une extension inessentielle $(\varkappa, \mathcal{S}_1)$ de $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{S}_1$ soit un sous-groupoïde sous-préinductif de $\bar{\mathcal{S}}$ et une base de $\bar{\mathcal{S}}$, et que $\varkappa$ soit un foncteur (sous-) inductif.

PROPOSITION : Soient $\langle \varkappa, \bar{\mathcal{S}}\rangle$ une extension inessentielle sous-inductive d'un groupoïde sous-local $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_2$ le sous-pseudogroupe faible engendré dans $\bar{\mathcal{S}}$ par la source $\mathcal{S}_1$ de $\varkappa$; alors $\varkappa$ peut être prolongé en un foncteur sous-inductif $\varkappa'$ de $\mathcal{S}_2$ sur $\mathcal{S}$, dont la restriction à $\mathcal{S}_1$ est $\varkappa$; c'est-à-dire $(\varkappa', \mathcal{S}_2)$ est une extension inessentielle de $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}_1$ est un groupoïde sous-local et si $\varkappa$ est inductif, $\varkappa'$ est inductif.

THEOREME : Soient $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ et $\bar{\mathcal{S}}$ des groupoïdes sous-préinductifs, $\langle \varkappa, \bar{\mathcal{S}}\rangle$ une exten- -sion inessentielle inductive de $\mathcal{S}$, $\bar{\varkappa}$ un foncteur inductif de $\bar{\mathcal{S}}$ sur $\mathcal{S}$ dont la restric- -tion à la source $\mathcal{S}_1$ de $\varkappa$ est $\varkappa$ et p un étalement de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$. Alors $\langle \eta, \bar{\varkappa}^*(\mathcal{S}',p)\rangle$ est une extension inessentielle inductive de $\mathcal{S}'$, η désignant le foncteur canonique de $\bar{\varkappa}^*(\mathcal{S}',p)$ sur $\mathcal{S}'$.

DEFINITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\bar{\mathcal{S}}$ deux groupoïdes sous-préinductifs; on dit que $\bar{\mathcal{S}}$ est un *élargissement inductif* de $\mathcal{S}$ et on note $\mathcal{S} \mathrel{\bar{<}} \bar{\mathcal{S}}$, si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $\mathcal{S}$ est saturé par induction dans $\bar{\mathcal{S}}$.
2) $\bar{\mathcal{S}}$ admet pour base un sous-groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}_1$ qui est un élargissement de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\bar{\mathcal{S}}$ deux groupoïdes sous-préinductifs avec $\mathcal{S} \mathrel{\bar{<}} \bar{\mathcal{S}}$; alors l'élargissement $\mathcal{S}_1$ de $\mathcal{S}$ qui est base de $\bar{\mathcal{S}}$ est saturé par induction dans $\bar{\mathcal{S}}$; la compo- -sante inductive de $\mathcal{S}$ dans $\bar{\mathcal{S}}$ est $\bar{\mathcal{S}}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un sous-pseudogroupe d'un groupoïde sous-préinductif $\acute{\mathcal{S}}$; pour que l'on ait $\mathcal{S} \mathrel{\bar{<}} \bar{\mathcal{S}}$, il faut et il suffit que $\mathcal{S}$ soit un groupoïde plein saturé par induction et que la composante inductive de $\mathcal{S}$ dans $\bar{\mathcal{S}}$ soit $\bar{\mathcal{S}}$.

PROPOSITION : Pour qu'un groupoïde sous-préinductif $\bar{\mathcal{S}}$ soit un élargissement inductif d'un sous-groupoïde $\mathcal{S}$, il faut et il suffit qu'il existe un atlas faible complet F de $\bar{\mathcal{S}}$ tel que $\bar{a}(F) = \bar{\mathcal{S}}$ et $b(F) = \mathcal{S}$, où $\bar{a}(F)$ est le sous-pseudogroupe de $\bar{\mathcal{S}}$ engendré par $a(F)$; dans ce cas, F est saturé par induction.

COROLLAIRE : Pour que l'on ait $\mathcal{S} \leqslant \overline{\mathcal{S}}$, où $\mathcal{S}$ est un sous-pseudogroupe de $\overline{\mathcal{S}}$, il faut et il suffit qu'il existe un atlas complet $\overline{F}$ de $\overline{\mathcal{S}}$ avec $\overline{a}(\overline{F}) = \overline{\mathcal{S}}$ et $b(\overline{F}) = \mathcal{S}$.

THEOREME : Dans une classe $\mathcal{K}$ de groupoïdes sous-préinductifs la relation : $\mathcal{S} \leqslant \overline{\mathcal{S}}$ est une relation d'ordre.

DEFINITION : Soient $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ et $\langle \mathcal{S}, \overline{p}, \overline{\mathcal{S}}' \rangle$ deux espèces de structures sous-pré-inductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$; on dit que $\langle \mathcal{S}, \overline{p}, \overline{\mathcal{S}}' \rangle$ est un *élargissement inductif* (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$ de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$, et on note $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle \leqslant \langle \mathcal{S}, \overline{p}, \overline{\mathcal{S}}' \rangle$, si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $\mathcal{S}'$ est saturé par induction dans $\overline{\mathcal{S}}'$.
2) Il existe un élargissement $(\mathcal{S}, p_1, \mathcal{S}'_1)$ de $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$ tel que $\langle \mathcal{S}, p_1, \mathcal{S}'_1 \rangle$ soit une sous-espèce sous-préinductive de $\langle \mathcal{S}, \overline{p}, \mathcal{S}' \rangle$ (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$ et que $\mathcal{S}'_1$ soit une base de $\overline{\mathcal{S}}'$.

PROPOSITION : Soient $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ et $\langle \mathcal{S}, \overline{p}, \overline{\mathcal{S}}' \rangle$ deux espèces de structures sous-préinductives; si l'on a $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle \leqslant \langle \mathcal{S}, \overline{p}, \overline{\mathcal{S}}' \rangle$, alors on a $\mathcal{S}' \leqslant \overline{\mathcal{S}}'$.

COROLLAIRE : Si $\mathcal{S}'$ est un sous-pseudogroupe de $\overline{\mathcal{S}}'$, si $\mathcal{S}' \leqslant \overline{\mathcal{S}}'$ et si $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$ est une sous-espèce de $(\mathcal{S}, \overline{p}, \overline{\mathcal{S}}')$, alors on a : $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle \leqslant \langle \mathcal{S}, \overline{p}, \overline{\mathcal{S}}' \rangle$.

THEOREME : Soit $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$ une espèce de structures et $(\mathcal{S}, \overline{p}, \overline{\mathcal{S}}')$ son élargissement maximal au-dessus de $\mathcal{S}$; si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont des groupoïdes sous-préinductifs et p un foncteur (sous-) inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$, alors il existe une relation d'ordre sur $\overline{\mathcal{S}}'$, pour laquelle $\overline{\mathcal{S}}'$ est un élargissement inductif de $\mathcal{S}'$ et $\overline{p}$ un foncteur (sous-) inductif.

COROLLAIRE 1 : Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont (sous-) inductifs et p inductif, alors $\overline{\mathcal{S}}'$ est (sous-) inductif.

COROLLAIRE 2 : Si p est un étalement de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$, alors $\overline{p}$ est un étalement de $\overline{\mathcal{S}}'$ dans $\mathcal{S}$. Si $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ *est une espèce de structures* (sous-pré) inductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$, $\langle \mathcal{S}, \overline{p}, \overline{\mathcal{S}}' \rangle$ est une espèce de structures (sous-pré) inductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$, élargissement inductif de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$.

COROLLAIRE 3 : Si $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives au-dessus de $\mathcal{S}$ telle que $p(\mathcal{S}')$ soit une partie sous-inductive de $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{S}'$ est un sous-pseudogroupe de $\overline{\mathcal{S}}'$.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur sous-inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$ et E une sous-classe compatible de $\mathcal{S}'_o$ telle que la restriction de p à E soit compatible avec l'intersection finie (c'est-à-dire, pour tout $e \in E$ et tout $e' \in E$, $p(e') \cap p(e)$ est défini et égal à $p(e'e)$). Alors la restriction de p à $\varphi'(E)$

est compatible avec l'intersection finie. Si p est sous-inductif strict, sa restriction à E est un isomorphisme sur $p(E)$ pour les ordres induits.

DEFINITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur sous-inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$; un atlas (faible) complet F de $\mathcal{S}'$ est dit *compatible avec p* si les conditions suivantes sont vérifiées : soient $f \in F$ et $f' \in F$; si $\alpha(f)\alpha(f')$ est défini, $p(\alpha(f))$ et $p(\alpha(f'))$ admettent $p(\alpha(f)\alpha(f'))$ pour intersection; si $\beta(f)\beta(f')$ est défini, alors $p(\beta(f))$ et $p(\beta(f'))$ admettent $p(\beta(f)\beta(f'))$ pour intersection.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur sous-inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$; pour qu'un atlas faible complet F de $\mathcal{S}'$ soit compatible avec p, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée:

1) Soient $f \in F$ et $f' \in F$; si $f^{-1}f'$ est défini, alors $p(f^{-1})p(f')$ est défini et égal à $p(f^{-1}f')$; si $f'f^{-1}$ est défini, on a de même: $p(f')\,p(f^{-1}) = p(f'f^{-1})$.
2) La restriction de p à $a(F)$ et $b(F)$ est compatible avec la pseudomultiplication dans $\mathcal{S}'$ et dans $\mathcal{S}$.
3) Soient $f \in F$, $h \in a(F)$ et $k \in b(F)$; si fh est défini, on a: $p(f)\,p(h) = p(fh)$; si kf est défini, on a: $p(kf) = p(k)\,p(f)$.

COROLLAIRE 1 : La classe $\mathcal{H}(\mathcal{S}', p)$ des atlas faibles complets de $\mathcal{S}'$ compatibles avec p est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $\mathcal{H}(\mathcal{S}')$.

COROLLAIRE 2 : La sous-classe de $\mathcal{H}'(\mathcal{S}')$ formée des atlas faibles complets compati--tibles avec p est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $\mathcal{H}'(\mathcal{S}')$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S}')$) que nous désignerons par $\mathcal{H}'(\mathcal{S}', p)$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S}', p)$).

COROLLAIRE 3 : La sous-classe intersection de $\mathcal{I}_f(\mathcal{S}')$ (resp. $\dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S}')$) avec $\mathcal{H}'(\mathcal{S}', p)$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S}', p)$) est un sous-groupoïde saturé par induction de $\mathcal{I}_f(\mathcal{S}')$ (resp. $\dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S}')$), qui contient $\mathcal{T}(\mathcal{S}')$ et que nous désignerons par $\mathcal{I}_f(\mathcal{S}', p)$ (resp. $\dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S}', p)$).

COROLLAIRE 4 : La sous-classe des complexes de $\mathcal{S}'$ qui appartiennent à $\mathcal{I}_f(\mathcal{S}', p)$ est un groupoïde local $(\tilde{\mathcal{S}}', p)$ pour la relation $F' \subset F$, admettant $\mathcal{S}$ pour base.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-prélocaux, p un foncteur inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$ et F un atlas complet de $\mathcal{S}'$ compatible avec p. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) F est un atlas propre compatible avec p.
2) F admet pour base une sous-classe B telle que $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ soient compatibles et que les restrictions de p à $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ soient compatibles avec l'intersection finie.

3) La restriction de p à $\bar{a}(F)$ et $\bar{b}(F)$ est compatible avec la pseudomultiplication dans $\mathcal{S}'$ et dans $\mathcal{S}$; de plus $\bar{a}(F)$ et $\bar{b}(F)$ sont propres.

4) F admet pour base un atlas faible complet appartenant à $\mathcal{H}'(\mathcal{S}', p)$.

COROLLAIRE : La classe $\mathcal{A}'(\mathcal{S}', p)$ des atlas complets propres compatibles avec p est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $\mathcal{A}'(\mathcal{S}')$ et de $\dot{\mathcal{A}}'(\mathcal{S}')$; la classe intersection $\mathcal{I}(\mathcal{S}', p)$ de $\mathcal{I}(\mathcal{S}')$ avec $\mathcal{A}'(\mathcal{S}', p)$ est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $\mathcal{I}(\mathcal{S}')$ et de $\dot{\mathcal{I}}(\mathcal{S}')$.

THEOREME : Soient $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal et $\mathcal{S}'$ un groupoïde sous-préinductif, p un foncteur sous-inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$; l'application p' qui associe à $F \in \mathcal{H}'(\mathcal{S}', p)$ la partie sous-inductive faible engendrée par $p(F)$ dans $\mathcal{S}$ est un foncteur sous-inductif de $\mathcal{H}'(\mathcal{S}', p)$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S}', p)$) vers $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S})$).

COROLLAIRE 1 : Si p est un foncteur sous-inductif strict, alors p' est un foncteur sous-inductif strict de $\mathcal{H}'(\mathcal{S}', p)$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S}', p)$) vers $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S})$).

COROLLAIRE 2 : La restriction de p' à $\mathcal{I}_f(\mathcal{S}', p)$ est un foncteur sous-inductif de $\dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S}', p)$ vers $\dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S})$, qui applique $\mathcal{T}(\mathcal{S}')$ dans $\mathcal{T}(\mathcal{S})$.

THEOREME : Soit $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives au-dessus de $\mathcal{S}$, où $\mathcal{S}'$ est un groupoïde sous-inductif; désignons par p' l'application qui associe à $F \in \mathcal{H}'(\mathcal{S}', p)$ la classe $p(F)$; alors $\langle \mathcal{H}'(\mathcal{S}), p', \mathcal{H}'(\mathcal{S}', p) \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives, et p' est un étalement de $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S}', p)$ dans $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S})$.

COROLLAIRE : La restriction de p' à $\mathcal{I}_f(\mathcal{S}', p)$ est un étalement de $\dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S}', p)$ dans $\dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S})$ qui étale $\mathcal{T}(\mathcal{S}')$ dans $\mathcal{T}(\mathcal{S})$. En particulier, la restriction de p' à $\mathcal{S}'$ est un étalement dans $\mathcal{T}(\mathcal{S})$.

THEOREME : Soient $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives étalée au-dessus de $\mathcal{S}$ et p' l'application qui associe la classe $p(F)$ à $F \in \dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S}', p)$; alors p' est un étalement de $\mathcal{H}'(\mathcal{S}', p)$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S}', p)$) dans $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S})$).

THEOREME : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-prélocaux et p un foncteur inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$; alors l'application $\bar{p}$ qui associe à $F \in \mathcal{A}'(\mathcal{S}', p)$ la partie sous-inductive engendrée par $p(F)$ dans $\mathcal{S}$ est un foncteur sous-inductif de $\mathcal{A}'(\mathcal{S}', p)$ (resp. $\dot{\mathcal{A}}'(\mathcal{S}', p)$) vers $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ (resp. $\dot{\mathcal{A}}'(\mathcal{S})$).

COROLLAIRE 1 : Si p est inductif strict, alors $\bar{p}$ est un foncteur sous-inductif strict de $\mathcal{A}'(\mathcal{S}', p)$ vers $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ et un foncteur inductif strict de $\dot{\mathcal{A}}'(\mathcal{S}', p)$ vers $\dot{\mathcal{A}}(\mathcal{S})$ qui étale $\dot{\mathcal{A}}'(\mathcal{S}', p)_o$ dans $\dot{\mathcal{A}}'(\mathcal{S})_o$.

COROLLAIRE 2: Si p est un étalement de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$, alors $\bar{p}$ est un étalement de $\mathfrak{A}'(\mathcal{S}',p)$ (resp. $\dot{\mathfrak{A}}'(\mathcal{S}',p)$) dans $\mathfrak{A}'(\mathcal{S})$ (resp. $\dot{\mathfrak{A}}'(\mathcal{S})$). La restriction de $\bar{p}$ à $\mathcal{I}(\mathcal{S}',p)$ étale $\mathcal{I}(\mathcal{S}',p)$ (resp. $\dot{\mathcal{I}}(\mathcal{S}',p)$) dans $\mathcal{I}(\mathcal{S})$ (resp. $\dot{\mathcal{I}}(\mathcal{S})$). La sous-classe $\mathcal{C}(\mathcal{S}',p)$ de $\dot{\mathcal{I}}(\mathcal{S}',p)$ formée des éléments F tels que $\bar{p}(F) \in \mathfrak{J}(\mathcal{S})$ est un sous-groupoïde plein sous-préinductif de $\dot{\mathcal{I}}(\mathcal{S}',p)$, que $\bar{p}$ étale dans $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$.

DEFINITION: Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs et p un foncteur sous-inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$; on appelle sous-classe *compatible relativement à* p une sous-classe compatible B de $\mathcal{S}'$ telle que la restriction de p à $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ soit compati--ble avec l'intersection finie.

PROPOSITION: Soit $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives; pour qu'une classe B de $\mathcal{S}'$ soit compatible relativement à p, il faut et il suffit que $\alpha(B)$ soit compatible relativement à p et que $p(B)$ soit une sous-classe compatible.

COROLLAIRE 1: Pour tout $F \in \mathcal{H}'(\mathcal{S}',p)$ tel que $p(F)$ soit compatible, on a $F \in \mathcal{I}_f(\mathcal{S}',p)$; si $F \in \mathfrak{A}'(\mathcal{S}',p)$ et $\bar{p}(F) \in \mathfrak{J}(\mathcal{S})$, alors $F \in \mathcal{I}(\mathcal{S}',p)$.

COROLLAIRE 2: Supposons $\mathcal{S}$ sous-prélocal et p tel que $p(f)\,p(e)$ appartienne à $p(\mathcal{S}')$, pour tout $f \in F'$, $e \in \mathcal{S}'_0$ tels que $p(e) < \alpha(p(f))$. Alors $\langle \mathcal{I}_f(\mathcal{S}), p', \mathcal{I}_f(\mathcal{S}',p)\rangle$ (resp. $\langle \dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S}), p', \dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S}',p)\rangle$) est une espèce de structures sous-préinductives (resp. inductives).

DEFINITION: Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$. On dira que $\mathcal{S}'$ est *complet relativement à* p si p est un foncteur inductif strict et si p applique biunivoquement $\underline{\cup} B$ sur $\underline{\cup} p(B)$, pour toute sous-classe B de $\mathcal{S}'$ qui est compatible relativement à p. Une espèce de structures sous-préinductives $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est dite *complète* si $\mathcal{S}'$ est complet relativement à p.

Il résulte de cette définition que si $p(B)$ admet un agrégat dans $\mathcal{S}$, alors B admet un agrégat dans $\mathcal{S}'$; en particulier, si $\mathcal{S}$ est préinductif et $\mathcal{S}'$ sous-inductif, alors $\mathcal{S}'$ est inductif.

PROPOSITION: Soient $\mathcal{S}'$ un groupoïde sous-inductif et $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal; si p est un foncteur inductif strict de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{S}'$ est un groupoïde sous-local.

PROPOSITION: Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs et p un foncteur inductif strict de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$. Si p applique biuvivoquement $\underline{\cup} C$ sur $\underline{\cup} p(C)$ pour tout complexe $C \in (\tilde{\mathcal{S}}', p)$, alors $\mathcal{S}'$ est complet relativement à p.

COROLLAIRE: Si $\mathcal{S}$ est préinductif et $\mathcal{S}'$ inductif et si $\cup \bar{C}$ est défini pour toute sous-classe complète $\bar{C}$ telle que $\cup p(\bar{C})$ soit défini, alors $\mathcal{S}'$ est complet relativement à p.

PROPOSITION: Soient $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ des groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur de

$\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$, p' un foncteur de $\mathcal{S}''$ vers $\mathcal{S}'$, tels que $\mathcal{S}'$ soit complet relativement à p et $\mathcal{S}''$ relativement à p' ; alors $\mathcal{S}''$ est complet relativement à pp'.

PROPOSITION : Soit $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives telle que $p(\mathcal{S}')$ soit un sous-groupoïde saturé de $\mathcal{S}$; si $\mathcal{S}'_0$ est complet relativement à p_0, alors $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives complète.

THEOREME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif et θ l'application de $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ dans $\mathcal{S}$ qui applique la paratopologie T sur son plus grand élément t. Alors $\langle \mathcal{S}, \theta, \mathcal{T}(\mathcal{S}) \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives complète.

COROLLAIRE : Si $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est une espèce de structures sous-inductives au-dessus de $\mathcal{S}$, alors p se décompose canoniquement sous la forme $p = \theta\tau$, où τ est l'étalement canonique de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{T}(\mathcal{S})$.

THEOREME : Soient $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-(pré)inductif et $\hat{\mathcal{S}}$ la sous-classe du groupoïde produit $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ formée des couples (f', f), où $f' < f$, munie de la relation :

$$(f', f) < (g', g) \text{ si, et seulement si, } f = g \text{ et } f' < g', \text{ ou } (f', f) = (0, 0).$$

Alors $\hat{\mathcal{S}}$ est un groupoïde (pré)inductif. Soit $\mathcal{S}^-$ le groupoïde obtenu en ajoutant à $\mathcal{S}$ un élément $0^- < 0$; $\mathcal{S}^-$ est un groupoïde sous-préinductif, quotient inductif de $\hat{\mathcal{S}}$ pour le foncteur canonique π tel que :

$$\pi((0,0)) = 0^-; \qquad \pi((f', f)) = f', \text{ si } f \neq 0;$$

π est un étalement de la classe (pré)inductive $\hat{\mathcal{S}}$ dans $\mathcal{S}$.

COROLLAIRE 1 : Si $\mathcal{S}$ est sous-inductif, toute sous-classe compatible relativement à π admet un agrégat dans $\hat{\mathcal{S}}$.

COROLLAIRE 2 : Soit $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$; alors $\langle \hat{\mathcal{S}}, p \times p, \hat{\mathcal{S}}' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de $\hat{\mathcal{S}}$. Si $\mathcal{S}'$ est sous-inductif et p inductif, alors $\hat{\mathcal{S}}'$ est complet relativement à $p \times p$.

COROLLAIRE 3 : Si p est un étalement de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$ (et si $\mathcal{S}'$ est complet relativement à p), alors $p \times p$ est un étalement de $\hat{\mathcal{S}}'$ dans $\hat{\mathcal{S}}$ (et $\hat{\mathcal{S}}'$ est complet relativement à $p \times p$).

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ un groupoïde local, $\mathcal{S}'$ un groupoïde sous-préinductif et p un foncteur sous-inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$; la classe $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{S}', p)$ des complexes $C \in (\tilde{\mathcal{S}}', p)$ tels qu'il existe $\cup p(C)$ dans $\mathcal{S}$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $(\tilde{\mathcal{S}}', p)$. Le foncteur $\varkappa$ qui associe à $C \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{S}', p)$ l'élément $\cup p(C)$ est un foncteur inductif et toute sous-classe compatible relativement à $\varkappa$ dont l'image par $\varkappa$ admet un agrégat dans $\mathcal{S}$ admet un agrégat dans $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{S}', p)$.

REMARQUE : Si de plus $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives, alors $(\mathcal{S}, \varkappa, \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{S}', p))$ est une espèce de structures; mais, en général, $\varkappa$ n'est pas un foncteur inductif strict.

THEOREME : Soit $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures locales au-dessus de $\mathcal{S}$; soit $(\overline{\mathcal{S}}'', p)$ la sous-classe de $\mathcal{C}(\mathcal{S}', p)$ formée des sous-classes complètes (c'est-à-dire $C \in (\overline{\mathcal{S}}', p)$ est une sous-classe complète de $\mathcal{S}'$ compatible avec p et telle que $\cup p(\mathcal{C})$ soit défini et égal à $\theta \bar{p}(C)$); alors $\langle \mathcal{S}, \theta \bar{p}, (\overline{\mathcal{S}}', p) \rangle$ est une espèce de structures locales complète et un élargissement inductif de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$, déterminé à une équivalen--ce près par les conditions suivantes:

Pour toute espèce de structures locales complète $\langle \mathcal{S}, q, \Sigma' \rangle$ au-dessus de $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{S}'$ soit une base de Σ' et que p soit la restriction de q à $\mathcal{S}'$, il existe une application covariante inductive de $\langle \mathcal{S}, \theta \bar{p}, (\overline{\mathcal{S}}', p) \rangle$ sur $\langle \mathcal{S}, q, \Sigma' \rangle$ qui se réduit à l'identité sur $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$.

DEFINITION : Avec les notations du théorème, l'espèce de structures locales $\langle \mathcal{S}, \theta \bar{p}, (\overline{\mathcal{S}}', p) \rangle$ est appelée la *complétion de* $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$.

THEOREME : Soient $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures locales au-dessus de $\mathcal{S}$ et $(\mathcal{S}, p_1, \mathcal{S}'_1)$ l'élargissement maximal de $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$; alors la complétion de $\langle \mathcal{S}, p_1, \mathcal{S}'_1 \rangle$ est un élargissement inductif de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ appelé *élargissement complet de* $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$.

Une structure S de l'élargissement complet de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ s'identifie à un atlas faible complet F de $\mathcal{S}'_1$ tel que $a(F)$ soit une composante inductive faible de $\mathcal{S}'$ et que:

$$\theta_1 \bar{p}_1(S) = \cup p(\beta(F)).$$

THEOREME (transitivité verticale) : Soient $\langle \mathcal{S}', p', \mathcal{S}'' \rangle$ et $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ deux espèces de structures locales, où $\langle \mathcal{S}', p', \mathcal{S}'' \rangle$ est une espèce de superstructures locales au--dessus de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$; soient $\langle (\overline{\mathcal{S}}', p), q', (\overline{\mathcal{S}}'', p'') \rangle$ et $\langle \mathcal{S}, q, (\overline{\mathcal{S}}', p) \rangle$ les complé--tions de $\langle (\overline{\mathcal{S}}', p), p'', \mathcal{S}'' \rangle$ et $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ où p'' désigne le foncteur ip', i étant l'in--jection canonique de $\mathcal{S}'$ dans $(\overline{\mathcal{S}}', p)$; alors la complétion de $\langle \mathcal{S}, pp', \mathcal{S}'' \rangle$ est équiva--lente à $\langle \mathcal{S}, qq', (\overline{\mathcal{S}}'', p'') \rangle$.

COROLLAIRE : Soient $\langle \mathcal{S}'_1, \bar{p}'_1, \overline{\mathcal{S}}''_1 \rangle$ et $\langle \mathcal{S}, \bar{p}_1, \overline{\mathcal{S}}'_1 \rangle$ les élargissements complets de $\langle \overline{\mathcal{S}}'_1, jp', \mathcal{S}'' \rangle$ et $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ où j est l'injection canonique de $\mathcal{S}'$ dans $\overline{\mathcal{S}}'_1$; alors l'é--largissement complet de $\langle \mathcal{S}, pp', \mathcal{S}'' \rangle$ est équivalent à l'espèce de structures com--plète $\langle \mathcal{S}, \bar{p}'_1 \bar{p}_1, \overline{\mathcal{S}}''_1 \rangle$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif, I une classe d'indices, contenant en particulier $0, 1, 2,$ et munie de la relation : $i < j$ si, et seulement si, $i = j$ ou $i = 0$. Soient Γ un sous-pseudogroupe du groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S} \times (I \times I)$ et F_{ji} la classe des éléments f tels que $(f, (j, i)) \in \Gamma$; alors F_{ji} est un atlas complet, F_{ii} un sous-pseudogroupe et l'on a :

$$(F_{ji})^{-1} = F_{ij}; \quad \overline{F_{kj} F_{ji}} \prec F_{ki} \text{ pour tout } k \in I, \ j \in I \text{ et } i \in I.$$

COROLLAIRE : Soit F un atlas complet de $\mathcal{S}$; le sous-pseudogroupe faible $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S} \times (I \times I)$ engendré par la classe des triplets $(f, (2, 1))$, où $f \in F$, est un élargissement de $(a(F), (1, 1))$ (resp. de $(b(F), (2, 2))$) et le sous-pseudogroupe $\overline{\mathcal{F}}$ engendré par $\mathcal{F}$ est un élargissement inductif de $(a(F), (1, 1))$ (resp. $(b(F), (2, 2))$), qui est réunion de $(\bar{a}(F), (1, 1)), (F, (2, 1)), (F^{-1}, (1, 2)), (\bar{b}(F), (2, 2))$.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, F un atlas complet de $\mathcal{S}$ et q un foncteur inductif de $\bar{a}(F)$ vers $\mathcal{S}'$; soit $\bar{q}$ une application inductive de F dans $\mathcal{S}'$ telle que l'on ait, pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$:

$$(\bar{q}(f))^{-1} \, \bar{q}(f') = q(f^{-1} f'), \text{ si } f^{-1} f' \text{ est défini} ;$$

alors il existe un foncteur inductif q' de $\mathcal{F}$ (corollaire précédent) vers $\mathcal{S}'$ prolongeant $\bar{q} \times (Id \times Id)$ et dont la restriction à $(b(F), (2, 2))$ est un foncteur inductif. Le foncteur q' est défini par : $q'(b, (1, 1)) = q(b)$; $q'(f, (2, 1)) = \bar{q}(f)$; $q'(f', (1, 2)) = (\bar{q}(f'^{-1}))^{-1}$; $q'(k, (2, 2)) = \bar{q}(f') \, (\bar{q}(f))^{-1}$ où $k = f' f^{-1}$, $f \in F$, $f' \in F$.

COROLLAIRE 1 : Si $\mathcal{S}'$ est un groupoïde local complet, q' se prolonge en un foncteur inductif de $\overline{\mathcal{F}}$ vers $\mathcal{S}'$.

COROLLAIRE 2 : Si F est un atlas propre et si la restriction de q à $\alpha(\bar{a}(F))$ est une injection, alors $\bar{q}(F)$ est un atlas faible complet tel que : $a(\bar{q}(F)) = q(a(F))$ et la restriction de q' à $(\beta(F), (2, 2))$ est une injection.

DEFINITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, F et F' deux atlas complets de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ resp., et q un foncteur inductif de $\bar{a}(F)$ vers $\bar{a}(F')$; on dit que F' est *associé* à F si l'on s'est donné une application $\bar{q}$ de F sur une base de F' telle que, pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$, on ait :

(1) $$(\bar{q}(f))^{-1} \bar{q}(f') = q(f^{-1} f'), \text{ si } f^{-1} f' \text{ est défini.}$$

On en déduit alors un foncteur inductif de $b(F)$ vers $b(F')$, et, si $\mathcal{S}'$ est un groupoïde local complet, un foncteur inductif de $\bar{b}(F)$ vers $\bar{b}(F')$.

Si la restriction de q à $\alpha(\bar{a}(F))$ est une injection, si $\mathcal{S}$ est sous-inductif et si F est propre, la relation (1) entraîne que $\bar{q}(F)$ est base d'un atlas complet associé à F par $\bar{q}$.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif et $\bar{\mathcal{S}}$ un élargissement de $\mathcal{S}$ qui soit, aussi, un élargissement inductif de $\mathcal{S}$; soit q un foncteur inductif de $\mathcal{S}$ vers un groupoïde sous-préinductif Γ dont la restriction à $\mathcal{S}_o$ soit une bijection sur Γ_o; alors il existe un élargissement inductif $\bar{\Gamma}$ de Γ qui est un quotient inductif de $\bar{\mathcal{S}}$ relativement à un foncteur inductif $\bar{q}$ dont la restriction à $\mathcal{S}$ est q.

COROLLAIRE 1: Si $\mathcal{S}$ et Γ sont des groupoïdes locaux complets, la proposition est encore vraie si $\bar{\mathcal{S}}$ est seulement un élargissement inductif de $\mathcal{S}$; de plus, $\bar{\Gamma}$ est alors un groupoïde local complet déterminé à une équivalence près.

COROLLAIRE 2: Soit Γ un groupoïde local complet et $\mathcal{S}$ un sous-pseudogroupe d'un groupoïde local complet $\mathcal{S}'$; soit F un atlas complet de $\mathcal{S}'$ tel que $\bar{a}(F) \prec \mathcal{S}$; alors deux atlas associés à F par une application prolongeant le foncteur q de la proposition sont isomorphes.

REMARQUE : Un atlas complet F peut être considéré comme une structure sur $\overline{\beta(F)}$. En particulier, supposons $\mathcal{S}$ local complet; soit H un sous-pseudogroupe de $\mathcal{S}$ et $\tilde{\mathcal{S}}$ l'élargissement complet de H au-dessus de $\mathcal{S}$. A tout atlas F de $\mathcal{S}$ correspond biuni-voquement un atlas $\tilde{F}$ de $\tilde{\mathcal{S}}$. Soit $\mathcal{A}$ la classe des atlas F de $\mathcal{S}$ tels que $\bar{a}(F) \prec H$ et $\tilde{\mathcal{A}}$ la classe des atlas $\tilde{F}$ correspondants à $F \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ est une espèce de structures équivalente à l'espèce de structures $\tilde{\mathcal{S}}_o$ au-dessus de $\mathcal{S}$. Soit q un foncteur inductif de H sur un groupoïde local complet Γ ; la proposition précédente associe à $\tilde{\mathcal{S}}$ un élargis-sement inductif $\tilde{\Gamma}$ de Γ qui est un quotient inductif de $\tilde{\mathcal{S}}$ relativement à un foncteur $\tilde{q}$ prolongeant q. A tout atlas $F \in \mathcal{A}$ est associé l'atlas $\tilde{q}(\tilde{F})$ de $\tilde{\Gamma}$. L'espèce de struc-tures ayant pour structures les atlas $\tilde{q}(\tilde{F})$ considérés comme structures sur $\beta(\tilde{F})$ est dite une *espèce de structures associée* à $\tilde{\mathcal{S}}_o$. Ce point de vue correspond à celui qui est esquissé dans "Espèces de structures locales" ; il sera développé dans une suite de cet article étudiant les catégories inductives, où on trouvera en particulier la catégorie inductive des atlas complets, dont la loi de composition est différente de celle du grou-poïde des atlas complets considéré ici.

9. Appendice : Perfectionnement d'une catégorie :

DEFINITION : Un élément f d'une catégorie $\mathcal{C}$ est *régulier à droite* si l'égalité : $hf = h'f$, où h et $h' \in \mathcal{C}$, entraîne $h = h'$; il est *régulier à gauche* si l'égalité $fh = fh'$ entraîne $h = h'$; il est *régulier* s'il est régulier à gauche et à droite.

Tout élément inversible d'une catégorie est régulier. Une catégorie dont tous les éléments réguliers sont inversibles sera dite *parfaite*. La classe des éléments réguliers d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie ainsi que la classe des éléments réguliers à droite (resp. à gauche).

PROPOSITION : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $f \in \mathcal{C}$; si f admet un inverse à droite, alors f est régulier à droite; si f est régulier à droite et admet un inverse à gauche, alors f est inversible. De même, si f admet un inverse à gauche, f est régulier à gauche; si f est régulier à gauche et admet un inverse à droite, alors f est inversible.

DEFINITION : Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie d'une catégorie $\mathcal{C}'$; soit $\mathcal{F}$ une sous-classe de $\mathcal{C}'$ contenant $\mathcal{C}_o$, telle que, pour tout $f \in \mathcal{F}$, on ait $\alpha(f) \in \mathcal{C}$ et que $\mathcal{F}$ contienne ff', pour tout $f' \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}$. Alors on dit que $\mathcal{F}$ est *distinguée* pour $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$.

Un *trio* de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F})$ est un triplet (h, f', f), où $f \in \mathcal{F}$, $f' \in \mathcal{F}$, $h \in \mathcal{C}$, $\alpha(f) = \alpha(h)$, $\alpha(f') = \beta(h)$.

Un *quatuor* de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F})$ est un quadruplet (h', f', f, h) tel que (f', f, h) soit un trio de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F})$ et que : $h'f = f'h$.

Soient $\mathcal{C}'$ une catégorie, $\mathcal{C}$ une sous-catégorie et $\mathcal{F}$ une classe distinguée pour $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$.

PROPOSITION : La classe $\sqsupset(\mathcal{F}, \mathcal{C}')$ des trios de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F})$ est équivalente à la catégorie induite $\alpha^*_{\mathcal{F}}(\mathcal{C})$, où $\alpha_{\mathcal{F}}$ est l'application : $f \to \alpha(f)$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{C}_o$.

PROPOSITION : La classe des quatuors de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{C})$ est une catégorie $\square\!\square(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ pour la multiplication *longitudinale* définie par

$$(h'', g', g, h_1')\,(h', f', f, h) = (h'', g'f', gf, h) \text{ si, et seulement si,}$$
$$h' = h_1',\ \alpha(g') = \beta(f');\ \alpha(g) = \beta(f).$$

$$\begin{tikzcd}
{} & {} \arrow[l, "g'"'] & {} \arrow[l, "f'"'] \\
{} \arrow[u, "h''"] & {} \arrow[l, "g"] \arrow[u, "h'"'] & {} \arrow[l, "f"] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION : La classe des quatuors de $(\mathcal{C},\mathcal{C}',\mathcal{F})$ est une catégorie $\boxminus(\mathcal{F},\mathcal{C}')$ pour la multiplication *latérale* définie par :

$$(h'_1, g', g, h_1)(h', f', f, h) = (h'_1 h', g', f, h_1 h)$$

si, et seulement si, $g = f'$, $\alpha(h'_1) = \beta(h')$, $\alpha(h_1) = \beta(h)$.

$$\begin{tikzcd}
\cdot & \cdot \arrow[l, "g'"'] \\
\cdot \arrow[u, "h'_1"] & \cdot \arrow[l, "f'"'] \arrow[u, "h_1"'] \\
\cdot \arrow[u, "h'"] & \cdot \arrow[l, "f"] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION : $\square\!\square(\mathcal{F},\mathcal{C})$ est une catégorie d'opérateurs sur $\sqsupset(\mathcal{F},\mathcal{C}')$ pour la loi de composition :

$$(f', f, h)(k', g', g, k) = (f'g', fg, k)$$

si, et seulement si, $h = k'$, $\alpha(f') = \beta(g')$, $\beta(g) = \alpha(f)$.

$$\begin{tikzcd}
\cdot & \cdot \arrow[l, "f'"'] & \cdot \arrow[l, "g'"'] \\
\cdot & \cdot \arrow[l, "f"] \arrow[u, "h"'] & \cdot \arrow[l, "g"] \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}$$

DEFINITION : $\mathcal{C}'$ est appelé *élargissement de* $\mathcal{C}$ *pour* $\mathcal{F}$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) Le foncteur $\tau : (h', f', f, h) \to (f', f, h)$ est un foncteur de $\boxminus(\mathcal{F},\mathcal{C}')$ sur $\sqsupset(\mathcal{F},\mathcal{C}')$.

2) Le foncteur $\pi : (h', f', f, h) \to h'$ est un foncteur de $\boxminus(\mathcal{F},\mathcal{C}')$ sur $\mathcal{C}'$.

Cette définition signifie aussi que tout trio de $(\mathcal{C},\mathcal{C}',\mathcal{F})$ peut être complété en un quatuor et que tout élément de $\mathcal{C}'$ est la base d'un quatuor de $(\mathcal{C},\mathcal{C}',\mathcal{F})$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{C}'$ un élargissement de $\mathcal{C}$ pour $\mathcal{F}$; pour que tout trio soit contenu dans un seul quatuor, il faut et il suffit que tout élément de $\mathcal{F}$ soit régulier à droite ; dans ce cas, $\boxminus(\mathcal{F},\mathcal{C}')$ est une extension inessentielle de $\mathcal{C}'$ pour le foncteur : $(h', f', f, h) \to h'$ et l'application $\sigma : (f', f, h) \to h'$ est un foncteur qui applique sur h' la classe des unités de la composante connexe de (f', f, h) dans la catégorie extension de la catégorie d'opérateurs $\square\!\square(\mathcal{F},\mathcal{C})$ (voir § 2).

PROPOSITION : Si $\mathcal{C}'$ est un élargissement de $\mathcal{C}$ pour $\mathcal{F}$ et si les éléments de $\mathcal{F}$ sont réguliers à droite, alors tout élément de $\mathcal{F}$ est inversible. Si $\mathcal{C}'$ est un élargissement de $\mathcal{C}$ pour la classe des éléments réguliers de $\mathcal{C}'$ de source dans $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}'$ est une catégorie parfaite; dans ce cas, si hf et f sont réguliers, h est régulier.

THEOREME : La catégorie $\sqsupset(\mathcal{C}', \mathcal{F})$ est un élargissement de $\mathcal{C}$ pour la classe $\mathcal{F}'$ formée des trios $\tilde{f} = (f, e, e)$, où $f \in \mathcal{F}$ et $e = \alpha(f)$; $h \in \mathcal{C}$ est identifié avec $\tilde{h} = (\beta(h), \alpha(h), h)$.

Le trio (f', f, h) est base du quatuor $((f', f, h), \tilde{f}', \tilde{f}, \tilde{h})$.

DÉFINITION : On dit que $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F})$ vérifie la *condition* (P) si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) Soient $f \in \mathcal{F}$, $f' \in \mathcal{F}$, tels que $\beta(f) = \beta(f')$; alors il existe $\varphi \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ et $\varphi' \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ tels que : $f \varphi = f' \varphi'$

2) Soient $f' \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ et $h' \in \mathcal{C}$ tels que $\beta(h') = \beta(f')$; alors il existe $f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ et $h \in \mathcal{C}$ tels que : $f' h = h' f$.

$$\begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "f"'] \\ \cdot \arrow[u, "f'"] & \cdot \arrow[l, "\varphi'"] \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "f'"'] \\ \cdot \arrow[u, "h'"] & \cdot \arrow[l, "f"] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

La deuxième condition signifie aussi que le couple (f', h') peut être complété en un quatuor de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{C})$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{C}'$ un élargissement de $\mathcal{C}$ pour une classe distinguée $\mathcal{F}$ telle que :

1) les éléments de $\mathcal{F}$ sont réguliers à droite,

2) les conditions $f \in \mathcal{F}$, $g \in \mathcal{F}$, $g = f f'$ entraînent $f' \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}$.

Alors $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F})$ vérifie la condition (P).

PROPOSITION : Soient Γ et Γ' les groupoïdes des éléments inversibles de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$; soit $\mathcal{J}$ la classe distinguée des éléments f de Γ' tels que, ou bien $f \in \Gamma$, ou bien $\alpha(f) \in \mathcal{C}$ et $\beta(f) \notin \mathcal{C}$. Pour que $\mathcal{C}'$ soit un élargissement de $\mathcal{C}$ (au sens du § 3), il faut et il suffit que $\Gamma = \Gamma' \cap \mathcal{C}$ et que $\mathcal{C}'$ soit un élargissement de $\mathcal{C}$ pour $\mathcal{J}$; dans ce cas, $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{J})$ vérifie la condition (P).

PROPOSITION : $(\mathcal{C}, \sqsupset(\mathcal{C}', \mathcal{F}), \mathcal{F}')$ vérifie la condition (P). Si tout élément de $\mathcal{C}$ inver--sible dans $\mathcal{C}'$ est inversible dans $\mathcal{C}$, alors $\sqsupset(\mathcal{C}', \mathcal{F})$ est un élargissement de $\mathcal{C}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{C}'$ un élargissement de $\mathcal{C}$ pour $\mathcal{F}$, les éléments de $\mathcal{F}$ étant régu--liers et $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F})$ vérifiant la condition (P); alors l'image réciproque par le foncteur σ de $h' \in \mathcal{C}'$ est la classe des unités de la composante connexe d'un trio (f', f, h) dans la catégorie extension de la catégorie d'opérateurs $\square\!\square(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, où (h', f', f, h) est un quatuor; c'est aussi la classe des trios (g', g, k) tels qu'il existe deux quatuors q et q' de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{C})$, vérifiant la condition $(f', f, h)\, q = (g', g, k)\, q'$.

THEOREME : Si tout élément de $\mathcal{F}$ est régulier à droite, si tout élément de $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ est régulier et si $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F})$ vérifie la condition (P), les relations ρ et ρ' suivantes sont équivalentes:

$(f', f, h)\,\rho\,(g', g, k)$ si, et seulement si, il existe $q \in \square\square(\mathfrak{F}, \mathcal{C})$ et $q' \in \square\square(\mathfrak{F}, \mathcal{C})$ tels que $(f', f, h)q = (g', g, k)q'$;

$(f', f, h)\,\rho'\,(g', g, k)$ si, et seulement si, $f\varphi = g\gamma$, où $\varphi \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{C}$ et $\gamma \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{C}$, entraîne $f' h \varphi = g' k \gamma$.

De plus, il existe un élargissement $\overline{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ pour une classe $\overline{\mathfrak{F}}$ distinguée pour $(\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}})$ ayant les propriétés suivantes:

1) $\overline{\mathcal{C}}$ est la catégorie quotient de $\sqsupset(\mathcal{C}', \mathfrak{F})$ par la relation ρ et $f \to (f, e, e) \bmod \rho$, où $f \in \mathfrak{F}$, est une bijection de $\mathfrak{F}$ sur $\overline{\mathfrak{F}}$.
2) Soit $\mathcal{C}''$ un élargissement de $\mathcal{C}$ relativement à une classe $\mathfrak{F}''$ admettant une applica--tion sur la classe $\mathfrak{F}'$ des trios $\bar{f} = (f, e, e)$, de la forme: $f'' \to (f, \alpha(f''), \alpha(f''))$, où $f'' \in \mathfrak{F}''$; alors $\overline{\mathcal{C}}$ est une catégorie quotient de $\mathcal{C}''$.

COROLLAIRE : $(\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathfrak{F}})$ vérifie la condition (P).

DEFINITION : Une catégorie $\overline{\mathcal{C}}$ est appelée un *perfectionnement* d'une sous-catégorie $\mathcal{C}$ si $\mathcal{C}$ et $\overline{\mathcal{C}}$ ont les mêmes unités et si $\overline{\mathcal{C}}$ est un élargissement de $\mathcal{C}$ pour la classe distinguée $\mathfrak{R}$ formée des éléments réguliers de $\mathcal{C}$.

Dans $\overline{\mathcal{C}}$, tout élément régulier de $\mathcal{C}$ est inversible.

THEOREME : Pour qu'une catégorie $\mathcal{C}$ admette un perfectionnement $\overline{\mathcal{C}}$, il faut et il suffit que $(\mathcal{C}, \mathcal{C}, \mathfrak{R})$ vérifie la condition (P). Alors $(\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}}, \mathfrak{R})$ vérifie aussi la condition (P).

(A SUIVRE)